

DM 9

pour le jeudi 21 décembre 2023

Ondes transverses le long d'une corde sous tension

Cette épreuve comprend deux parties indépendantes. La première est consacrée à la physique et porte sur l'étude de la propagation d'ondes transverses le long d'une corde. La seconde concerne la chimie et étudie l'influence de la convection sur la cinétique réactionnelle. Il est conseillé de ne pas consacrer plus de deux heures et trente minutes par partie. Les résultats numériques seront donnés avec un chiffre significatif.

Partie Physique

Ondes transverses le long d'une corde sous tension

Cette étude comprend trois parties. La première est consacrée à la caractérisation de l'équilibre d'une corde suspendue. La seconde s'intéresse à la propagation d'ondes transverses le long d'une corde pendante. La dernière s'intéresse encore à la propagation d'ondes transverses mais cette fois le long d'une corde en défilement continu. La première partie est indépendante des suivantes mais la dernière est liée à la précédente. Dans cette dernière partie, la démarche est moins guidée que dans les précédentes.

1 Étude de l'équilibre d'une corde suspendue en deux points.

Reportons-nous à la figure (1-a). Nous notons $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ le référentiel cartésien choisi. Une corde, considérée comme inextensible et sans raideur de flexion, de longueur L et de masse linéique μ , est suspendue aux points $A(-a, 0)$ et $B(+a, 0)$ ($a < L/2$). La forme adoptée par la corde, au repos dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_y$ ($g > 0$), est décrite par la fonction $y = f(x)$. Nous notons $M = M(s)$ un point courant de cette corde. Le paramètre s représente l'abscisse curviligne de ce point, orientée de A vers B. Il s'agit donc de son abscisse comptée le long de la corde, à partir d'un point M_0 choisi comme origine. Nous notons $\vec{T} = T(s)\vec{\tau}$ ($T \geq 0$) l'effort que la partie de corde $[s, L]$ exerce, au point $M(s)$, sur la partie $[0, s]$. Le vecteur unitaire $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ oriente la tangente à la courbe $y = f(x)$, au point $M(s)$. Nous appellerons "tension" cette force. Ces notations et conventions sont précisées sur la figure (1-b). Nous cherchons, dans cette partie, à déterminer la fonction f décrivant la forme d'équilibre de la corde.

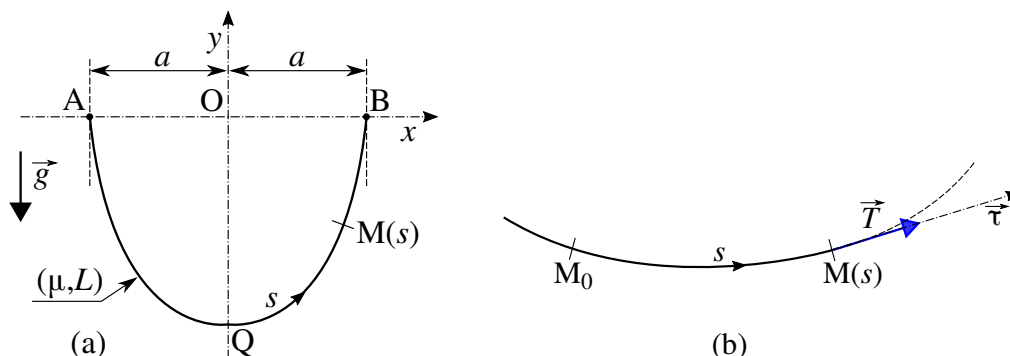


FIGURE 1 – (a) : Corde (μ, L) suspendue aux points $A(-a, 0)$ et $B(+a, 0)$, dans le champ de pesanteur. (b) : Tension \vec{T} au point $M(s)$ de la corde.

La figure (2) représente un élément ds de corde à l'équilibre. L'angle α qui y apparaît est tel que $\vec{\tau} \cdot \vec{u}_x = \cos \alpha$.

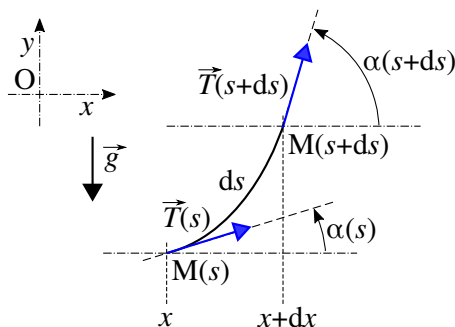


FIGURE 2 – Portion élémentaire de corde à l'équilibre. L'effet de courbure a été exagéré afin de rendre distinctes les directions des tensions aux points $M(s)$ et $M(s + ds)$.

Résultat utile : La relation liant la dérivée ds/dx à la dérivée $f' = df/dx$ s'écrit :

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + f'^2} \quad (1)$$

1.1 Approche mécanique.

Accédons à la fonction $f = f(x)$ à partir du principe fondamental de la dynamique.

- Établir l'équation différentielle traduisant l'équilibre mécanique du tronçon élémentaire ds , en projection sur l'axe (Ox) . En déduire que la tension T vérifie la relation algébrique :

$$T(s) = \frac{A}{\cos \alpha(s)} \quad \text{où } A = \text{Cste} \quad (2)$$

- Établir l'équation différentielle traduisant l'équilibre mécanique du tronçon élémentaire ds , en projection sur l'axe (Oy) .
- Déduire de cette équation l'expression de la constante A (équation (2)) en fonction de μ , L , g et de l'angle α_B .
- Établir, à partir des résultats précédents, que la fonction f vérifie l'équation différentielle :

$$f''(x) = k \sqrt{1 + f'(x)^2} \quad (3)$$

On précisera l'expression de la constante k ($k > 0$) en fonction de L et α_B .

- La solution générale de l'équation (3) prend la forme :

$$f(x) = \frac{1}{k} \cosh[k(x - b)] + c \quad \text{où } b = \text{Cste} \quad \text{et } c = \text{Cste} \quad (4)$$

En déduire l'expression de la fonction f correspondant au paramétrage géométrique adopté. On fera apparaître les grandeurs a et k .

- Justifier que k ne peut dépendre que des grandeurs a et L .
- Indiquer la relation permettant d'accéder à l'expression du paramètre k en fonction de a et L . Il n'est pas demandé de développer ce calcul.
- La relation précédente conduit à l'équation :

$$qK = \sinh K \quad \text{où } K = ka \quad \text{et } q = \frac{L}{2a} \quad (5)$$

Estimer la valeur de k à partir de la figure (3), dans le cas où $a = 3$ cm et $L = 20$ cm.

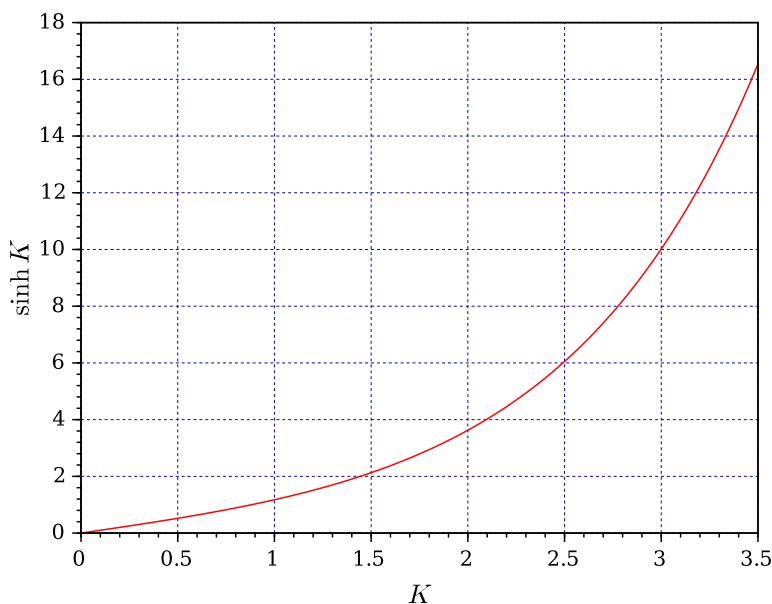
1.2 Approche énergétique.

À l'instar d'un système mécanique dont l'état est caractérisé par un ensemble fini de variables, la fonction f décrivant la configuration d'équilibre de la corde (qui est un système continu) peut être déterminée par une approche énergétique. Cette configuration d'équilibre correspond au minimum d'une certaine grandeur Φ , homogène à une énergie, à déterminer.

- Justifier que la grandeur Φ est ici égale à l'énergie potentielle de gravitation E_p de la corde.
- Exprimer l'énergie potentielle de gravitation E_p de la corde. La fonction f étant, par cette approche, encore inconnue, on conservera cette expression sous sa forme intégrale.
- Il s'agirait maintenant de déterminer la fonction f minimisant l'énergie potentielle E_p , cette minimisation devant toutefois être effectuée en respectant une certaine condition (C) . Imaginons alors rechercher la configuration d'équilibre d'une corde en lui donnant différentes formes (les points A et B restant fixés) et en comparant les valeurs correspondantes de l'énergie E_p . Définir la condition C inspirée par cette expérience de pensée.
- La minimisation de l'énergie potentielle respectant implicitement la condition C se traduit mathématiquement par la recherche de la fonction f minimisant (mais sans condition cette fois) l'intégrale ψ :

$$\psi = \mu g \int_{-a}^{+a} dx (f - c) \sqrt{1 + f'^2} \quad \text{où } c = \text{Cste} \quad (6)$$

La constante c est celle apparaissant dans l'équation (4). En comparant la forme intégrale de l'énergie potentielle E_p à l'intégrale ψ , indiquer quelle est l'influence de la condition C sur la forme générale d'équilibre de la corde.

FIGURE 3 – Représentation graphique de la fonction $K \mapsto \sinh K$.

1.3 Analogie avec un film d'eau savonneuse tendu.

50 La figure (4) représente un film d'eau savonneuse tendu entre deux anneaux filiformes rigides de rayon R , coaxiaux, situés à une distance $2a$ l'un de l'autre. Sa forme en diabolo, conséquence des effets de la tension superficielle agissant au niveau de chaque interface eau savonneuse-air, présente une symétrie de révolution autour de l'axe (Ox) . Nous notons $r = r(x)$ le rayon d'une section de ce film, à l'abscisse x . L'effet de la pesanteur, négligeable devant celui de la tension superficielle, ne sera pas pris en compte. Nous notons γ le coefficient de tension superficielle de l'interface eau savonneuse-air. Ce film est une structure ouverte, la pression est donc identique sur ses faces intérieure et extérieure.

55 Dans ces conditions nous admettrons que la configuration d'équilibre de ce film tendu correspond au minimum de son énergie de surface. Nous nous proposons d'étudier cette configuration.

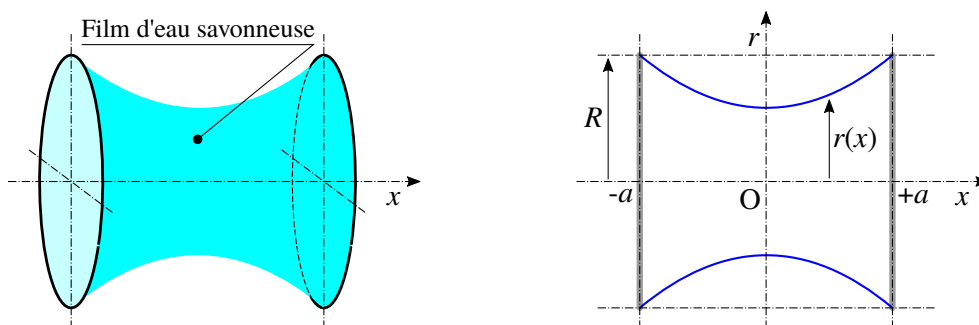


FIGURE 4 – Film d'eau savonneuse tendu entre deux anneaux : vue en perspective (à gauche) et paramétrage géométrique (à droite).

13. Exprimer, sous la forme d'une intégrale portant sur les fonctions r et $r' = dr/dx$, l'énergie de surface E_γ de ce film.
- 60 14. Indiquer les similitudes et les différences apparaissant entre la recherche de la fonction $r = r(x)$ et celle de la fonction $f = f(x)$ (se reporter à la sous-section (1.2)). On s'appuiera, en particulier, sur la réponse donnée à la question (12).
15. Indiquer alors comment on déduit la fonction $r = r(x)$ des résultats obtenus dans la sous-section (1.2). Nous écrivons cette fonction sous la forme :

$$r(x) = R_0 \cosh \frac{x}{R_0} \quad (R_0 = \text{Cste} > 0) \quad (7)$$

16. Expliquer pourquoi, dans le cas du film et au contraire de celui de la corde pesante, la solution $r = r(x)$ n'autorise pas la présence d'une constante additive c .
- 65 17. La figure (5) représente la fonction $u \mapsto \cosh u$. En posant $u = a/R_0$ et $s = R/a$, estimer, à l'aide de cette figure, la valeur de R_0 correspondant à $R = 2$ cm et $a = 1$ cm. Une argumentation est attendue.

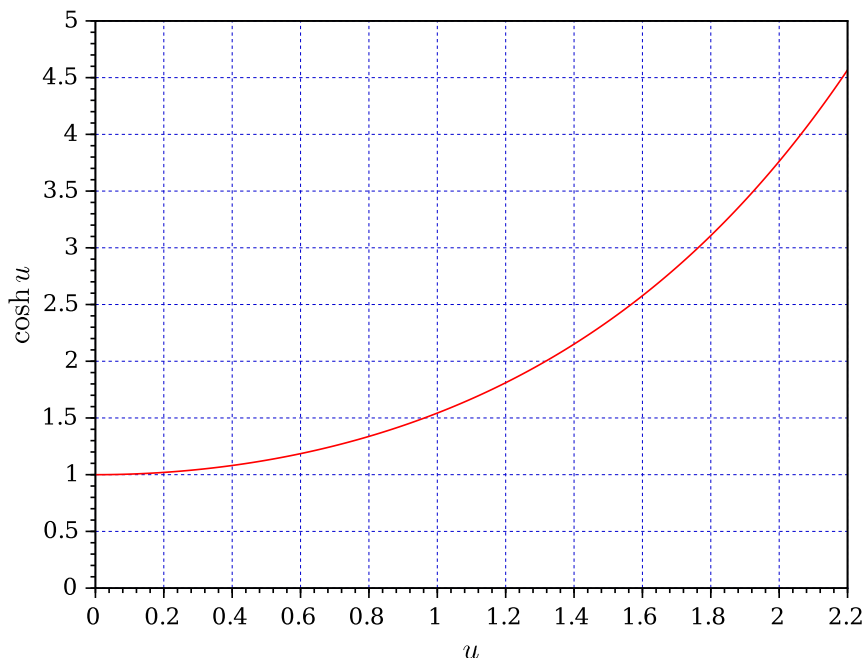


FIGURE 5 – Représentation graphique de la fonction $u \mapsto \cosh u$.

18. Toujours pour $R = 2$ cm et à partir de la figure (5), déterminer la valeur de seuil a_c du paramètre a au-delà de laquelle le film ne peut se maintenir (sous la forme envisagée). Préciser alors la valeur R_{0c} de R_0 correspondante.

2 Propagation d'ondes transverses le long d'une corde pendante.

70 Reportons-nous à la figure (6). Une corde, de longueur L et de masse linéique μ , considérée comme inextensible et sans raideur de flexion, est suspendue au point B, fixe. Elle est soumise au champ de pesanteur $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ ($g > 0$). Nous supposons qu'une perturbation d'amplitude caractéristique a ($a \geq 0$) et d'extension caractéristique λ ($\lambda \geq 0$) se propage le long de cette corde et nous nous proposons d'étudier ce phénomène. L'origine O du référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ est placée au niveau de l'extrémité libre de la corde au repos. Nous négligerons toute cause de dissipation de l'énergie

75 mécanique.

19. Nous nous placerons toujours dans l'approximation des "faibles perturbations". Préciser comment cette hypothèse contraint les caractéristiques (a, λ) de l'onde représentée sur la figure (6).

20. Nous notons $\vec{T} = T(z)\vec{u}_z$ la force que fait subir la partie $[z, L]$ de corde à la partie $[0, z]$, au point M(z). Exprimer la tension $T = T(z)$ lorsque la corde est au repos. Sous l'hypothèse adoptée des faibles perturbations nous

80 considérerons que cette expression algébrique reste valable hors de l'état de repos de la corde.

- Nous décrivons la perturbation se propageant le long de la corde par la fonction :

$$h = h(z, t) \quad (8)$$

21. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction h . Vérifier qu'elle prend la forme :

$$\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial h}{\partial z} \right) \quad \text{où} \quad T = T(z) \quad (9)$$

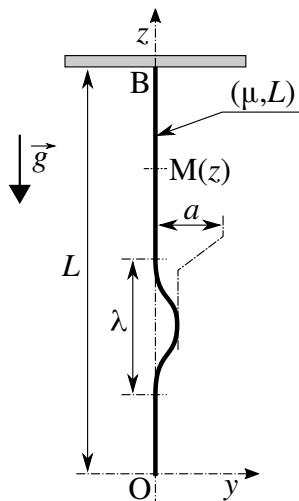


FIGURE 6 – Perturbation (a, λ) se propageant le long d'une corde pendante (μ, L) . L'origine O du référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ se situe au niveau de l'extrémité libre de la corde au repos.

22. Établir à quelle condition il devient acceptable d'écrire cette équation sous la forme approximative :

$$\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad (10)$$

Nous adoptons dès lors cette forme approchée, sur toute la longueur de la corde.

• La propagation de la perturbation est régie par une équation aux dérivées partielles linéaire mais dont l'un des coefficients dépend de la variable d'espace. Nous allons tâcher de contourner ce problème. Effectuons, dans un premier temps, le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} Z = \sqrt{\frac{z}{L}} \\ H(Z, t) = h(z, t) \end{cases} \quad (11)$$

23. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction $H = H(Z, t)$.

24. En considérant une perturbation d'éléments caractéristiques (a, λ) (se reporter à la figure (6)), définir à quelle condition cette équation peut s'écrire approximativement sous la forme :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \quad (12)$$

On précisera l'expression de la constante c_0 (que l'on choisira positive). C'est cette forme approchée que nous utiliserons dans la suite.

85 25. Nous nommons la constante c_0 "simili célérité" des ondes, dans le nouvel espace (Z, t) . Calculer sa valeur dans le cas où $L = 1$ m et $g = 10$ m · s⁻².

• On impose, à une altitude donnée z_0 ($0 < z_0 < L$), une perturbation de la forme :

$$h(z_0, t) = a \exp(-t^2/\tau^2) \quad (a > 0, t \in [-\infty, +\infty]) \quad (13)$$

La constante (positive) τ est telle que $c_0 \tau \ll 1$.

26. Exprimer, en fonction de c_0 , L et τ , l'extension spatiale caractéristique λ de cette perturbation (dans l'espace (z, t)). Vérifier que $\lambda \ll L$.

90 27. Donner les expressions $h^{(+)}(z, t)$ et $h^{(-)}(z, t)$ des fonctions décrivant respectivement les ondes progressive (propagation selon z croissant) et régressive (propagation selon z décroissant), se propageant le long de la corde, initiées par la perturbation décrite par l'équation (13).

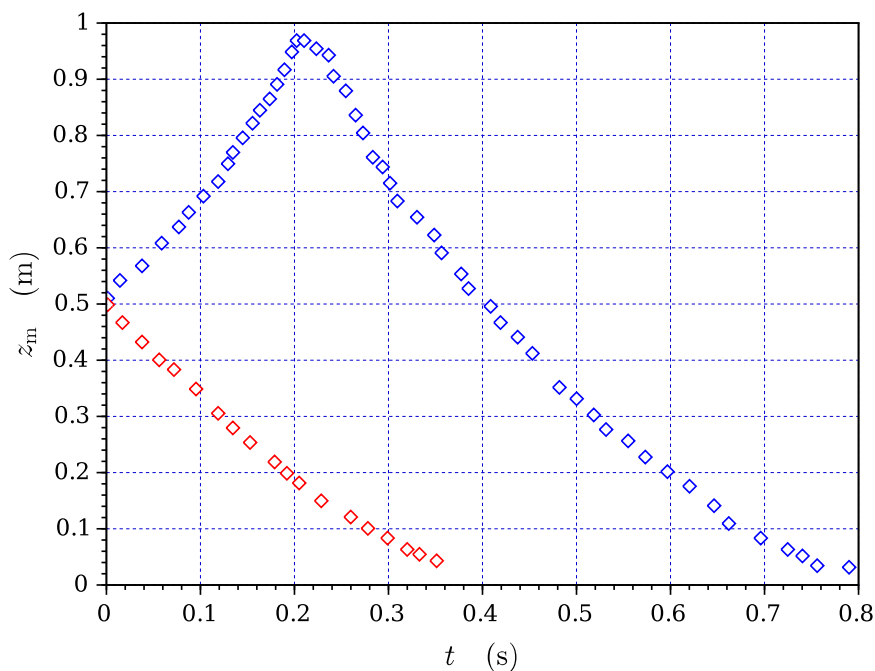


FIGURE 7 – Positions, au cours du temps, dans l'espace (z, t) , des maxima de déplacement de la corde.

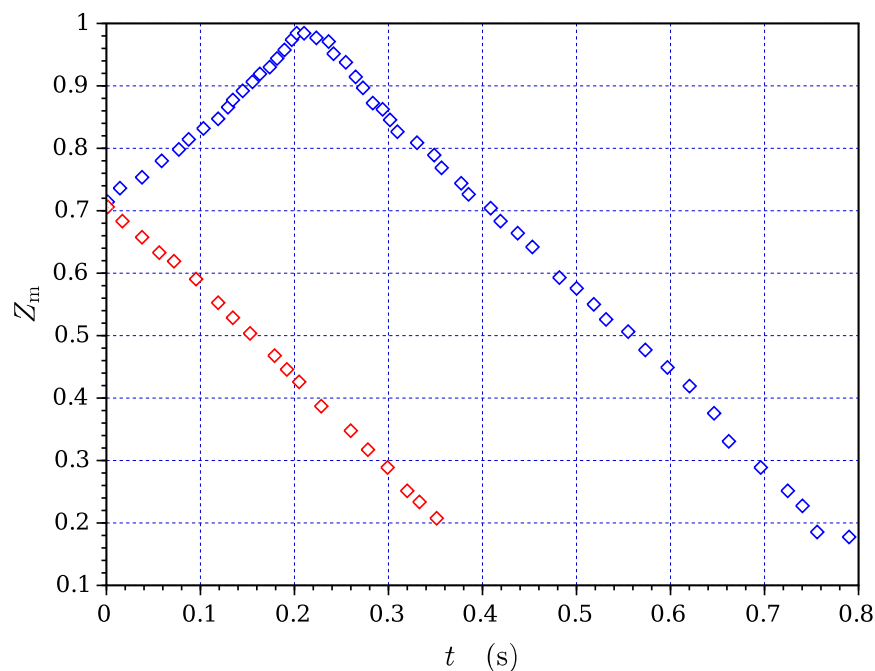


FIGURE 8 – Positions, au cours du temps, dans l'espace (Z, t) , des maxima de déplacement de la corde.

28. La figure (7) présente, dans l'espace (z, t) , l'évolution temporelle expérimentale de la position $z_m = z_m(t)$ de chacun des maxima de déplacement d'une corde soumise à une perturbation proche de celle décrite par l'équation (13). Analyser ces résultats.
29. La figure (8) présente les résultats de la figure (7), transposés dans l'espace (Z, t) . Analyser ces nouvelles évolutions.

30. Dédurre de cette figure la valeur expérimentale de la simili célérité c'_0 définie à la question (25). La comparer à la valeur théorique précédemment calculée.

100 3 Propagation d'une onde transverse le long d'une corde en défilement.

Dans cette partie, la démarche est moins guidée que dans les précédentes. Quelques initiatives, que l'on présentera avec clarté, seront donc à prendre.

Nous souhaitons étudier la propagation d'une onde le long d'une corde, bouclée sur elle-même, en défilement continu. Cette situation est illustrée par la figure (9). La corde, de masse linéique μ , est considérée comme inextensible et sans raideur de flexion. Elle est entraînée par une poulie à la vitesse linéaire v ($v > 0$) constante. Nous modélisons la forme qu'elle adopte par deux brins verticaux (AB) et (CD) parallèles, chacun de longueur L , reliés par deux demi-cercles (BC) et (DA) de centres respectifs O et E, et de même rayon R ($R \ll L$). Nous notons $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ le référentiel lié au laboratoire et $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ ($g > 0$) le champ de gravitation. Le point M, fixe dans \mathcal{R} , parcourt l'un ou l'autre des segments [A, B] et [C, D] (description eulérienne). Nous notons $\vec{T}_M = T_M\vec{u}_z$ ($T_M \geq 0$) l'effort de traction (appelé tension) que la partie supérieure de la corde exerce, au point M, sur la partie inférieure (dans les brins verticaux). Ces notations et conventions sont précisées sur la figure (9). Nous ne prendrons en compte aucune cause de dissipation de l'énergie mécanique.

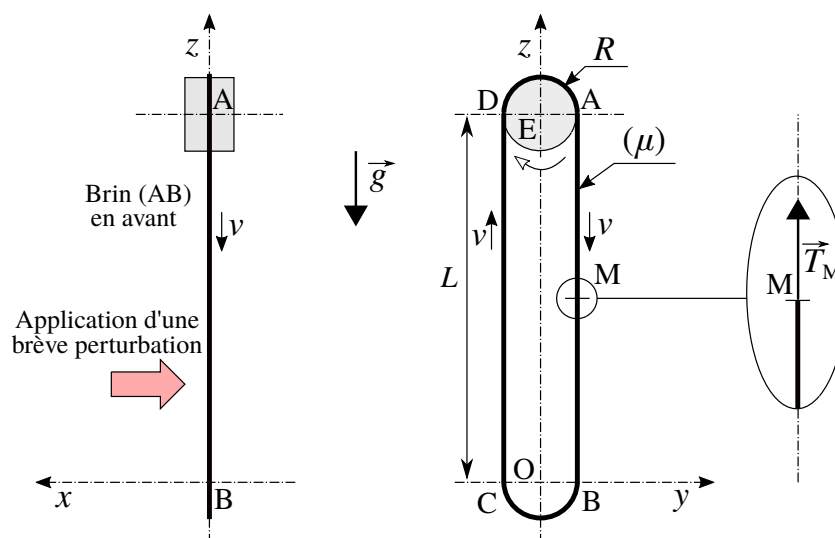


FIGURE 9 – Corde, bouclée sur elle-même, entraînée par une poulie (de centre E) à la vitesse linéaire v constante : modélisation de la forme adoptée par la corde et paramétrage

Les valeurs des paramètres correspondants à l'expérience présentée dans la question (33) sont les suivantes : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $L = 1 \text{ m}$, $R = 2,5 \text{ cm}$ et $v = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- 115 31. Exprimer, dans le cadre du modèle choisi, la somme $T_B + T_C$. Établir ensuite l'égalité $T_B = T_C$. En déduire enfin l'expression de la tension T_B , dans le cas où $v^2 \gg Rg$ (cas dans lequel nous nous placerons et qui correspond à la situation expérimentale étudiée).

On s'inspirera ici de la méthode mise en œuvre pour établir des bilans en mécanique des fluides.

32. L'équation différentielle (10) nous invite à introduire (sous certaines conditions que nous n'étudierons pas) une célérité locale $c = c(z)$ des ondes, dont le carré s'exprime :

$$c(z)^2 = \frac{T_M}{\mu} \quad (14)$$

où z ($z \in [0, L]$) est l'altitude du point M, pour chacun des brins.

- 120 Exprimer les célérités correspondantes $c^+(z)$ et $c^-(z)$ en fonction de v , g et z . Préciser quelle signification leur attribuer, dans le contexte particulier de cette partie. Représenter graphiquement la dépendance, avec z/L , de chacun des rapports c^+/v et c^-/v . On notera, sur ce graphique, les valeurs particulières qui apparaissent et l'on placera l'horizontale d'ordonnée unitaire.

125

33. La corde, en cours de défilement, est légèrement et temporairement perturbée à l'altitude indiquée par une flèche sur les figures (9) et (11). La perturbation est produite en mettant brièvement en contact une tige cylindrique d'axe (Oy) avec le brin "descendant" (AB) (et seulement ce brin). La coordonnée x_t , selon l'axe (Ox), de l'axe de cette tige suit approximativement la séquence représentée sur la figure (10) où $\Delta t \sim 0,1$ s et $\Delta x \sim 5$ cm.

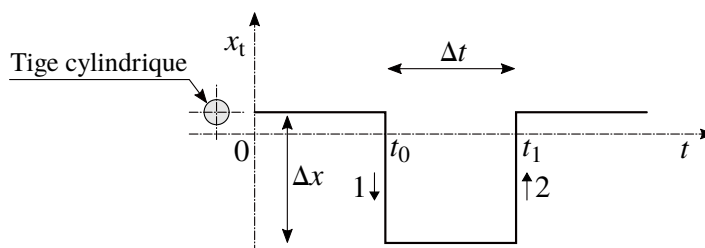


FIGURE 10 – Séquence de déplacement de la tige cylindrique générant la perturbation sur la corde, lors de son défilement.

130

La figure (11) se rapporte à cette expérience. Elle représente une suite de photographies, prises à intervalles de temps réguliers ($\tau = 0,1$ s), juxtaposées de gauche à droite, selon le temps croissant. La première photographie est prise au temps t_1^+ (défini sur la figure (10)). Les tracés en pointillés suivent, chacun, la propagation d'un front d'onde.

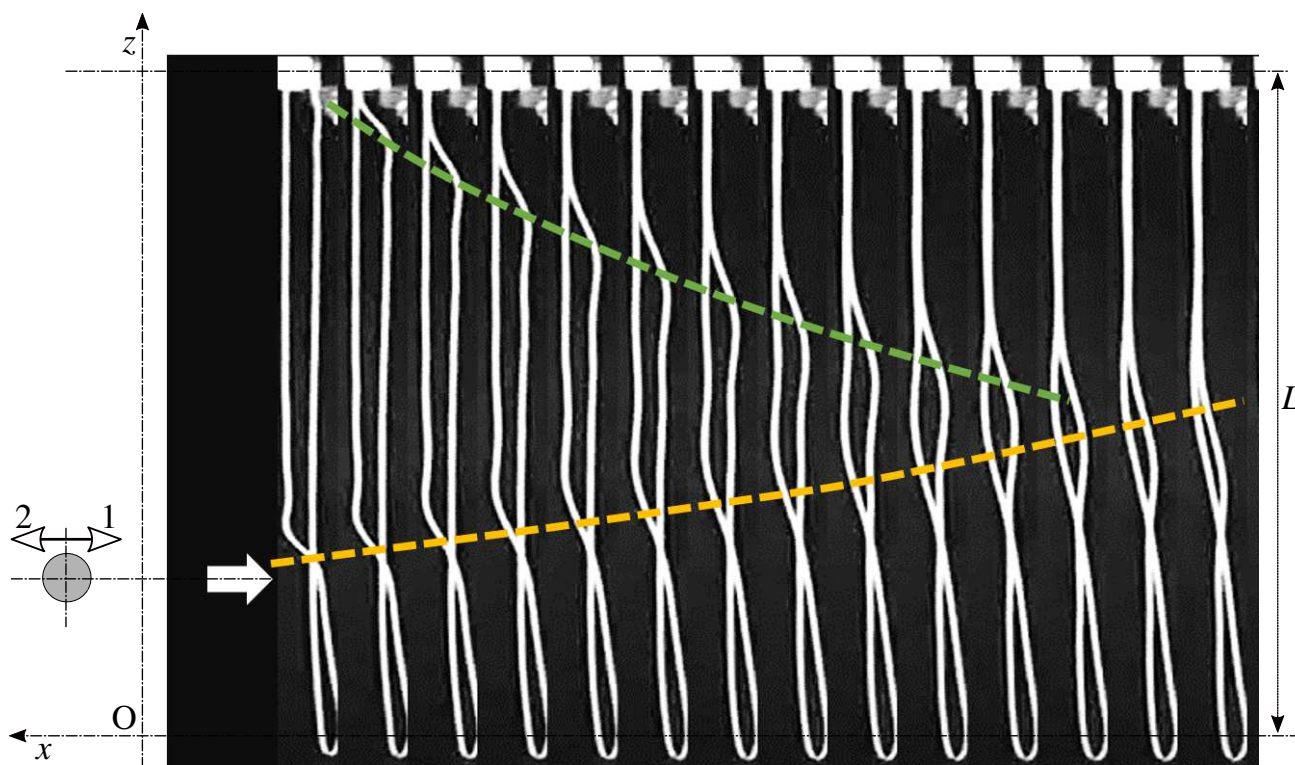


FIGURE 11 – Chronophotographie de la corde en défilement ayant subi une brève perturbation (se reporter à la figure (10)). Cette série de photographies, prises à intervalles de temps réguliers ($\tau = 0,1$ s), permet le suivi spatio-temporel de la déformation de la corde. La perturbation a été créée sur le brin "descendant" (AB), à l'altitude indiquée par la flèche. La première photographie (à gauche) est prise au temps t_1^+ (défini sur la figure (10)). Sur cette photographie, le brin (AB) se situe le plus à gauche, au dessus de la flèche et le plus à droite au dessous. Les tracés en pointillés suivent, chacun, la propagation d'un front d'onde. Ces photographies correspondent au schéma de gauche de la figure (9).

Analyser et interpréter ce résultat expérimental.