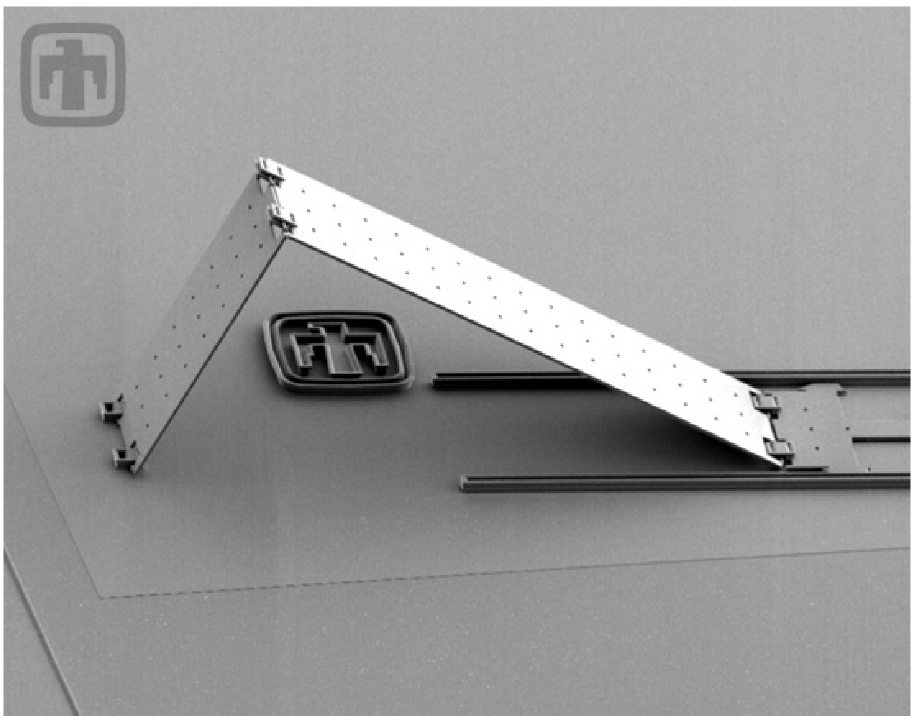
TD sur l'effet Casimir

Le physicien danois Hendrick Casimir prédit en 1948 que deux plaques métalliques parallèles électriquement neutres placées dans le vide s'attiraient du fait des fluctuations quantiques du vide. Loin d'être anecdotique, cet effet a été mesuré expérimentalement pour la première fois en 1997 et doit être un phénomène à prendre en compte dans certains systèmes micoélectromécaniques (MEMS).



Micro-miroir pliable commandé par une tension :
Une extrémité du miroir peut coulisser dans un rail, entraîné par des engrenages pilotés par quatre peignes électrostatiques. Si les surfaces en regard sont trop proches, l'effet Casimir peut intervenir.

Table 1 – Données numériques :

Vitesse de la lumière	c=3,0.10^{8}m.s^{-1}
Constante de Planck réduite	$\hbar$=1,05.10^{-34} J.s
Constante de Boltzmann	k_B=1,4.10^{-23}J.K^{-1}
Constante de Stefan	σ=5,7.10−8SI

On considère deux plaques parallèles séparées d'une distance L et l'on introduit un axe Ox perpendiculaire aux plaques tel que les plaques soient à l'abscisse x=0 et $x = L$.

1 Première partie

On raisonne dans cette partie sur une particule non relativiste de masse m piégée entre les deux plaques. Du point de vue énergétique, cela signifie que la particule se trouve dans un puits de potentiel rectangulaire de largeur L et de profondeur infinie. On suppose que la particule est dans un état stationnaire d'énergie E et décrite par la partie spatiale de la fonction d'onde $\varphi(x)$. L'équation de Schrödinger vérifiée par $\varphi(x)$ s'écrit alors :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\varphi(x)$$

1. Montrer que la présence des plaques entraîne une quantification de l'énergie. Introduire un entier naturel non nul n pour exprimer les énergies E_n possibles de la particule.
2. Retrouver l'ordre de grandeur de l'énergie minimale à partir de l'inégalité d'Heisenberg spatiale.

   Dans la suite, on suppose que la particule se trouve dans l'état fondamental (celui de plus basse énergie). La plaque en x=0 est fixe alors que la plaque en $x = L$ peut se déplacer. La particule exerce sur cette dernière une force $\vec{F} = F\vec{e}_x$
3. Représenter la fonction d'onde de la particule pour une distance entre les plaques égale à L puis à $L + dL$ et commenter son évolution.
4. En effectuant un bilan d'énergie à la particule lorsque la plaque mobile se déplace de l'abscisse $x = L$ à l'abscisse $x = L + dL$, exprimer la force F en fonction de $\hbar$, m et L. La présence de la particule a-t-elle tendance à ce que les plaques s'attirent ou se repoussent ?
5. Retrouver l'expression de F en *ordre de grandeur* à l'aide d'une description corpusculaire de la particule et de l'inégalité de Heisenberg spatiale, en considérant que la particule effectue des allers et retours entre les deux plaques.

   Les plaques possèdent une surface S et il y a n_s particules par unité de surface présentes (particules identiques de masse m). A une température suffisamment faible, les particules sont toutes dans leur état fondamental (possible pour les bosons mais pas pour les fermions).
6. Exprimer la pression p subie par les plaques de la part du gaz de particules. Comparer la dépendance de p par rapport à L au cas du gaz parfait classique à la température T.

   Bien noter que cette pression est présente même en l'absence totale d'agitation thermique (zéro absolu) : il s'agit d'un phénomène purement quantique.

2 Deuxième partie

Il n'y a plus de particules massiques entre les plaques. Néanmoins, du champ électromagnétique peut y être présent. La présence des plaques entraîne que la composante tangentielle du champ électrique doit être nulle à proximité immédiate de celles-ci. Cette condition impose que seuls certains modes électromagnétiques peuvent être présents autour des plaques. D'après la théorie de quantification du champ électromagnétique (appelée électrodynamique quantique), chaque mode électromagnétique de pulsation ω est décrit par un hamiltonien d'oscillateur harmonique quantique à une dimension. Les niveaux d'énergie d'un mode sont alors quantifiés par la formule :

$$E_m = (m + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

où m est le nombre de photons, chacun d'énergie $\hbar\omega$, présents dans le mode considéré. Il existe pour chaque mode une énergie fondamentale non nulle :

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$$

correspondant à l'énergie du vide quantique électromagnétique. Cette énergie du vide n'est pas une simple énergie de référence arbitraire non observable puisqu'elle va intervenir dans la force que subissent les plaques.

7. En se restreignant à une onde plane harmonique se propageant entre les plaques perpendiculairement à celles-ci, montrer que seuls certains modes de pulsation ω_n peuvent exister du fait des conditions aux limites imposées par la présence des plaques. Exprimer ω_n en fonction de c, L et d'un nombre entier n.
   On raisonne sur le mode de pulsation ω_n décrit précédemment. On suppose qu'il n'y a aucun photon dans ce mode.
8. En reprenant la même démarche qu'à la question 4. monter que la présence de ce mode vide entraîne que la plaque située en $x = L$ subit une force :

$$\vec{F}_{0n} = F_{0n}\vec{e}_x$$

   dont on donnera l'expression.
9. Comment s'écrit la force lorsque le mode de pulsation ω_n contient N photons ? Montrer que la contribution d'un photon à l'expression de la force peut être déterminée par un raisonnement corpusculaire.

   Un calcul très technique permet d'obtenir la résultante des forces lorsque tous les modes sont vides :

$$F_{Casimir} = -\frac{\pi^2}{240}\frac{\hbar c}{L^4}S$$

10. Expliquer qualitativement le signe de $F_{Casimir}$.
11. Calculer la valeur de $F_{Casimir}$ pour des plaques carrées de 10 μm de côté séparées de 1μm (valeur typique pour les micro-miroirs des vidéoprojecteurs). Comparer au propre poids des plaques dans le cas où elles sont en silicium (masse volumique de 2,3 g.cm^{-3}) et ont une épaisseur de 0,2 μm. Commenter.

    A une température non nulle, il faut prendre en compte également le rayonnement thermique des plaques. A température ambiante et pour une distance entre plaques inférieure au micromètre, on montre qu'à la force de Casimir il faut ajouter la force due au rayonnement ayant pour expression approchée :

$$\vec{F}_{ray} = -\frac{4}{3}\frac{\sigma T^4}{c}S\vec{e}_x$$

    où $\sigma = \frac{\pi^2}{60}\frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2}$ désigne la constante de Stefan (qui intervient dans la loi de Stefan-Boltzmann sur le rayonnement des corps noirs).
12. Comparer numériquement $F_{Casimir}$ et F_{ray} pour les plaques précédentes et commenter.