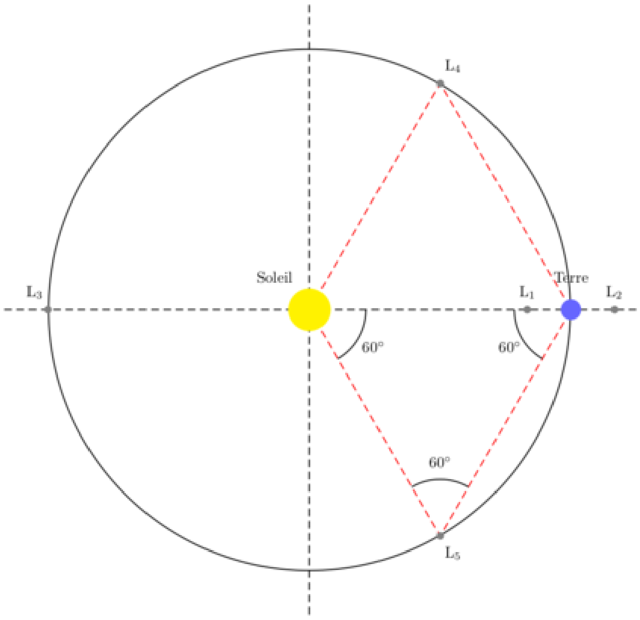
Corrigé du DM 8

pour le jeudi 14 décembre 2023

⋆ ⋆ ⋆

Les points de Lagrange : X 2002

⋆ ⋆ ⋆



Positions des 5 points de Lagrange

1. $E_P = -Gm_1m_2/r$
2.
$$\overrightarrow{OC} = \frac{m_1\overrightarrow{OA}_1 + m_2\overrightarrow{OA}_2}{m_1+m_2}$$
Le système étant isolé, son centre d'inertie a, dans un référentiel galiléen, un mouvement rectiligne (à la vitesse constante $\overrightarrow{V} = \frac{m_1\overrightarrow{V}_1 + m_2\overrightarrow{V}_2}{m_1+m_2}$).
3. Dans le référentiel barycentrique, la vitesse de A_1 par exemple est $\vec{V}_1^* = \vec{V}_1 - \vec{V}$. Par ailleurs, $\vec{v} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Le calcul de $E_C^* = \frac{1}{2}(m_1V_1^2 + m_2V_2^2)$ conduit alors à $\boxed{E_C^* = \frac{1}{2}\mu v^2}$ avec $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2)$ (μ masse réduite).
4. Soit $\overrightarrow{f}_2$ la force subie par A_2. A_1 subit une force opposée. L'équation du mouvement de A_2 est :
$$\frac{d\overrightarrow{V}_2}{dt} = \frac{\vec{f}_2}{m_2}$$
et celle du mouvement de A_1 est :
$$\frac{d\overrightarrow{V}_1}{dt} = \frac{-\vec{f}_2}{m_1}$$
On en déduit :
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{\mu}\vec{f}_2$$
C'est l'équation du mouvement relatif et cela correspond à celui d'une masse μ soumise à la force centrale $\vec{f}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$ qui dérive de l'énergie potentielle $-Gm_1m_2/r$ (prise nulle à l'infini).

5. La distance reste finie entre les deux masses si la particule réduite reste à distance finie de l'origine, ce qui correspond ici à un état lié d'énergie négative. La condition cherchée est :

$$\boxed{\frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r} < 0}$$

6. La distance est fixe si la particule réduite a un mouvement circulaire. L'équation du mouvement est dans ce cas $\mu v^2/r_0 = Gm_1m_2/r_0^2$ d'où on déduit $v^2 r_0 = G(m_1+m_2)$. La pulsation est :

$$\boxed{\Omega = \frac{v}{r_0} = \sqrt{\frac{G(m_1+m_2)}{r_0^3}}}$$

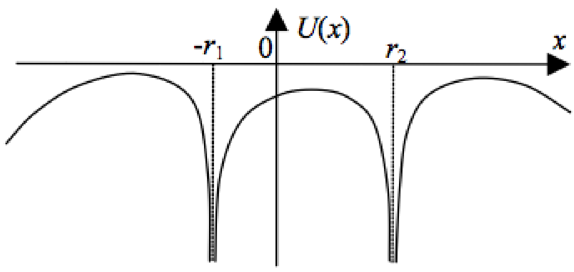
et la période :

$$T = 2\pi/\Omega = 2\pi\sqrt{\frac{r_0^3}{G(m_1+m_2)}}$$

II

1. La force subie par m comporte 4 termes : les deux forces gravitationnelles exercées par m_1 et m_2, la force d'inertie d'entraînement centrifuge associée à la rotation uniforme du référentiel et la force de Coriolis qui, étant perpendiculaire à la vitesse relative, a une composante nulle sur l'axe $x'Cx$.
Alors
$$f_x = m\left(-\frac{Gm_1}{|x+r_1|^3}(x+r_1) - \frac{Gm_2}{|x-r_2|^3}(x-r_2) + \Omega^2 x\right)$$

2. $f_x = -\frac{dU}{dx}$ avec $\boxed{U = m\left(-\frac{Gm_1}{|x+r_1|} - \frac{Gm_2}{|x-r_2|} - \frac{\Omega^2x^2}{2}\right)}$



Il y a 3 extrema d'énergie potentielle donc trois positions d'équilibre : une entre m_1 et m_2, deux de part et d'autre. Ces positions sont instables par rapport à un déplacement selon $x'Cx$ (maximum local d'énergie potentielle).

III

1.
$$\vec{F} = -Gm_1\left(m_2\frac{\overrightarrow{A_2A_1}}{d^3} + m_3\frac{\overrightarrow{A_3A_1}}{d^3}\right)$$

Or, C étant le barycentre des masses, $m_1\overrightarrow{A_1A_1} + m_2\overrightarrow{A_2A_1} + m_3\overrightarrow{A_3A_1} = (m_1+m_2+m_3)\overrightarrow{CA_1}$ .c.q.f.d.

2. L'accélération de m_1 lors de son mouvement circulaire est $-\Omega^2\overrightarrow{CA_1}$ ce qui est cohérent avec la force subie $\overrightarrow{F}_1$ si et seulement si $\boxed{\Omega^2 d^3 = G(m_1+m_2+m_3)}$. La condition trouvée ne fait pas intervenir m_1 de façon privilégiée. Si elle est remplie, les trois particules ont un mouvement circulaire de même pulsation.
   Remarque : la valeur de Ω est cohérente avec le résultat du I 6. avec, dans ce cas, $m_3 = 0$.
3. On suppose que m reste dans le plan dans lequel se fait le mouvement de rotation de $\{m_1, m_2\}$. La force d'inertie d'entraînement, dans ce cas de rotation uniforme du référentiel mobile, dérive de l'énergie potentielle $-m\Omega^2R^2/2$ donc

$$\boxed{U(X,Y) = -m\left(\frac{Gm_1}{d_1} + \frac{Gm_2}{d_2} + \frac{\Omega^2(X^2+Y^2)}{2}\right)}$$

4. La troisième loi de Newton s'écrit alors (en tenant compte de la force d'inertie de Coriolis dans le référentiel tournant) $\overrightarrow{a} = -\overrightarrow{grad}(u) - 2\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{v}$ c'est à dire :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -u_X + 2\Omega\dot{Y} \\ \ddot{Y} = -u_Y - 2\Omega\dot{X} \end{cases}$$

5. A l'ordre 1 en x et y, $u_X(X_0+x, Y_0+y) = u_X(X_0,Y_0) + u_{XX}x + u_{XY}y$. Or $u_X(X_0,Y_0)$ est nul puisque (X_0,Y_0) est position d'équilibre. Les équations du mouvement sont alors :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -u_{XX}x - u_{XY}y + 2\Omega\dot{y} \\ \ddot{y} = -u_{XY}x - u_{YY}y - 2\Omega\dot{x} \end{cases}$$

6. En remplaçant x et y par les expressions proposées on obtient le système :

$$\begin{cases} a(\lambda^2 + u_{XX}) + b(u_{XY} - 2\Omega\lambda) = 0 \\ a(u_{XY} + 2\Omega\lambda) + b(\lambda^2 + u_{YY}) = 0 \end{cases}$$

   qui n'admet que la solution triviale sans intérêt $(a,b) = (0,0)$ sauf si le déterminant est nul. c.q.f.d.
7. Le produit $\alpha(1-\alpha)$ est positif.
   (a) Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré en λ'^2 a deux racines réelles négatives (somme négative et produit positif) donc toutes les valeurs de λ' sont imaginaires pures. Les solutions en $x(t)$ et $y(t)$ sont alors bornées et l'équilibre est stable.
   Si $\Delta = 0$, les solutions en $x(t)$ et $y(t)$ associées aux racines doubles en λ' sont produit d'un polynôme de degré un en t et d'une exponentielle d'argument imaginaire pur et sont non bornées. L'équilibre est instable.
   (b) Si $\Delta < 0$, les racines en λ'^2 sont complexes, de partie imaginaire non nulle. Parmi les deux valeurs de λ' de même carré, il y en a alors une qui a une partie réelle strictement positive et conduit à des solutions non bornées : l'équilibre est instable.
   (c) La condition de stabilité $\Delta > 0$ conduit à $\alpha(1-\alpha) < 1/27$ donc $\alpha < \frac{1-\sqrt{23/27}}{2}$ ou $\alpha > \frac{1+\sqrt{23/27}}{2}$ c'est à dire $\alpha < 0,0385$ ou $\alpha > 0,9615$.
8. Dans le cas Terre-Lune-petit objet la position est stable (α est assez petit) si on néglige les actions extérieures (ici la principale correction viendrait du soleil). De même dans le cas Jupiter-Soleil-petite planète où une correction venant d'autres grosses planètes (Saturne ...) pourrait remettre les résultats en question.

9. Si on envisage un mouvement hors du plan XCY, il faut étudier :
   — La modification des forces de Coriolis en $\Omega\vec{u}_z \wedge \vec{v}$ dont la valeur n'est pas changée par la présence d'une vitesse selon CZ (produit vectoriel) donc ne modifie pas le mouvement projeté sur XCY et qui de plus n'influe pas le mouvement selon CZ puisqu'elle est perpendiculaire à cet axe.
   — La force d'inertie d'entraînement qui reste $-m\Omega^2(X\vec{u}_X + Y\vec{u}_Y)$ donc ne change pas (nulle selon CZ).
   — Les forces gravitationnelles attractives qui sont donc vers le plan $Z = 0$ (forces de rappel).

   L'équilibre est donc stable selon CZ (et le reste dans le plan XCY).
   Remarque : Les points étudiées dans ce problème sont nommés "Points de Lagrange". En particulier, au III, la position étudiée serait toujours instable dans le plan XCY sans la force de Coriolis (l'énergie potentielle $U(X,Y)$ y est maximale). Il s'agit d'un équilibre instable dans deux directions qui est stabilisé par un terme gyroscopique en $\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{v}$.

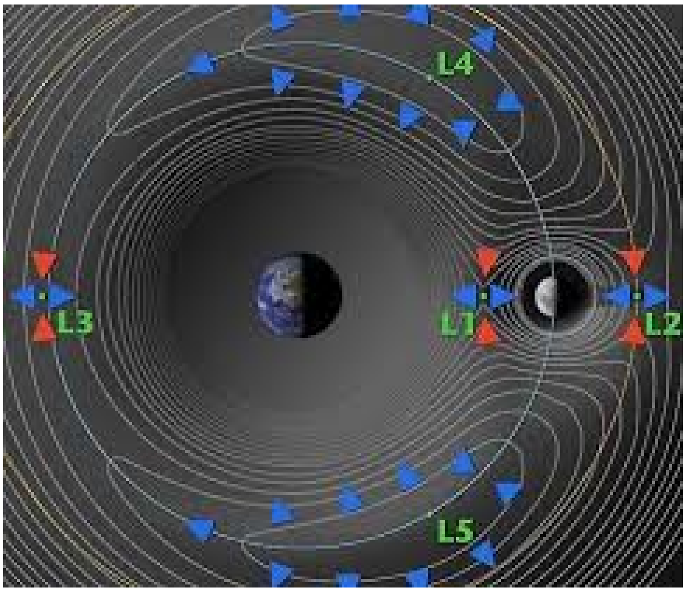


FIGURE 1 – Equipotentielles pour le système Terre-Lune. Les points L1, L2 et L3 sont des points selle et les points L4 et L5 sont des maxima de l'énergie potentielle.