Corrigé du DM 10

pour le lundi 15 janvier 2024

⋆ ⋆ ⋆

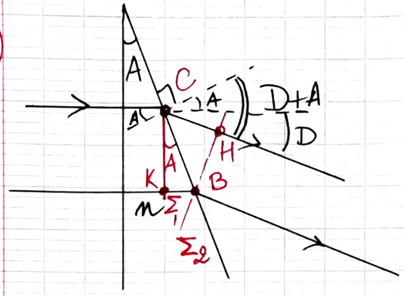
Faisceaux de Bessel

⋆ ⋆ ⋆

①

Faisceaux de Bessel

1)



$n \sin A = \sin(D+A)$ selon les lois de Descartes de la réfraction

2) On considère les surfaces d'onde Σ_1 et Σ_2.

$(CH) = (KB)$

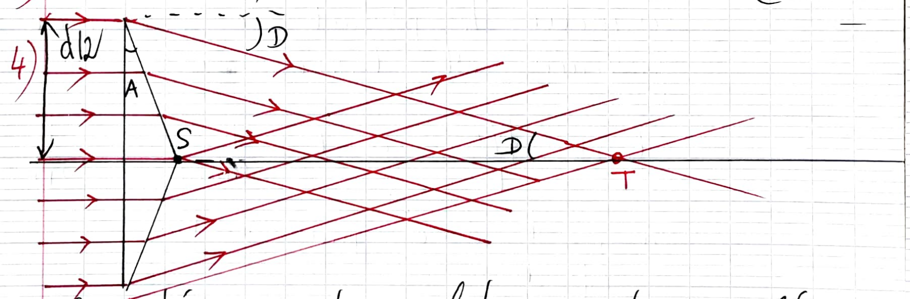
avec $(KB) = n\,KB = n\;CB \sin A$

$(CH) = CH = CB \cos\left(\frac{\pi}{2} - A - D\right) = CB \sin(A+D)$

On retrouve effectivement $\boxed{n \sin A = \sin(A+D)}$

3) Pour $A \ll 1$, $D \ll 1$ et $nA = A + D$ $\quad D \simeq (n-1)A$

4)



Le système est de révolution autour de l'axe.

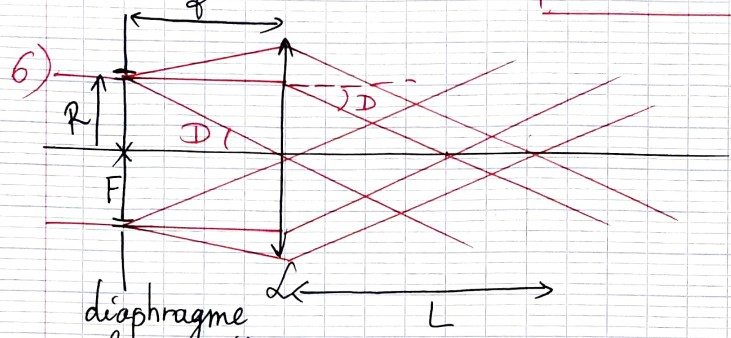
Tous les rayons sont déviés de D.

5) $L = ST = \frac{d}{2} \text{cotan} D - \frac{d}{2} \tan A$

②

Si $A \ll 1$ $\quad L \simeq \frac{d}{2} \times \frac{1}{D}$ $\quad \boxed{L \simeq \frac{d}{2(n-1)A}}$

6)



diaphragme en forme d'anneau, de rayon R, dans le plan focal objet de $\mathcal{L}$.

Tous les rayons issus d'un point du plan focal objet ressortent // entre eux.

$\tan D = \frac{R}{f}$

Avec ce dispositif, la longueur L sur laquelle se produit le croisement des faisceaux est donnée par :

$\tan D = \frac{\phi/2}{L}$ ie $L = \frac{\phi}{2 \tan D} \simeq \frac{\phi}{2D}$

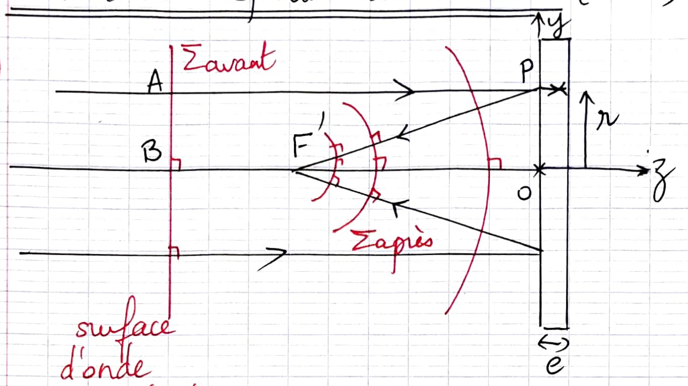
On prend donc pour $D \ll 1$

$\begin{cases} \phi = d \\ R = f(n-1)A \end{cases}$

③

Modulateur spatial de lumière (MSL)

7)



- Onde incidente = onde plane : Σ: plan // (Oxy)
- Onde réfléchie : tous les rayons convergent en un point F', les surfaces d'onde sont ⊥ aux rayons : ce sont des sphères de centre F'.

8) Le système est de révolution / (Oz) ⇒ $n(x,y)$ est une fonction de $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$(AF') = (BF')$ ← on néglige l'inclinaison des rayons dans le MSL

avec $\begin{cases}(AF') = AP + 2n(r)e + PF' \\ (BF') = AP + 2n(0)e + f\end{cases}$

or $PF' = \sqrt{f^2+r^2}$

$$2n(r)e + f\sqrt{1+\left(\frac{r}{f}\right)^2} = 2n_0 e + f$$

$$(n(r)-n_0)e = \frac{1}{2}f\left[1-\sqrt{1+\left(\frac{r}{f}\right)^2}\right]$$

④

$$r \ll f \Rightarrow n(r) = n_0 - \frac{r^2}{4ef}$$

9) On regarde la différence de phase entre deux pixels adjacents à l'endroit le plus défavorable c'est à dire pour $r=R$, là où les variations d'indice sont les plus prononcées.
Entre 2 pixels consécutifs (distants de d), l'indice varie de

$$\Delta n = n(R-d) - n(R)$$
$$= \frac{R^2}{4ef} - \frac{(R-d)^2}{4ef} \simeq \frac{Rd}{2ef} \quad (d \ll R)$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = 2\Delta n e \times \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{Rd}{f}$$

Pour respecter le critère de Shannon, on veut $\Delta\varphi < \pi \Rightarrow f > f_{min}$

avec $\boxed{f_{min} = \frac{2Rd}{\lambda}}$

10) Le déphasage est proportionnel au signal de commande. Or celui-ci est codé sur 8 bits, c'est à dire qu'il ne peut prendre que $2^8 = 256$ valeurs différentes.

- Ainsi le déphasage ne peut être qu'un multiple de $\frac{\varphi_{max}}{256}$ avec $\varphi_{max} \simeq 2\pi$
- Il n'y a pas de problème à ce que le déphasage soit limité entre 0 et 2π puisque

5

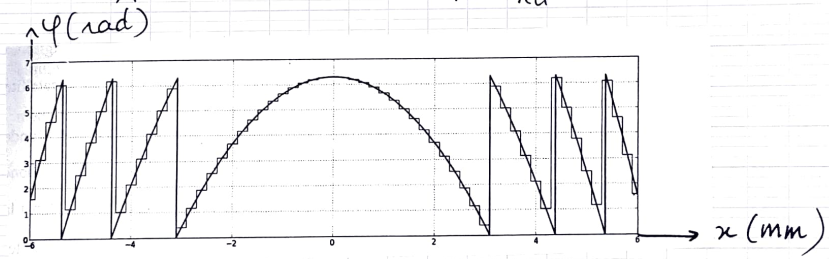
rajouter 2π ne change pas le champ associé aux ondes lumineuses.

11. Surface effective : 12×12 mm^2
On prend " $R = 6$ mm (taille minimale)
Comme $d = 20\,\mu m$
$600 < \lambda < 700$ nm : on prend $\lambda = 650$ nm

$$\Rightarrow f_{min} = \frac{2Rd}{\lambda} = 37\,cm$$

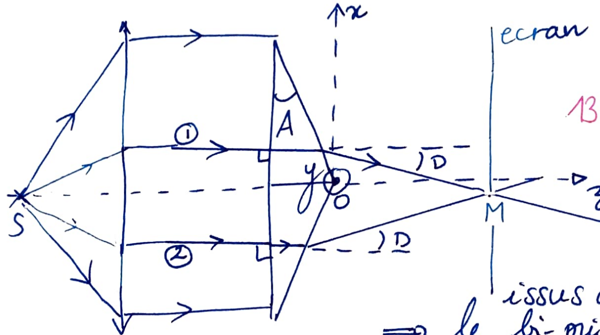
12. Avec $f = 20 f_{min}$

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} e\left(n(x,y) - n_0\right) = \frac{-\pi}{40}\frac{r^2}{Rd} \quad [2\pi]$$



La pixellisation implique que $\varphi = c^{te}$ sur des intervalles de largeur d.

6

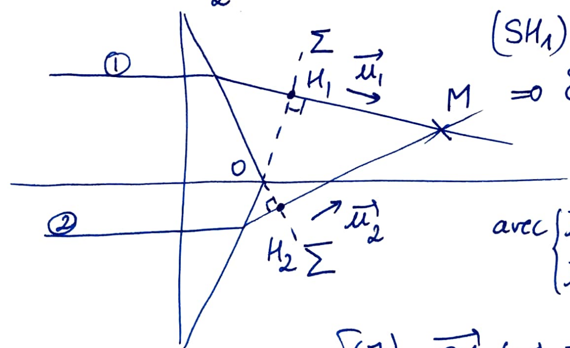


13- Les rayons qui interfèrent en un point M de la zone d'interférences ne sont pas issus d'un même rayon incident
$\Rightarrow$ le bi-prisme de Fresnel est un dispositif à division du front d'onde.

14. Le système est invariant par translation selon y
$\rightarrow$ on a des franges rectilignes, parallèles à (Oy)
Le plan (Oyz) est plan de symétrie du système
$\rightarrow$ le chemin optique est le même pour un rayon passant "par le haut" ou "par le bas" en un point de ce plan $\rightarrow \delta = 0 \rightarrow$ On a donc une frange brillante dans ce plan.

15. Si on se place dans un plan $\perp (Oz)$, on observe des franges rectilignes parallèles à (Oy)

$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$ où $(SM)_i = (SH_i) + H_iM$



$(SH_1) = (SO) = (SH_2)$

$\Rightarrow \delta(M) = H_2M - H_1M$

$H_iM = \vec{OM}\cdot\vec{u_i}$

avec $\begin{cases} \vec{u_1} = \cos D\,\vec{u_z} - \sin D\,\vec{u_x} \\ \vec{u_2} = \cos D\,\vec{u_z} + \sin D\,\vec{u_x} \end{cases}$

$\Rightarrow \delta(M) = \vec{OM}\cdot(\vec{u_2} - \vec{u_1}) = \vec{OM}\cdot 2\sin D\,\vec{u_x}$

$\delta(M) = 2x\sin D$

⑦

On a une frange brillante si $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{Z}$

$$2x_p \sin D = p\lambda \Rightarrow x_p = \frac{p\lambda}{2\sin D}$$

$$\boxed{i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda}{2\sin D}}$$

16. Pour le bi-prisme de Fresnel, la figure d'interférence est invariante par translation selon y.
Pour l'axicon, la figure d'interférence est invariante par rotation autour de l'axe optique du système, d'où l'allure de la figure d'interférences.
L'axe de révolution est une frange brillante, comme le plan de symétrie dans le cas du bi-prisme.
Le cas du bi-prisme correspond à une interférence à 2 ondes, l'intensité s'écrit

$$I(x) = \frac{I_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \times 2x\sin D\right)\right)$$ si I_0 est l'intensité maximale.

Dans le cas de l'axicon la forme de la figure d'interférence est circulaire mais on a une frange centrale très brillante puis des anneaux espacés d'environ toujours 1 unité dans la variable u.
Ainsi l'écart entre 2 franges (brillantes ou sombres) est $\frac{2\pi}{\lambda}\sin D\,(r_{p+1} - r_p) = \pi$

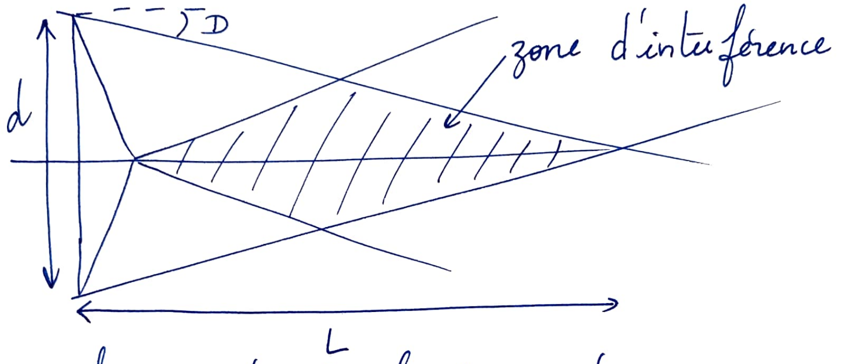
Soit un interfrange $i_{axicon} = \frac{\lambda}{2\sin D}$: on retrouve la même valeur.

⑧

17. Par lecture graphique, on obtient $(J_0(\pi u))^2 = \frac{1}{2}$ pour $u = 0{,}35 \pm 0{,}05$
Donc la largeur à mi-hauteur du disque lumineux central est donnée par

$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\Delta l}{2}\sin D = 0{,}35\,\pi$$

$$\frac{\Delta l}{2} = \frac{0{,}35\lambda}{\sin D} = (0{,}5 \pm 0{,}1)\,\mu m \Rightarrow \Delta l = (1{,}0 \pm 0{,}2)\,\mu m$$



Ce faisceau de Bessel est présent sur une longueur $L = \frac{d/2}{\tan D} = 5\,mm$

$$\frac{L}{\Delta l} \sim 500$$

18. Le faisceau de Bessel n'est présent que sur une longueur L, mais si on fait tendre d vers l'∞ alors L tend aussi vers l'∞ et on a alors un faisceau de Bessel présent tout le long de l'axe optique.

Le faisceau de Bessel ne diffracte pas, il est très intense sur une très faible largeur et une très grande longueur, ce qui permet de percer des canaux très longs et très étroits dans le verre comme présenté sur l'image.
Pour une onde plane, l'intensité est uniforme, on n'a pas du tout la même précision !