Corrigé du DM 11

pour le lundi 22 janvier 2024

⋆ ⋆ ⋆

Métrologie de fréquences optiques

⋆ ⋆ ⋆

Peignes de fréquences optiques

Première partie :

I – Largeur spectrale d'une raie lumineuse

1a – L'atome est supposé isolé : son barycentre est donc immobile dans un référentiel galiléen.
Si on assimile le barycentre du système {noyau + e^-} au centre du noyau, on fait une approximation raisonnable ($m_{noyau} \gg m_{e^-}$) qui permet de considérer que le noyau est fixe.

b – $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$

$E_p = \frac{1}{2} k\, ON^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega_0 t)$
or $k = m\omega_0^2$
$\Big\}$ $E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t)$

ainsi $\mathcal{E} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2 (\sin^2\omega_0 t + \cos^2(\omega_0 t))$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2}$$

2a – $\vec{p} = -e\overrightarrow{ON} = -eA(t)\cos\omega_0 t\, \vec{e_z}$

$\ddot{p}^2 = e^2 A^2(t)\, \omega_0^4 \cos^2\omega_0 t$ $\qquad \langle \ddot{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} e^2 A^2(t)\omega_0^4$

d'où finalement $\boxed{\langle \Phi \rangle(t) = \frac{\mu_0}{12\pi c} e^2 A^2(t) \omega_0^4}$

2b – $\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\langle \Phi \rangle(t)$ traduit le fait que l'énergie de l'oscillateur diminue par rayon^t.

I2b – $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 A^2(t)$

et $\langle \Phi \rangle(t) = \frac{\mu_0}{12\pi c} e^2 \omega_0^4 A^2(t) = \frac{\mu_0}{12\pi c} e^2 \omega_0^4 \frac{2\mathcal{E}(t)}{m\omega_0^2}$

$$\boxed{\langle \Phi \rangle(t) = \frac{\mu_0 e^2 \omega_0^2}{6\pi c m} \mathcal{E}(t)}$$

$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 e^2 \omega_0^2}{6\pi c m} \mathcal{E}(t)$

soit encore $\boxed{\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{\mathcal{E}}{\tau_0} = 0 \quad \text{avec } \tau_0 = \frac{6\pi c m}{\mu_0 e^2 \omega_0^2}}$

$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0) \exp(-t/\tau_0)$

L'énergie de l'oscillateur décroît avec un temps caractéristique τ_0 qui correspond à la durée du train d'onde.

I2c. $E_{émise} = h\nu = \mathcal{E}(0)$ par conservation de l'énergie.
Pour une onde plane progressive $\langle \vec{\Pi} \rangle . \vec{u} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ où E_0 est l'amplitude du champ électrique.
Ainsi si la puissance est émise de façon isotrope,
$\langle \Pi \rangle \times 4\pi r^2 = \langle \Phi \rangle$
d'où $\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times 4\pi r^2 = \frac{\mu_0 \omega_0^2 e^2}{6\pi c m} \mathcal{E}(t)$

$\mathcal{E}(t)$ est maximale pour $t=0$ et vaut alors $\mathcal{E}(0) = h$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_{0\,max} = \left(\frac{h\nu}{3m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\mu_0 e \omega_0}{2\pi r}}$

I2d. $\nu_0 = 9\,192\,631\,770\,Hz$

- $\lambda = \frac{c}{\nu} \simeq$ 3 cm est dans le domaine des ondes hertziennes (radio)

- avec notre modèle $\tau_0 = \frac{6\pi c m}{\mu_0 e^2 (2\pi\nu_0)^2} = 48{,}7\,s$

c'est extrêmement long.

Pour un atome émettant dans le visible (par ex $\lambda_0 = 500\,nm$ soit $\nu_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 6.10^{14}\,Hz$) on aurait

$\tau_0 \simeq 11{,}2\,ns$

et $E_{0\,max} \simeq 4{,}6.10^{-5}\,V.m^{-1}$ à $r = 1$ mètre

3) a. $s(t) = s_0 \exp(-\frac{t}{\tau}) \cos(\omega_0 t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{F}(\omega) \exp(i\omega t)\,d\omega$

or $\exp(-\frac{t}{\tau}) = \frac{\tau}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{1+\tau^2\omega^2}\,d\omega$ pour $t>0$

$$s(t) = s_0 \frac{\tau}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i(\omega+\omega_0)t)}{1+\tau^2\omega^2}\,d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i(\omega-\omega_0)t)}{1+\tau^2\omega^2}\,d\omega\right)$$

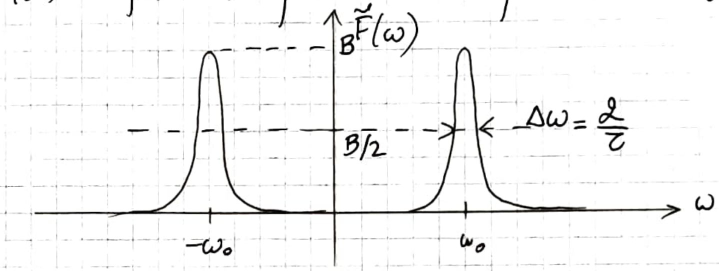
d'où en posant les changts de variable $u = \omega+\omega_0$ et $v = \omega - \omega_0$

$$s(t) = \frac{s_0\tau}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(iut)\,du}{1+\tau^2(u-\omega_0)^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ivt)\,dv}{1+\tau^2(v+\omega_0)^2}\right)$$

on retrouve $\tilde{F}(\omega)$ de l'énoncé en posant :

2 $\boxed{B = \frac{s_0\tau}{2\pi} \quad \text{et } C = \tau^2}$

$\tilde{F}(\omega)$ est paire et présente un pic en ω_0 (et $-\omega_0$)



Pour $\omega = \omega_0$ $\tilde{F} = B(1 + \frac{1}{1+\tau^2 4\omega_0^2}) \simeq B = \frac{s_0\tau}{2\pi}$

13b. $s(t) = B\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+C(\omega-\omega_0)^2} e^{i\omega t}\,d\omega + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+C(\omega+\omega_0)^2} e^{i\omega t}\,d\omega\right)$

le changt de variable $\omega' = -\omega$ dans la deuxième intégrale conduit à :

$$s(t) = B\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+C(\omega-\omega_0)^2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})\,d\omega\right)$$

soit $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cos\omega t\,d\omega$ où

$$F(\omega) = \frac{2B}{1+C(\omega-\omega_0)^2} = \frac{D}{1+C(\omega-\omega_0)^2}$$

avec $D = 2B = \frac{s_0\tau}{\pi}$

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cos\omega t\,d\omega \quad \text{avec } F(\omega) = \frac{s_0\tau/\pi}{1+\tau^2(\omega-\omega_0)^2}}$$

$F(\omega) = \frac{F_{max}}{2}$ pour $(\omega-\omega_0)^2 = \frac{1}{\tau^2}$ soit $\omega - \omega_0 = \pm\frac{1}{\tau}$

$\boxed{\Delta\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\tau} \ll \omega_0}$

La fonction $F(\omega)$ est très étroite, pour $\omega<0$ $F(\omega) \simeq 0$

$\Delta\omega_{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\tau} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi\tau}$

I3c
- Pour la raie étalon de l'atome de Cs $\Delta\nu_{Cs} = \frac{1}{\pi\tau_0} = 6{,}54$
- Pour une raie dans le visible $\Delta\nu_{visible} \simeq 28\,MHz$

  soit $L_{coh} = c\tau_0 \simeq 3\,m$

  c'est une très grande longueur de cohérence, beaucoup plus grande que ce que l'on pourrait mesurer à l'aide d'un interféromètre de Michelson (au mieux quelques centimètres).
- En TP on peut mesurer la longueur de cohérence de la lumière blanche, très faible, $L_c \sim 3\,\mu m$
- pour une raie spectrale d'une lampe à vapeur de mercure, de l'ordre du mm

4. Effet Doppler

4.a. $\varphi(t) = \omega_0 \left(t - \frac{OD}{c}\right)$

on peut définir la pulsation instantanée

1 par $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$

soit ici $\omega(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c}\frac{dOD}{dt}$

2 $\frac{dOD}{dt} = -v\cos\alpha$

$$\left.\begin{matrix} \omega(t) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{c}\frac{dOD}{dt} \\ \frac{dOD}{dt} = -v\cos\alpha \end{matrix}\right\} \boxed{\omega(t) = \omega_0\left(1 + \frac{v\cos\alpha}{c}\right)}$$

4.b. Pour $v_x = \frac{\Delta v_x}{2}$ $\quad \omega^+ = \omega_0\left(1 + \frac{\Delta v_x}{2c}\right)$

$v_x = -\frac{\Delta v_x}{2}$ $\quad \omega^- = \omega_0\left(1 - \frac{\Delta v_x}{2c}\right)$

La largeur spectrale $\Delta\nu$ est alors

2 $\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \times \frac{\Delta v_x}{c}$ $\quad \boxed{\Delta\nu = \nu_0 \frac{\Delta v_x}{c}}$

4.c. • le théorème d'équipartition de l'énergie donne :

$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow u = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$

or $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$

1 $\Rightarrow \sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = u_x = \sqrt{\frac{\langle v^2 \rangle}{3}} = \boxed{\sqrt{\frac{k_B T}{m}} = u_x}$

- Si on estime $\Delta v_x = 2u_x$, on déduit

  $\Delta\nu_{Dop} \simeq 2\nu_0 \frac{u_x}{c} = \frac{2\nu_0}{c}\sqrt{\frac{RT}{M_{Hg}}} \simeq 800\,MHz$

  soit $L_{coh} \sim \frac{c}{\pi\Delta\nu_{Dop}} \sim 12\,cm$

2 C'est beaucoup plus faible que les 3 m obtenus

précédemment pour la largeur intrinsèque de la raie mais c'est encore beaucoup plus grand que la longueur de cohérence que l'on mesure en TP

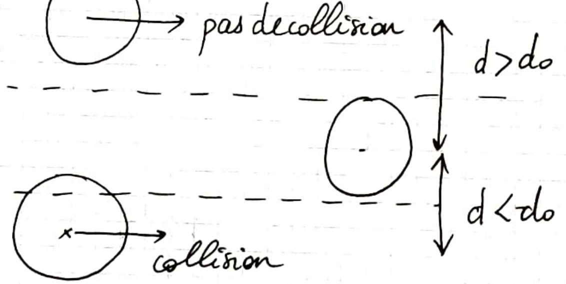
- Pour l'étalon de fréquence à 300K

$$\Delta\nu_{Dop} \simeq 8{,}4\ kHz \qquad (M(^{133}Cs) = 133\ g/mol)$$

Pour ramener la largeur spectrale à 100Hz, il faut refroidir la vapeur à 43mK.
100Hz est encore bien supérieur à la précision avec laquelle est donnée la fréquence étalon : il faut refroidir encore plus !

5_ Interactions entre atomes

L a_



2 Si l'atome incident est dans un cylindre de base $\sigma = \pi d_0^2$, il entre en collision avec l'atome cible. σ est la section efficace de collision.

5b_ Par définition du libre parcours moyen l, un atome subit en moyenne une collision après avoir parcouru la distance l. Il a alors balayé un volume $l\sigma = \frac{1}{n}$

2 ↑ 1 atome cible dans ce volume.

$$\boxed{l \simeq \frac{1}{n\sigma}}$$

5_c_ $\tau_{coll} \simeq \frac{l}{u} \simeq \frac{1}{n\sigma}\sqrt{\frac{m}{3k_BT}} \Rightarrow \tau_{coll} \simeq \frac{k_BT}{\sigma P}\sqrt{\frac{M}{RT3}}$

or $P = nk_BT$

2 $$\boxed{\tau_{coll} \simeq \sqrt{\frac{MRT}{3}}\frac{1}{\sigma N_A P}}$$

$\Delta\nu_{coll} \simeq \frac{1}{\pi\tau_{coll}}$ (avec la m relation que pour la largeur intrinsèque).

5_d_ Pour une lampe à vapeur de mercure haute pression ($P = 3bar$) à $T = 1000K$, on obtient

1 $\Delta\nu_{coll} \simeq 1{,}9\ GHz \qquad L_{coh} \simeq c\tau_{coh} \simeq 5\ cm$

c'est encore un ordre de grandeur au dessus de la valeur expérimentale

L'effet principal de l'élargissement des raies pour la lampe à vapeur de mercure haute pression est celui des chocs, vient ensuite l'effet Doppler mais la largeur intrinsèque est tout à fait négligeable.

Deuxième partie

I Source lumineuse cohérente : le laser

1) a- Le milieu est amplificateur si $\alpha(\omega)>0$

b- Le régime permanent est possible si :

- les pertes sur le miroir M_2 sont compensées par l'amplification dans le milieu sur un aller-retour
$$(1-\varepsilon)\exp(2\alpha L)=1 \quad (C_2)$$

- les conditions aux limites sur les miroirs M_1 et M_2 sont vérifiées
$$\begin{cases} s^+(0,t)=s^-(0,t) \\ s^-(L,t)=(1-\varepsilon)s^+(L,t)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^+=a^- \\ a^-\exp(-\alpha L+ikL)=(1-\varepsilon)a^+\exp(\alpha L-ikL)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(1-\varepsilon)}_{\in\mathbb{R}^+}=\exp(-2\alpha L+2ikL)$$

$$\Rightarrow \text{soit } \boxed{\begin{cases}2kL=2p\pi & p\in\mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ 1-\varepsilon=\exp(-2\alpha L)\end{cases}} \Leftrightarrow \boxed{L=p\frac{\lambda}{2n},\ p\in\mathbb{N}^*} \ (C1)$$
: on retrouve la condition (C2)

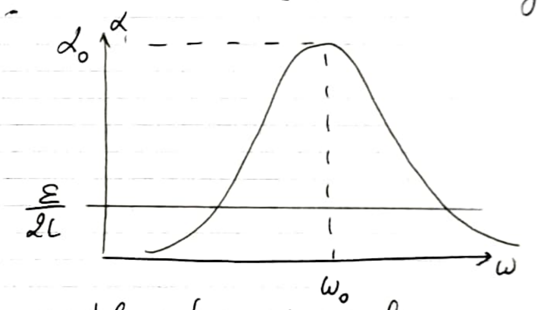
c- La condition (C1) $L=p\frac{\lambda}{2n}$ ne peut être réalisée que pour certaines longueurs d'onde. Si le rayonnement n'est pas monochromatique, ce ne pourra être que pour un ensemble discret de longueurs d'onde données par $\lambda_p=2nL/p$. Pour que (C2) soit également réalisé il faudrait que $\alpha(\omega_p)\times\lambda_p=c^{te}$ soit $\alpha(\omega_p)=K\omega_p$ qui est peu probable. (ce n'est pas le cas évid^t. cf (14)).

- En réalité, la reflexion sur un conducteur réel se fait avec un déphasage, non pris en compte ici → la condition (C1) devient moins stricte et on a alors, une cavité résonante, de facteur de qualité élevé, qui sélectionne les modes donnés par (C1) mais avec une certaine largeur spectrale. (ex corde de Melde) On peut assimiler ce système à un passe-bande très résonnant (circuit RLC).

- De plus il y a des effets non linéaires non pris en compte ici qui, lorsque l'amplitude devient très importante vont entrer en jeu, ainsi dans la suite on transforme (C2) en une inégalité.

1.d- $L2\alpha(\omega)\geq\varepsilon$

$\Rightarrow \alpha\geq\frac{\varepsilon}{2L}$



Les modes possibles doivent vérifier $\alpha\geq\frac{\varepsilon}{2L}$

$$\Rightarrow \alpha_0\exp\left(-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\right)\geq\frac{\varepsilon}{2L}$$

$$\left(\frac{\omega-\omega_0}{\Delta\omega}\right)^2\leq\ln\left(\frac{2L\alpha_0}{\varepsilon}\right)$$

or (C1) impose $n2\frac{\omega_p}{c}L=2p\pi$: $\omega_p=2\pi\frac{c}{2Ln}p$

$$\omega_0-\Delta\omega\sqrt{\ln\left(\frac{2L\alpha_0}{\varepsilon}\right)}\leq 2\pi\frac{c}{2Ln}p\leq\omega_0+\Delta\omega\sqrt{\ln\left(\frac{2L\alpha_0}{\varepsilon}\right)}$$

le nombre de valeurs de p est, à un près

$$\boxed{N = \left\lfloor nL \frac{2\Delta\omega}{\pi c} \sqrt{\ln\left(\frac{2 I_{d_0}}{\varepsilon}\right)} \right\rfloor}$$

<u>AN.</u> pour $nL = 1{,}5\,m$, $\frac{\Delta\omega}{2\pi} = 500\,MHz$, $\varepsilon = 0{,}01$
$\nu_0 = 5.10^{14}\,Hz$
on obtient <u>$N = 11$ modes</u>

2. a. $\delta\nu = \nu_{p+1} - \nu_p = \frac{c}{2nL} = 100\,MHz$
or $\nu_2 - \nu_1 = 80\,MHz$ $\Big\}$ <u>la cavité est monomode</u>.

b. La condition d'accord s'écrit $\nu = p \times \frac{c}{2nL}$
on peut modifier ν en modifiant L.

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\delta nL}{nL}$$

En prenant $\nu = \nu_0 = 5.10^{14}\,Hz$
et $\Delta\nu = 5.10^{6}\,Hz$ $\qquad$ <u>$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 10^{-8}$</u>

$\Rightarrow \frac{\delta nL}{nL} = 10^{-8} \Rightarrow$ <u>$\delta nL \sim 1{,}5.10^{-8}\,m = 15\,nm$</u>

c'est un très très faible déplac^t.
On peut utiliser des matériaux <u>piezoélectiques</u> pour actionner de tels déplacements.

c. $\delta nL = 15\,nm$ (cf question précédente).
Les fluctuations thermiques de la longueur de la cavité doivent être limitées

3) $u(t) = K' \langle I(t) \rangle_{\tau_R}$ $\quad$ où $\quad$ $I(t) = \underline{s}\,\underline{s}^*$

$s_1 = s_0 \cos(\omega_1 t + \varphi_1(t))$ $\qquad$ $\underline{s}_1 = s_0 \exp(j(\omega_1 t + \varphi_1(t)))$
$s_2 = s_0 \cos(\omega_2 t + \varphi_2(t))$ $\qquad$ $\underline{s}_2 = s_0 \exp(j(\omega_2 t + \varphi_2(t)))$

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = s_0 \left[\exp(j(\omega_1 t + \varphi_1)) + \exp(j(\omega_2 t + \varphi_2))\right]$$
$$I = \underline{s}\,\underline{s}^* = 2 s_0 s_0^* \left(1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t + \varphi_1(t) - \varphi_2(t))\right).$$

<u>Détecteur rapide</u> : $\tau_R \sim 1\,ns$

$$(\omega_1 - \omega_2)\tau_R = 2\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau_R = 2\pi \times 100.10^6 \times 10^{-9} = 0{,}1 \times 2\pi$$

le détecteur rapide peut suivre l'évolution de $I(t)$ (10 points par période) et donc voir que le laser est bimode.

$$u = 2u_0\left(1 + \cos(2\pi\,\delta\nu\,t + \varphi_1(t) - \varphi_2(t))\right)$$

à condition que $\varphi_1 - \varphi_2$ varie sur un temps $\gg \tau_R$
Dans cette partie les $\neq$ modes sont supposés parfaitement monochromatiques donc $\varphi_1 - \varphi_2 = c^{te}$.

<u>Détecteur lent</u> : $\tau_R \sim 1\,\mu s$

$u(t) = 2u_0$

4 - Pour N modes, le même calcul va donner

- pour un détecteur lent $\quad u = N u_0$
- pour un détecteur rapide

$$u(t) = u_0 \left(N + 2 \left\langle \sum_{p=p_1}^{p_2} \sum_{q<p} \cos\left((\omega_p - \omega_q)t + \varphi_{pq}\right) \right\rangle_{\tau_R} \right)$$

Pour N grand, certains de ces termes sont de valeur moyenne nulle $\quad (p-q) > 10$
On aura donc ici des fluctuations faibles autour de la valeur moyenne avec une fréquence d'oscillation de $\delta\nu$ (et ses multiples).
Le capteur en faisant la moyenne, réalise une sorte de filtre passe-bas, les hautes fréquences étant gommées par cette opération de moyennage.

5 - a -
$$\begin{cases} p_1 \, \delta\nu = \dfrac{c}{\lambda_1} \\ \delta\nu = \dfrac{c}{2nL} \end{cases} \Rightarrow p_1 = \frac{2nL}{\lambda_1} = 3{,}47 \cdot 10^6$$

2

De même $\quad p_2 = \dfrac{2nL}{\lambda_2} = 3{,}95 \cdot 10^6$

$\underline{N = 1 + p_2 - p_1 = 4{,}8 \cdot 10^5 \text{ modes} \gg 1}$

b - · Lorsque toutes les ondes sont en phase $s = N s_0$
· Ceci se produit à $t=0$ puis aux instants tels que $\forall p \in [\![p_1 ; p_2]\!]$ $\quad p \, \delta\omega t = 2\pi k \quad$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1

$((p+1) - p) \, \delta\omega t = 2\pi q \quad$ avec $q \in \mathbb{N}$

$$t_q = q \frac{2\pi}{\delta\omega} = \boxed{q \times \frac{2nL}{c} = t_q} \quad q \in \mathbb{Z}$$

5.c - $s(t) = G(t) \cos(\omega_0 t)$

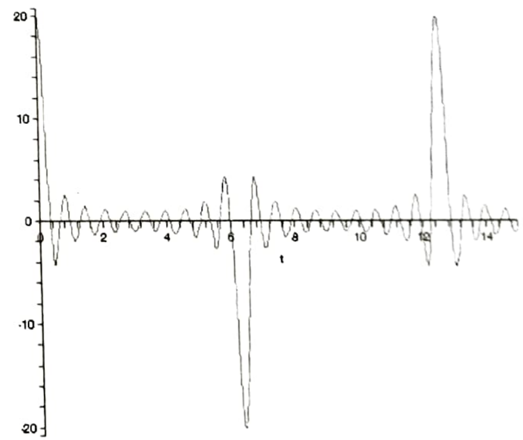
avec $\quad G(t) = s_0 \dfrac{\sin\left(\frac{N \delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)}$ $\quad$ (on reconnait la fonction réseau)

$G(t)$ varie lentement, $\cos\omega_0 t$ varie rapidement

$G_{max} = N s_0 \quad$ pour $\dfrac{\delta\omega t}{2} = q\pi \Rightarrow t_q = q \dfrac{2\pi}{\delta\omega}$

on retrouve bien sûr le résultat de la question précédente.

L'allure de $G(t)$ est la suivante (pour $N = 20$ et $\delta\omega = 1 \text{ s}^{-1}$) :



$G(t)$ s'annule la première fois pour

$$\frac{N\delta\omega}{2} t = \pi \qquad t = \frac{2\pi}{N\delta\omega}$$

$$\Delta t = 2 \times \frac{2\pi}{N\delta\omega} = \frac{2}{N} \times \frac{2nL}{c}$$

$$\Delta t = \frac{4nL}{Nc}$$

A.N. $\Delta t = 4{,}2 \cdot 10^{-14}\,s = 42\,fs$

fréquence de répétition $\frac{1}{t_{q+1} - t_q} = \frac{c}{2nL} = 100\,MHz = \nu_{imp}$

le nombre de périodes dans une impulsion est

$$n_{périodes} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{2 \times 2\pi}{N\delta\omega} \times \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2}{N}\frac{\omega_0}{\delta\omega} = \frac{p_1+p_2}{N} = 7{,}7$$

Il n'y a que quelques périodes par impulsion.

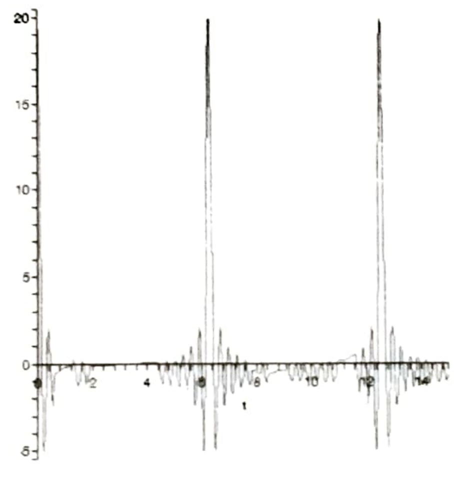
On a ainsi des impulsions ultracourtes (42 fs)

qui se répètent toutes les $10^{-8}\,s = 10\,ns$

Ce n'est par contre plus monochromatique du tout

$765 < \lambda < 865$ nm)

et celle de $s(t)$ lui ressemble, en plus tourmentée (et les pics étant « redressés »)[1]:



Troisième partie

III Métrologie des fréquences optiques

1) . Spectroscope à prime, à réseau

. mesure de λ avec un interféromètre de Michelson

2) Comme dans la partie précédente, le détecteur n'est capable de voir les variations d'intensité dues à la différence des fréquences que si

$$|2\pi(\nu_1 - \nu_2)\tau_R| \ll 2\pi$$

$$\boxed{|\nu_1 - \nu_2| \ll \frac{1}{\tau_R}}$$

3) $\tau_R = 1\,ns$

Les impulsions ultracourtes arrivent toutes les 10 ns : le détecteur est donc assez rapide pour résoudre temporellement ces impulsions.

On reprend la condition vue précédt :

$$\nu_{imp} = \frac{c}{2nL}$$

$$\frac{\delta\nu_{imp}}{\nu_{imp}} = \frac{\delta nL}{nL}$$

ici $\frac{\delta\nu_{imp}}{\nu_{imp}} = \frac{1}{10^8} = 10^{-8}$

On doit donc maintenir nL constant à $10^{-8} nL$ près

$10^{-8} \times 1{,}5 = 1{,}5 \cdot 10^{-8}\,m = 15\,nm$

Il faut une belle boucle de rétroaction !

b. $\nu = (385\,285\,140 \pm 40)$ MHz

et $\nu_{imp} = 100$ MHz

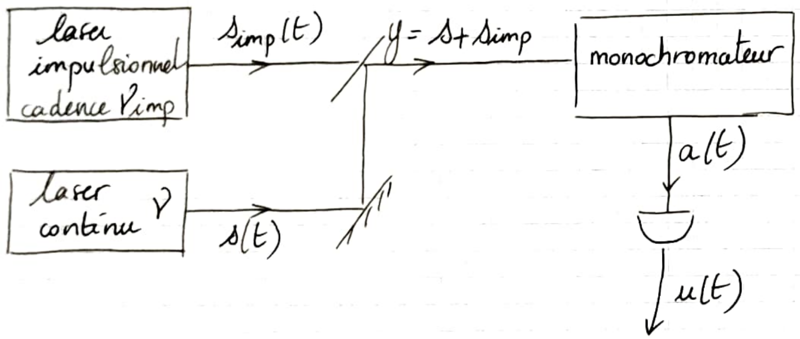
$\nu = 385\,2851\,\nu_{imp} + 0{,}40\,\nu_{imp} \pm 0{,}40\,\nu_{imp}$

$\nu_{max} = 3\,852\,851\,\nu_{imp} + 0{,}8\,\nu_{imp} = (3852\,852 - 0{,}2)\nu_{imp}$

$\nu_{min} = 3\,852\,851\,\nu_{imp}$

Les 2 entiers qui conviennent sont donc

$\boxed{p_0 = 385\,2851 \text{ et } p_0 + 1}$

c. 

Sur le principe, l'idée est la même que pour la numérisation d'un signal analogique. Le laser impulsionnel fournit des impulsions, séparées de $T_{imp} = \frac{1}{\nu_{imp}} = 10$ ns : c'est l'équivalent de la période d'échantillonage.
La multiplication des deux signaux se fait ici dans le photodétecteur qui donne un signal $\propto \langle (s + s_{imp})^2 \rangle_{\tau_R}$

$s_{imp}(t) = s_0 \sum_{p=p_1}^{p_2} \cos(p\,\delta\omega t) \Rightarrow \underline{s}_{imp} = s_0 \sum_{p_1}^{p_2} \exp(jp\delta\omega t)$

$s(t) = s_1 \cos((p_0+\eta)\,\delta\omega t + \varphi) \Rightarrow \underline{s} = \underline{s}_1 \exp(j(p_0+\eta)\delta\omega t)$

où $\underline{s}_1 = s_1 \exp j\varphi$

$\underline{s} + \underline{s}_{imp} = s_0 \sum_{p_1}^{p_2} \exp(j\delta\omega t p) + \underline{s}_1 \exp(j(p_0+\eta)\delta\omega t)$

* Le monochromateur ne laisse passer que :
- $s_0 \exp(j p_0 \delta\omega t)$ du signal du laser impulsionnel
- $\underline{s}_1 \exp(j(p_0+\eta)\delta\omega t)$ du laser continu

$I(t) = |s_0 \exp(jp_0\delta\omega t) + \underline{s}_1 \exp(j(p_0+\eta)\delta\omega t)|^2$

$= s_0^2 + |s_1|^2 + 2 s_0 s_1 \cos(\eta\delta\omega t + \varphi)$

$I(t)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\eta\,\delta\omega}$

$T = \frac{1}{\eta\,\nu_{imp}} = \frac{T_{imp}}{\eta} \gg \tau_R$

$\Rightarrow$ $\boxed{u(t) \text{ est un signal périodique de période } T = \frac{1}{\eta\nu_{imp}}, \text{ soit de fréquence } \eta\nu_{imp}}$

La mesure de T donne η.

Rque : $u(t) = K' \langle I(t) \rangle_{\tau_R} = K' I(t)$

* Le monochromateur laisse passer d'autres composantes spectrales de s_{imp}

$\underline{a}(t) = \underline{s}_1 \exp(j(p_0+\eta)\delta\omega t) + s_0 \sum_{q=-\ell}^{\ell} \exp(j(p_0+q)\delta\omega t)$

$$I(t) = a\,a^* = |s_1|^2 + (2\ell+1)\,s_0^2 + 2 s_0 s_1 \sum_{q=-\ell}^{\ell} \cos((\eta+q)\,\delta\omega t)$$

$$I(t) = s_1^2 + (2\ell+1)s_0^2 + 2s_0 s_1 \cos(\eta\,\delta\omega t + \varphi) + 2 s_0 s_1 \times \sum_{\substack{q=-\ell \\ q\neq 0}}^{\ell} \cos((\eta+q)\delta\omega t + \varphi)$$

période $T = \frac{T_{imp}}{\eta}$

Les derniers termes ont des périodes

$$\begin{cases} T_q = \dfrac{T_{imp}}{\eta+q} & \text{pour } q>0 \\ T_{-q} = \dfrac{T_{imp}}{q-\eta} \end{cases}$$

$u(t) = K' \langle I(t) \rangle_{\tau_R}$: les composantes de $I(t)$ pour lesquelles $T_q < \tau_R$ sont moyennées, les autres sont partiellement moyennées seul^t. (cf (II.4)) Le photodétecteur réalise un filtrage passe-bas. et $\tau_R = 1\,ns = \frac{T_{imp}}{10}$

Le signal $u(t)$ contient ainsi les composantes spectrales de fréquences:

- nulle $\quad K'(s_1^2 + (2\ell+1)s_0^2)$
- $|\eta|\nu_{imp} \quad K' 2 s_0 s_1 \cos(\eta\,\delta\omega t + \varphi)$
- $(1-\eta)\,\nu_{imp} \quad \sim K' 2 s_0 s_1 \cos((1-\eta)\,\delta\omega t + \varphi)$
- $(1+\eta)\,\nu_{imp}$
- $(2-\eta)\,\nu_{imp}$
- $(2+\eta)\,\nu_{imp}$

$(10-\eta)\,\nu_{imp}$
$(10+\eta)\,\nu_{imp}$ d'amplitude beaucoup + faible

$|\eta| < \frac{1}{2}$ c'est le signal de plus faible fréquence qui est celui qui nous intéresse.

Une <u>analyse spectrale</u> du signal $u(t)$ nous permet d'obtenir η.

d. <u>A.N.</u> :

$$\begin{cases} (30 \pm 1)\,MHz = |\eta|\nu_{imp} = \nu_1 \\ (70\pm 1)\,MHz = (1-|\eta|)\,\nu_{imp} = \nu_2 \end{cases} \Rightarrow \eta = (0{,}30 \pm 0{,}01) \text{ ou } \eta = -0{,}30 \pm 0{,}01$$

Or la mesure précédente a donné

$\nu > 3\,852\,851\ \nu_{imp}$
$\nu < 3\,852\,851{,}8\ \nu_{imp}$

donc les deux fréquences possibles sont

$\nu^- = (3\,852\,851 + 0{,}3 \pm 0{,}01)\ \nu_{imp}$
et $\nu^+ = (3\,852\,852 - 0{,}3 \pm 0{,}01)\ \nu_{imp}$

que l'on peut aussi écrire

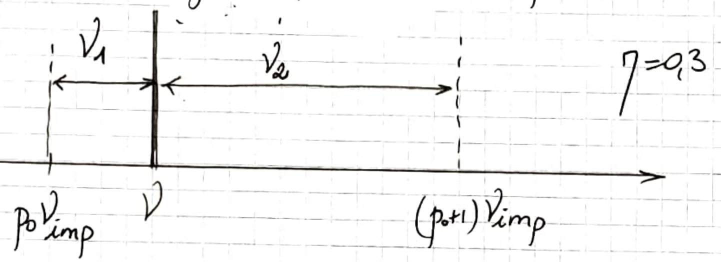
$\nu^- = (p_0 + 0{,}3 \pm 0{,}01)\ \nu_{imp}$
$\nu^+ = (p_0 + 0{,}7 \pm 0{,}01)\ \nu_{imp}$

Si le monochromateur a été réglé pour laisser passer ce qui est autour de p_0, ceci revient à dire qu'on cherche $\nu = (p_0 + \eta)\,\nu_{imp}$ avec $0 < \eta < 0{,}8$

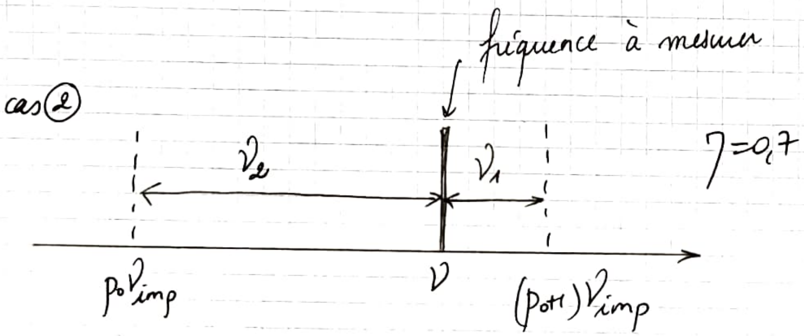
On a maintenant une ambiguité entre $\eta = 0{,}3$ et $\eta = 0{,}7$

soit entre les deux "dents" du peigne soit à $0{,}3\,\nu_{imp}$ de la dent de gauche, soit à $0{,}3\,\nu_{imp}$ de celle de droite.

cas ①

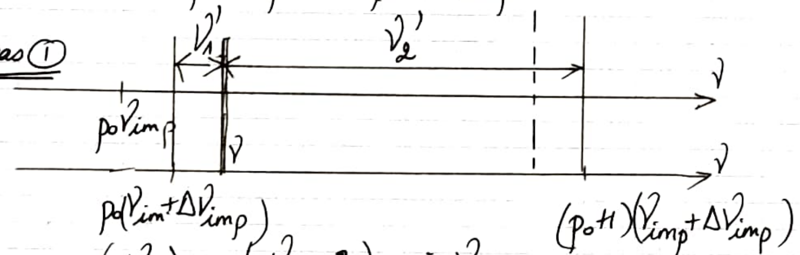


cas ②



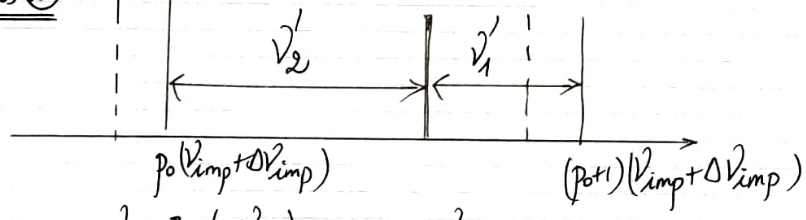
si ν_{imp} augmente <u>très légèrement</u>, ν reste entre $p_0\nu_{imp}$ et $(p_0+1)\,\nu_{imp}$

<u>cas ①</u>



<u>$(\nu_1 \searrow$ et $\nu_2 \nearrow)$ si $\nu_{imp} \nearrow$</u>

<u>cas ②</u>



<u>$\nu_1 \nearrow$ et $\nu_2 \searrow$ si $\nu_{imp} \nearrow$</u>

On conclut que, comme ici $\nu_1 \searrow$ et $\nu_2 \nearrow$ on est dans le cas ① ie $\eta=0{,}3$

et finalement

$$\nu = (3\,852\,851{,}3 \pm 0{,}01)\times 100\ \text{MHz}$$

$$\boxed{\nu = (385\,285\,130 \pm 1)\ \text{MHz}}$$

On est passé d'une incertitude de 40 MHz à 1 MHz, on a donc gagné un facteur 40 en précision.

Magnifique !