

# DS 5

*Le samedi 13 janvier 2024*

*durée 4h*

\*\*\*

**Problème 1 : Arc en ciel (X MP 2008 (extrait))**

\*\*\*



\*\*\*

**Problème 2 : Ondes gravitationnelles (X/ENS PC 2018)**

\*\*\*

L'utilisation des calculatrices est autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

### Gouttes d'eau et arcs-en-ciel

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes que l'on pourra traiter dans l'ordre de son choix. La première partie concerne successivement quelques aspects de la dynamique de gouttes d'eau dans l'atmosphère et une étude de la forme de ces gouttes. La seconde partie concerne des phénomènes optiques associés à la formation d'arcs-en-ciel. On considèrera successivement l'optique géométrique puis l'optique interférentielle et diffractive.

- Dans tout le problème, *exprimer* signifie établir l'expression littérale et *calculer* signifie donner la valeur numérique.
- Dans tout le problème, on note  $a$  la norme du vecteur  $\vec{a}$ .

#### Partie I Gouttes et bulles

##### I.1. Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère

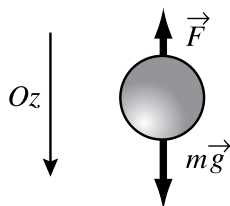


Figure 1 - Forces sur une goutte en chute verticale.

►1 Une goutte d'eau sphérique de rayon  $a$ , indéformable et de masse volumique uniforme  $\rho$  tombe dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g}$  suivant un axe vertical  $Oz$  dirigé vers le bas (figure 1). L'atmosphère exerce sur la goutte la force  $\vec{F}$ , dite de traînée, opposée à la vitesse  $\vec{v}$  et qui s'exprime par la relation  $\vec{F} = -6\pi\eta\frac{a\vec{v}}{1 + \ell/a}$ , où  $\eta$  et  $\ell$  sont des constantes positives. Exprimer, à partir de l'équation du mouvement de la goutte, la vitesse limite de chute de cette dernière, que l'on notera  $\vec{V}_{\text{lim}}$ .

►2 On donne  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\rho = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\ell = 0,07 \mu\text{m}$  et  $\eta = 1,7 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^2$ . Calculer  $V_{\text{lim}}$  pour  $a = a_1 = 0,01 \text{ mm}$  puis pour  $a = a_2 = 0,1 \text{ mm}$ .

►3 L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km. En utilisant les deux résultats numériques de la question 2, évaluer le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs  $a_1$  et  $a_2$ .

►4 Quel serait le temps de transit dans l'atmosphère de bulles (et non plus de gouttes) de rayon  $a_2 = 0,1 \text{ mm}$  et d'épaisseur  $e = 0,1 a_2$  ?

## I.2. Chute d'une goutte

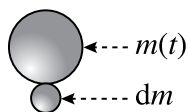


Figure 2 - Accrétion d'une goutte.

Un autre modèle pose que la goutte à laquelle on s'intéresse traverse un nuage de gouttes immobiles, qui s'agrègent à la goutte en chute et qui accroissent sa masse d'autant (accrétion). On ignore alors la force de traînée, mais on admet que le taux d'accroissement de la masse de la goutte est proportionnel à sa vitesse de chute, soit :  $\frac{1}{m(t)} \frac{dm}{dt} = \lambda v(t)$ , où  $\lambda$  est une constante positive ; on appliquera ici le principe fondamental de la dynamique pour un système de masse variable :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[m(t)\vec{v}(t)] .$$

►5 Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $v(t)$ . La résoudre et exprimer  $v(t)$  pour une goutte tombant initialement du haut de l'atmosphère, où sa vitesse est nulle.

►6 Quel est le temps caractéristique, noté  $\tau_v$ , d'évolution de la vitesse ? Quelle est la vitesse limite de chute ?

►7 Avec  $\lambda = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ , calculer  $\tau_v$  et la vitesse limite de chute. Quelle remarque critique sur ce modèle ce résultat numérique vous suggère-t-il ? Pour quel rayon de goutte y a-t-il égalité de cette vitesse limite avec celle que donne l'expression obtenue à la question 1 ?

## I.3. Forme des gouttes

Le travail élémentaire mis en jeu lors d'une évolution infinitésimale réversible au terme de laquelle l'aire  $A$  de la goutte a augmenté de  $dA$  est  $\delta W = \gamma dA$  ; la constante positive  $\gamma$  est nommée *constante de tension superficielle*. La tension superficielle tend à diminuer l'aire de la goutte et à lui faire adopter une forme sphérique. On admet que, dans un champ de pesanteur d'intensité  $g$ , une taille caractéristique de la goutte, dite *longueur capillaire* et notée  $L_c$ , ne dépend que de  $g, \gamma$  et de la masse volumique  $\rho$ .

►8 Utiliser un argument dimensionnel pour exprimer  $L_c$  ; les grandeurs  $g$  et  $\rho$  ayant les valeurs données à la question 2, calculer  $L_c$  pour  $\gamma = 0,007 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$ .

Une goutte sphérique de rayon  $a$  d'un fluide, immergée dans un autre fluide, ne peut donc être en équilibre que si la pression à l'intérieur de la goutte,  $p_{\text{int}}$ , est supérieure à la pression extérieure,  $p_{\text{ext}}$ . L'écart  $\Delta p_c = p_{\text{int}} - p_{\text{ext}}$  est donné par la relation :  $\Delta p_c = 2\frac{\gamma}{a}$ .

►9 Exprimer  $\Delta p_h$ , différence de pression hydrostatique entre le point haut et le point bas de la goutte, située dans le vide et soumise à un champ de pesanteur d'intensité  $g$ . Exprimer le *nombre de Bond*  $B = \frac{\Delta p_h}{\Delta p_c}$  et vérifier la relation  $B = \left(\frac{a}{L_c}\right)^2$ , où  $L_c$  est la longueur capillaire que l'on a exprimée à la question 8.

►10 Pour quelles valeurs par rapport à 1 du nombre de Bond la goutte tend-elle à être parfaitement sphérique ?

## Partie II

### Arcs-en-ciel

L'arc-en-ciel est constitué d'une série d'arcs lumineux, dont le centre est situé sur le prolongement de la ligne qui va du Soleil à l'œil de l'observateur, l'un et l'autre étant donc considérés ici comme ponctuels. Ce phénomène est principalement dû à la réfraction de la lumière solaire dans les gouttes d'eau.

Le rayon des gouttes d'eau dans l'atmosphère va de 0,1 mm à 2,5 mm, avec une moyenne de 0,5 mm. Le rayon des gouttelettes dans un nuage ou dans la brume est d'environ 0,01 mm. Toutes ces gouttes peuvent produire des arcs-en-ciel, mais seules les plus grosses d'entre elles donneront un phénomène aux couleurs vives. En-dessous d'une taille de 0,2 mm, la partie rouge de l'arc disparaît. Les gouttes très petites produisent des phénomènes de diffraction importants dont les effets se combinent à ceux de la réfraction.

On observe souvent deux arcs : l'*arc intérieur* ou *principal* est celui dont les couleurs sont les plus vives et les plus pures ; le violet apparaît sur la frange interne, le rouge à l'extérieur. Dans l'*arc extérieur* ou *secondaire* les couleurs sont disposées en ordre inverse. Plusieurs théories coexistent et expliquent les différents phénomènes observés lors d'un arc-en-ciel et nous en considérerons deux :

- la théorie « classique » de Descartes, Newton et de Young qui s'applique pour les grosses gouttes d'eau,
- celle de Airy, datant de 1838, pour des gouttes dont le diamètre est supérieur à 0,1 millimètre.

Pour une composante monochromatique de l'éclairement, de longueur d'onde  $\lambda$ , on note  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ . L'indice de l'eau est noté  $n$ , l'indice de l'air vaut 1. On ne tiendra pas compte des diverses pertes et atténuations qui se produisent aux interfaces et pendant la propagation.

#### II.1. Optique géométrique : l'arc-en-ciel de Descartes

##### *L'arc-en-ciel primaire*

Le plan de la figure 3 est déterminé par les trois points Soleil, centre de la goutte et œil de l'observateur. Avec les notations de la figure, des considérations géométriques élémentaires conduisent à la relation que l'on admettra

$$\theta = (i - r) + (\pi - 2r) + (i - r) = \pi + 2i - 4r , \quad (1)$$

où  $i$  et  $r$  sont liés par la loi de Descartes  $\sin i = n \sin r$ .

►11 Montrer qu'il existe un angle de déviation extrême, noté  $\theta_1^c$  et nommé *angle critique*, donné par

$$\theta_1^c = \pi + 2 \arccos \left( \sqrt{\frac{1}{3}(n^2 - 1)} \right) - 4 \arccos \left( \frac{2}{n} \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \right) . \quad (2)$$

Justifier qualitativement qu'il y a accumulation de lumière pour cet angle.

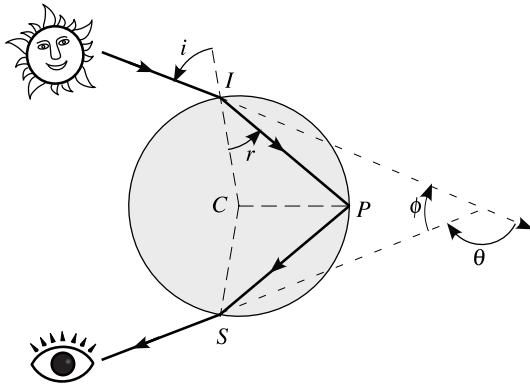


Figure 3 - Géométrie et notations pour l'arc-en-ciel primaire.

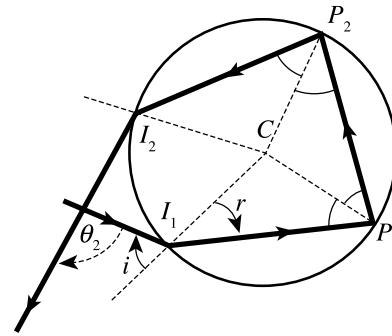


Figure 4 - Rayon subissant deux réflexions internes.

►12 Calculer l'angle  $\phi_1^c = \pi - \theta_1^c$  (figure 3) pour  $n = 1,331$  correspondant à  $\lambda = 700$  nm.

►13 Pour le spectre visible allant du rouge au bleu, l'indice varie de façon monotone entre les valeurs 1,331 et 1,346; calculer la largeur angulaire de l'arc-en-ciel. Cette variation d'indice explique-t-elle que le bleu est à l'intérieur et le rouge à l'extérieur de l'arc? Faire un schéma explicatif du phénomène observé.

#### Les arcs-en-ciel secondaires

En réalité, un rayon incident subit plusieurs réflexions internes; la figure 4 illustre le cas de deux réflexions. On admettra les deux résultats suivants :

i) l'angle d'émergence de l'arc d'ordre  $k$ , correspondant à  $k$  réflexions internes, est

$$\theta_k = k\pi + 2i - 2(k+1)r,$$

ii) l'angle de déviation critique (déviations stationnaire)  $\theta_k^c$  correspondant au rayon critique d'ordre  $k$  est donné par

$$\theta_k^c = k\pi + 2\arccos\sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}} - 2(k+1)\arccos\left[\frac{k+1}{n}\sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}}\right].$$

►14 Justifier que l'arc primaire et l'arc secondaire ( $k = 2$ ) ne se recouvrent pas (la région entre les deux arcs s'appelle la *bande sombre d'Alexandre*). Quel est l'ordre des couleurs dans l'arc secondaire? Cet arc est-il situé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc primaire?

►15 En quoi les dispersions spatiales des longueurs d'onde par un prisme et par une goutte sont-elles différentes? Pourquoi n'observe-t-on jamais l'arc-en-ciel tertiaire?

\*\*\*

## *Pb2 : Ondes gravitationnelles*

\*\*\*

*L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée. Les applications numériques, auxquelles vous prêterez la plus grande attention, seront données avec un seul chiffre significatif.*

La première observation expérimentale des ondes gravitationnelles, en 2016, est une découverte majeure de la physique du 21<sup>e</sup> siècle. Les ondes observées sont produites à l'extérieur de notre galaxie lorsque deux astres massifs, initialement en rotation l'un par rapport à l'autre, se rapprochent et fusionnent en un seul. Ce problème étudie quelques aspects de ces événements et de leur détection.

### **Données numériques**

$$\begin{array}{l} \text{Constante gravitationnelle :} \quad G = 7 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2} \\ \text{Vitesse de la lumière dans le vide :} \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1} \end{array}$$

1. Deux astres de masse  $M$  sont en mouvement circulaire l'un par rapport à l'autre, leur centre de masse étant fixe. Déterminez l'expression de la fréquence de rotation en fonction de leur distance relative  $d$ .

2. Dans le cadre de la mécanique newtonienne, le champ gravitationnel créé par ces deux astres en un point donné de l'espace à un temps  $t$  est déterminé par les positions des masses au même temps  $t$ . En réalité, cependant, l'information sur ces positions ne se transmet pas instantanément. Elle est transmise par une onde qui se propage dans le vide à vitesse finie, et qu'on appelle onde gravitationnelle. Proposez une analogie dans un autre domaine de la physique.

3. Expliquez pourquoi la fréquence de l'onde gravitationnelle émise par le système des deux astres de la question 1, observée en un point fixe quelconque de l'espace, est double de leur fréquence de rotation.

4. Les détecteurs d'ondes gravitationnelles sont des interféromètres de Michelson dont les bras mesurent plusieurs kilomètres. L'onde gravitationnelle, lors de son passage, modifie la taille des objets sur son passage d'une petite fraction, proportionnelle à son amplitude, et qui dépend aussi de l'orientation de ces objets. Ainsi, les longueurs des bras de l'interféromètre sont en général modifiées différemment, et on mesure la légère variation de la différence de longueur entre les bras lors du passage de l'onde. Rappelez le principe et le schéma de l'interféromètre de Michelson. Quel est l'ordre de grandeur de la variation de longueur qu'il permet de mesurer ? Pourquoi a-t-on intérêt à construire un instrument aussi grand que possible ?

5. Les ondes gravitationnelles transportent de l'énergie, donc le système des deux astres perd de l'énergie mécanique en émettant ces ondes. Qu'en déduisez-vous qualitativement sur l'évolution de la distance  $d$  au cours du temps ? Vous justifierez précisément votre réponse.

6. On admet que la fréquence  $f(t)$  des ondes gravitationnelles émises évolue au cours du temps suivant la loi

$$\frac{df}{dt} = K f^{11/3}, \quad (1)$$

où  $K$  est une constante indépendante du temps. Quel est son signe ? Intégrez l'équation différentielle. Représentez la variation de  $f(t)$ .

7. Décrivez qualitativement l'évolution du système formé par les deux astres.

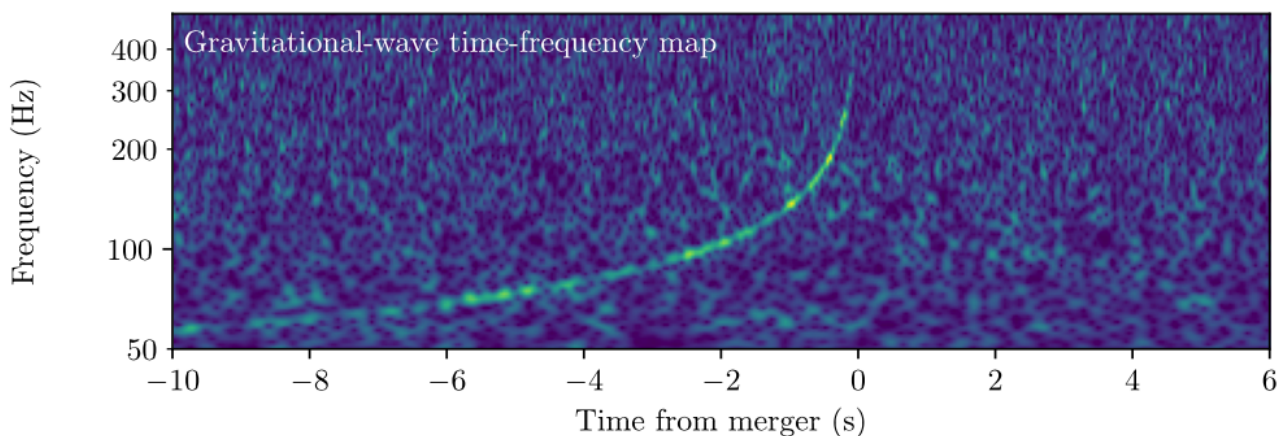


FIGURE 1 – Variation de la fréquence (*Frequency* en anglais) des ondes gravitationnelles détectées en fonction du temps (*Time*) lors de la fusion de deux étoiles à neutrons, observée le 12 août 2017. L'instant où se produit la fusion (*merger*) est pris comme origine des temps sur l'axe des abscisses. [Extrait de B. P. Abbott *et al.*, *Astrophysical Journal*, volume 828, L13 (2017).]

8. La figure 1 représente la variation de  $f(t)$  mesurée dans un détecteur d'ondes gravitationnelles. Ce signal est interprété comme provenant de la fusion de deux étoiles à neutrons de masses approximativement identiques. Vérifiez aussi précisément que possible, en relevant des valeurs

numériques sur la figure, que cette variation est compatible avec le résultat de la question 6. Vous utiliserez avec profit le fait que l'échelle de l'axe des ordonnées est logarithmique.

9. On admet que la constante  $K$  de l'équation (1) ne dépend que de  $M$ ,  $G$  et  $c$ . Déduisez-en, par analyse dimensionnelle, la forme de cette dépendance.

10. Déduisez, en analysant les données de la figure 1, un ordre de grandeur grossier de  $M$ . Vous détaillerez votre démarche. Que pensez-vous du résultat ?

11. En analysant l'amplitude du signal, on estime que l'événement s'est produit à environ  $10^8$  années-lumière de la Terre. Deux secondes après la fin du signal des ondes gravitationnelles, repérée par le temps  $t = 0$  sur la figure 1, on a observé un rayonnement électromagnétique provenant du même endroit, qu'on pense produit lors de la fusion des deux étoiles à neutrons. Si ce retard de deux secondes était dû à une différence entre la vitesse de propagation des ondes gravitationnelles  $v_g$  et la vitesse de la lumière  $c$ , quelle serait leur différence relative ? On rappelle que 1 année  $\simeq 3 \times 10^7$  s. Commentez le résultat.

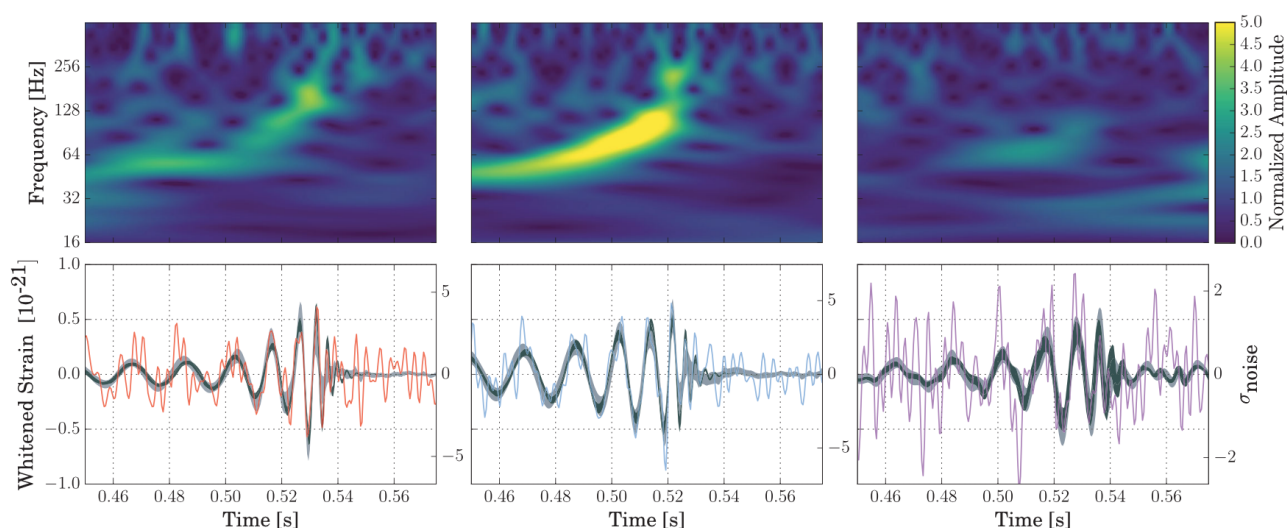


FIGURE 2 – De gauche à droite : ondes gravitationnelles enregistrées par les détecteurs H1 (à gauche), L1 (au centre) et Virgo (à droite) le 14 août 2017. En bas : variation de l'amplitude de l'onde gravitationnelle en fonction du temps. Les traits fins représentent le signal mesuré, qui est bruité, et les bandes grises représentent la contribution estimée de la source astrophysique. En haut : fréquence de l'onde en fonction du temps. [Extrait de B. P. Abbott *et al.*, Physical Review Letters, volume 119, 141101 (2017).]

12. La figure 2 représente la fréquence et l'amplitude d'un autre signal d'onde gravitationnelle observé simultanément par trois détecteurs, nommés H1, L1 et Virgo. Vérifiez sur l'exemple du détecteur L1 que les valeurs de la fréquence (en haut) correspondent aux données de l'amplitude représentée sur le panneau du bas.

13. Les détecteurs H1 et L1 sont distants de 3000 km. Montrez que le léger décalage temporel entre les signaux correspondants (à gauche et au centre de la figure 2) donne une information quantitative sur la direction de la source des ondes gravitationnelles. Vous illustrerez votre raisonnement par un schéma où vous représenterez les positions de H1 et L1, et la direction de la source.

14. Expliquez pourquoi deux détecteurs ne suffisent pas en général à localiser la direction de la source dans le ciel. Quelle information apporte un troisième détecteur ? Peut-on alors préciser la direction de la source sans ambiguïté ?



**15.** Justifiez qu'on puisse attribuer le signal observé sur la figure 2 à la fusion d'un système de deux astres, comme pour la figure 1.

**16.** En supposant comme précédemment les masses des deux astres identiques, estimez à partir des données l'ordre de grandeur du rapport entre les masses des systèmes binaires de la figure 2 et de la figure 1.

**17.** L'écriture de l'équation (1) suppose que le signal soit quasi-périodique, soit encore que sa fréquence  $f$  varie lentement avec le temps. Pour lequel des deux systèmes étudiés cette approximation est-elle meilleure? Commentez l'aspect des panneaux du haut de la figure 2 à la lueur de cette discussion.

**18.** Écrivez à quelle condition, portant sur  $df/dt$ , le signal peut être considéré comme quasi-périodique.

**19.** Montrez que cette condition peut se récrire comme une condition portant sur la vitesse  $v$  des astres en rotation. Commentez le résultat.

\* \*  
\*