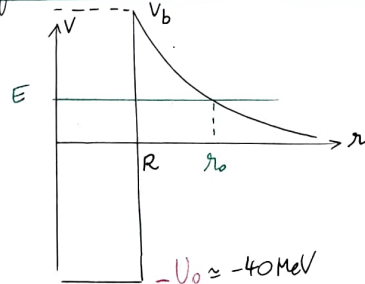


# Corrigé de quelques exercices de mécanique quantique

## 2. Effet tunnel et radioactivité $\alpha$



$-U_0 \approx -40 \text{ MeV}$

• Pour  $r = r_0$   $E = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = 0$   $r_0 = \frac{2e^2}{2\pi\epsilon_0 E}$  où  $Z' = Z - 2 = 81$  ici.

A.N.  $r_0 = \frac{81 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{2 \times \pi \times 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 6,0 \cdot 10^6} = \frac{3,9 \cdot 10^{-14}}{1,056 \cdot 10^7} = 3,7 \cdot 10^{-21} \text{ m}$

•  $R = R_0 A^{1/3} \Rightarrow R = 1,2 \cdot 10^{-15} \times 208^{1/3} = 7,1 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 7,1 \text{ fm}$

•  $V_b = V(r=R) = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{2 \times 81 \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2}{4\pi \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \times 7,1 \cdot 10^{-15}} = 33 \text{ MeV}$

On constate que  $E$  est très sensiblement  $< V_b$  : la particule  $\alpha$  ne peut sortir du noyau que par effet tunnel.

• On peut considérer que celle-ci doit franchir une barrière de hauteur  $\frac{V_b}{2} = V_0$  et de largeur  $a = \frac{r_0 - R}{2} = 32 \text{ fm}$

$m = m_{\text{He}} = 6,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4 \times m_{\text{nucléon}}$

$$T = \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

avec  $V_0 = \frac{V_b}{2} = 16,5 \text{ MeV}$        $E = 6,0 \text{ MeV}$

$V_0 - E = 10,5 \text{ MeV}$  et  $a = 32 \text{ fm}$

$$\frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} = \frac{16 \times 6,0 \times 10,5}{(16,5)^2} = 3,7$$

$$\begin{aligned} \frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)} &= \frac{2 \times 32 \cdot 10^{-15}}{1,0 \cdot 10^{-34}} \left( 2 \times 6,66 \cdot 10^{-27} \times 10,5 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{19} \right)^{1/2} \\ &= 64 \cdot 10^{19} (224 \cdot 10^{-40})^{1/2} \\ &= 64 \cdot 10^{19} \times 15 \cdot 10^{-20} \\ &= 95,8 \end{aligned}$$

$$T = 9,8 \cdot 10^{-42}$$

$$m = 4 m_{\text{nucleon}} = 4 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

on note  $\tau_0$  le temps que met la particule  $\alpha$  à traverser le noyau.  $\tau_0 \approx 10^{-21} \text{ s}$  selon la littérature.

Si on note  $\tau$  la durée de vie moyenne du noyau on a

$$\tau = \tau_0 T + 2\tau_0 (1-T) \times T + 3\tau_0 (1-T)^2 T + \dots + n\tau_0 (1-T)^{n-1} \times T$$

$\uparrow$   
 pbte desortir à la première occasion  
 pbte de ne pas sortir à la 1<sup>ère</sup> occas  
 pbte desortir à la 2<sup>e</sup>

Rq:  $\sum_{n=0}^{\infty} T (1-T)^n = T \times \frac{1}{1-(1-T)} = 1$

$$\tau = \tau_0 T \left[ \sum_{n=1}^{\infty} n (1-T)^{n-1} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right) = \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)$$

$$= \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\tau = \tau_0 T \times \frac{1}{T^2} = \boxed{\frac{\tau_0}{T} = \tau}$$

$$\tau = 1 \cdot 10^{20} \text{ s}$$

On surestime très largement la durée de vie  $t_{1/2} (^{212}_{83}\text{Bi}) \approx 1 \text{ h} \sim 4 \cdot 10^3 \text{ s}$

On est loin du compte! le problème vient de l'extrême simplification, et en particulier de l'extrême sensibilité des expressions ci-dessus par rapport au choix de  $V_0$ , qui est fait de façon empirique.

(4)

Rque: On peut estimer  $\tau_0$  en calculant la vitesse de la particule  $\alpha$  dans le noyau dans un modèle classique.

$$E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{m v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$$

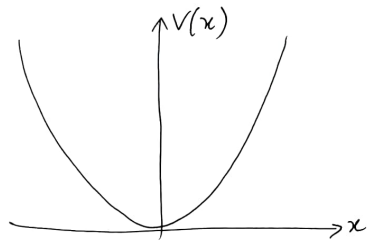
avec  $E_c = E - (-U_0) = E + U_0 = 46 \text{ MeV}$

$$v \approx \sqrt{\frac{2 \times 46 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,7 \cdot 10^{-27}}} = 4,7 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$\frac{v}{c} \approx 15\%$  : il faudrait tenir compte des effets relativistes.

$$\tau_0 = \frac{2R}{v} = \frac{14 \cdot 10^{-15}}{4,7 \cdot 10^7} = 3 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

### 8. Oscillateur harmonique quantique

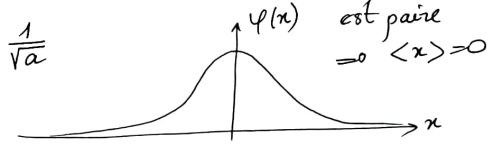


1-  $H\psi = E\psi \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi(x) = E \psi(x) \quad (*)$

2-  $\psi(x) = A \exp(-\frac{x^2}{a^2})$

a-  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^2(x) dx = 1 = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{2x^2}{a^2}) dx = A^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} a^2$

$$A = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{a}}$$



b-  $\frac{\psi'(x)}{A} = -\frac{2x}{a^2} \exp(-\frac{x^2}{a^2})$

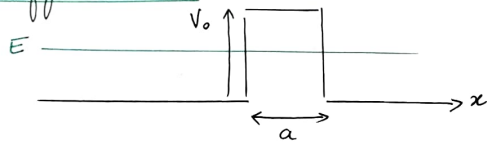
$$\frac{\psi''(x)}{A} = \left(-\frac{2}{a^2} + \frac{4x^2}{a^4}\right) \exp(-\frac{x^2}{a^2})$$

=> Dans (\*):  $-\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{2}{a^2} + \frac{4x^2}{a^4}\right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = E$

doit être vrai  $\forall x \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{ma^2}$  et  $\frac{1}{2} m \omega^2 = \frac{2\hbar^2}{ma^4}$

d'où  $a = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}$  et  $E = \frac{1}{2} \hbar \omega$

## 9. Effet tunnel



$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 - E)}\right)$$

$$\text{ici } E = \frac{V_0}{2} \Rightarrow T = 4 \exp\left(-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{mV_0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{T} = \exp\left(\frac{2a}{\hbar} \sqrt{mV_0}\right)$$

$$a = \frac{\hbar}{2\sqrt{mV_0}} \ln\left(\frac{4}{T}\right)$$

$$\text{or } \lambda_{DB} = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0/2}} = \frac{\hbar}{\sqrt{mV_0}} \left. \vphantom{\lambda_{DB}} \right\} a = \frac{\lambda_{DB}}{2\pi} \underbrace{\ln\left(\frac{4}{T}\right)}_{4,1}$$

$$\text{A.N. : } \lambda_{DB} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{9,1 \cdot 10^{-31} \times 2 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}} = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

T ne peut être raisonnablement grand (ici  $T=10^3$ ) que si a est de même ordre de grandeur que  $\lambda_{DB}$ . Sinon l'effet tunnel, purement quantique, ne peut être observé

$$\text{ici } a = 8,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

## Exo 10: Etats stationnaires dans un puits infini



$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$P_n(x) = \int_0^{ax} \psi_n^2(x) dx = \frac{2}{a} \int_0^{ax} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$P_n(x) = \frac{2}{a} \int_0^{ax} \frac{1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{a}\right)}{2} dx$$

$$P_n(x) = x \left(1 - \text{sinc}\left(2n\pi \frac{ax}{a}\right)\right)$$

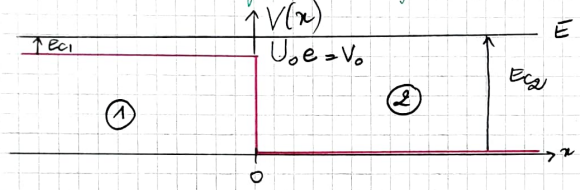
$$P_n(x) = a \left(1 - \text{sinc}(2n\pi x)\right)$$

$\downarrow$  si  $n \rightarrow \infty$

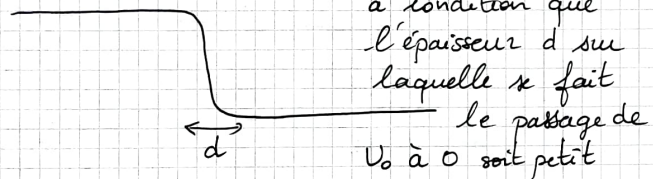
on retrouve le cas classique lorsque  $n \rightarrow \infty$

# Ex 11 - Accélération d'un faisceau de protons

(1)



1. La discontinuité n'est pas physique mais modélise bien un potentiel de la forme :



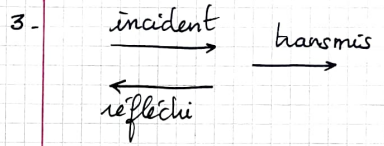
à condition que l'épaisseur  $d$  sur laquelle  $x$  fait le passage de  $U_0$  à 0 soit petit

$$d \ll \lambda_D$$

2. Région ① :  $E_{c1} = 100 \text{ keV} = \frac{p_1^2}{2m}$  où  $p_1 = \frac{h}{\lambda_1}$   
 $E_{c1} = \frac{h^2}{2m\lambda_1^2} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mE_{c1}}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{(2 \times 938 \cdot 10^6 \times 10^5)^{1/2}} = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ m}$   
 $\lambda_1 = 9,0 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

Région ② :  $E_{c2} = E_{c1} + eU_0 = 100 \text{ keV} + 1 \text{ MeV} = 1,1 \text{ MeV} = 11 E_{c1}$   
 $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{11}} = 2,7 \cdot 10^{-14} \text{ m}$

(2)



$$\Psi_1(x, t) = \Psi_1(x) \exp(-i\omega t) = A_1 \exp(i(k_1 x - \omega t))$$

Dans la région 1  $V(x) = eU_0 = V_0$  et  $E = \hbar\omega$  l'équation de Schrödinger s'écrit

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + V_0 \Psi_1$$

$$\hbar\omega \Psi_1 = \left( \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} + V_0 \right) \Psi_1$$

$$\frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} = E - V_0$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

4. avec  $\Psi_1 = A_1 \exp(i(k_1 x - \omega t))$

$$j_i = -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \Psi_1 \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x})$$

$$j_i = \frac{-i\hbar}{2m} A_1 A_1^* (ik_1 + ik_1) = + \frac{\hbar k_1}{m} |A_1|^2$$

on peut considérer que  $j$  est un débit (en  $\text{s}^{-1}$ ) c'est le vecteur densité de courant de particules.

$$j_i = \underbrace{|A_1|^2}_{\text{densité}} \times \frac{\hbar k_1}{m} \text{ linéique de vitesse de ces protons.}$$

$$I = j_1 \times e \Rightarrow |A_1|^2 = \frac{I}{E} \frac{m}{\hbar k_1}$$

↑  
nb de protons par s

5 -  $\Psi_1'(x,t) = A_1' \exp(i(-k_1 x - \omega t)) \quad \leftarrow$

6 -  $\Psi_2(x,t) = A_2 \exp(i(k_2 x - \omega t)) \quad \rightarrow$

7 - La continuité de  $\varphi$  en  $x=0$  impose:  
 $A_1 + A_1' = A_2$

---

$\varphi'$

$$k_1(A_1 - A_1') = k_2 A_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} & \text{avec } k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar} \\ \frac{A_1'}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} & k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \end{cases}$$

8 -  $R = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2 = \left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 =$   
 $R + T = 1 \Rightarrow T = 1 - R$

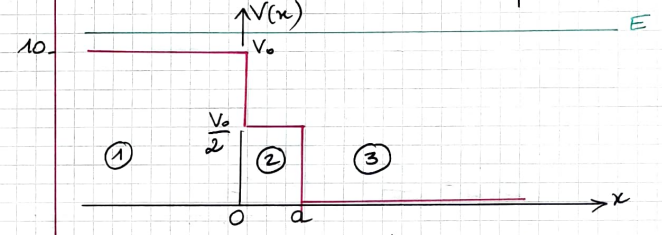
9 -  $R = \left( \frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-V_0}} \right)^2$

$$E = E_c + V_0 \Rightarrow \frac{E-V_0}{E} = \frac{E_c}{E} = \frac{E_c}{E_c + V_0} \Rightarrow \frac{E}{E-V_0} = 1 + \frac{V_0}{E_c}$$

$$R = \left( \frac{\sqrt{1 + V_0/E_c} - 1}{\sqrt{1 + V_0/E_c} + 1} \right)^2$$

AN:  $R = \left( \frac{\sqrt{1+10} - 1}{\sqrt{1+10} + 1} \right)^2 = 28,8\%$  = une fraction importante des protons se réfléchit, résultat peu intuitif du point de

vue classique. Ceci correspond à ce qui est obtenu en optique à l'interface entre deux milieux transparents d'indice  $n_1$  et  $n_2$  - on a alors  $R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$  (qui a la même valeur si on inverse le sens de parcours)



Région ①:  $\varphi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + A_1' e^{-ik_1 x}$

Région ②:  $\varphi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + A_2' e^{-ik_2 x}$

Région ③:  $\varphi_3(x) = A_3 e^{ik_3 x}$

avec  $k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$ ,  $k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$   
 et  $k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

Continuité de  $\varphi$  et  $\varphi'$  en  $x=0$  et  $x=a$ :

$$\begin{cases} A_1 + A_1' = A_2 + A_2' & (1) \\ k_1(A_1 - A_1') = k_2(A_2 - A_2') & (2) \\ A_2 e^{ik_2 a} + A_2' e^{-ik_2 a} = A_3 e^{ik_3 a} & (3) \\ k_2(A_2 e^{ik_2 a} - A_2' e^{-ik_2 a}) = k_3 A_3 e^{ik_3 a} & (4) \end{cases}$$

on veut calculer R, il nous faut donc A'\_2

$$k_2(1) + (2) \Rightarrow (k_1 + k_2) A_1 + (k_2 - k_1) A'_1 = 2k_2 A_2$$

$$k_2(1) - (2) \Rightarrow (k_2 - k_1) A_1 + (k_2 + k_1) A'_1 = 2k_2 A'_2$$

on injecte ces expressions de 2k\_2 A\_2 et 2k\_2 A'\_2

dans 2k\_2 k\_3 (3) - 2(4) \times k\_2 = 0

$$\left[ (k_1 + k_2) A_1 + (k_2 - k_1) A'_1 \right] e^{ik_2 a} + (k_2 - k_1) A_1 + (k_2 + k_1) A'_1 e^{-ik_2 a} k_3 = k_2 \left[ (k_1 + k_2) A_1 + (k_2 - k_1) A'_1 \right] e^{ik_2 a} - \left[ (k_2 - k_1) A_1 + (k_2 + k_1) A'_1 \right] e^{-ik_2 a}$$

on a ainsi une relation entre A\_1 et A'\_1 d'où l'on tire

$$\frac{A'_1}{A_1} = \frac{[(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) e^{ik_2 a} + (k_2 - k_1)(k_2 + k_3) e^{-ik_2 a}]}{[(k_1 - k_2)(k_2 - k_3) e^{ik_2 a} + (k_1 + k_2)(k_2 + k_3) e^{-ik_2 a}]}$$

Rque: si k\_2 = k\_3 (ie pas de couche intermédiaire)

alors  $\frac{A'_1}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$  OUF! on retrouve le résultat précédent!

Pour obtenir R=0, on doit avoir  $\frac{A'_1}{A_1} = 0$

$$(k_1 + k_2)(k_2 - k_3) e^{ik_2 a} + (k_2 - k_1)(k_2 + k_3) e^{-ik_2 a} = 0$$
$$\left[ \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} e^{ik_2 a} + \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} e^{-ik_2 a} \right] = 0$$

on doit donc avoir  $\begin{cases} e^{ik_2 a} = -1 \\ \text{et } \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \end{cases}$

on réalise alors l'équivalent d'une couche anti-reflet.

avec  $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$   $e^{ik_2 a} = -1$

se réécrit  $\frac{4\pi a}{\lambda_2} = \pi + 2p\pi = (2p+1)\pi$

ie  $a = \frac{\lambda_2}{4} + p \frac{\lambda_2}{2}$

En supposant que a est tel que  $e^{ik_2 a} = -1$ , on a

$$R = \left| \frac{A'_1}{A_1} \right|^2 = \left( \frac{\frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} - \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}}{\left( \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) \left( \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3} \right) - 1} \right)^2 = \left( \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 - 1} \right)^2$$

avec  $r_1 = \frac{\sqrt{E - V_0} - \sqrt{E - \frac{V_0}{2}}}{\sqrt{E - V_0} + \sqrt{E - \frac{V_0}{2}}}$  et  $r_2 = \frac{\sqrt{E - \frac{V_0}{2}} - \sqrt{E}}{\sqrt{E - \frac{V_0}{2}} + \sqrt{E}}$

avec  $E = 11 \text{ MeV}$   
 $V_0 = 10 \text{ MeV}$   
 $\frac{V_0}{2} = 5 \text{ MeV}$   
 $r_1 = \frac{1 - \sqrt{6}}{1 + \sqrt{6}} = -0,42$   $r_2 = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{11}}{\sqrt{6} + \sqrt{11}} = -0,15$

La condition n'est pas vérifiée -

on a  $R = 8,3\%$  qui est tout de même sensiblement plus faible que précédemment.

Pour avoir R=0 il faudrait  $\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3}$  ce qui nous donne la valeur de k\_2

$$(k_1 - k_2)(k_2 + k_3) = (k_2 - k_3)(k_1 + k_2)$$
$$k_1 k_2 + k_1 k_3 - k_2^2 - k_2 k_3 = k_2 k_1 + k_2^2 - k_1 k_3 - k_2 k_3$$

$k_2 = k_1 k_3$  - on peut choisir la hauteur de la couche pour vérifier cette condition.

①

exo 12. Combinaison linéaire d'états stationnaires dans un puits infini

$$\psi(x,t) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp\left[-i \frac{E_1 t}{\hbar}\right] + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \exp\left[-i \frac{E_2 t}{\hbar}\right]$$

1.  $\psi$  doit vérifier  $\int_0^a |\psi|^2 dx = 1$

$$\int_0^a (|A_1|^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + |A_2|^2 \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right)) dx = 1$$

↑ terme  
cosé = 0

$$\Rightarrow |A_1|^2 \times \frac{a}{2} + |A_2|^2 \times \frac{a}{2} = 1$$

$$\boxed{|A_1|^2 + |A_2|^2 = \frac{2}{a}} \quad A_1 = A_2 = \sqrt{\frac{1}{a}} \text{ convient.}$$

2.  $\rho = |\psi|^2 = \frac{1}{a} \left( \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + 2 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \times 2 \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) \right)$

On constate que  $|\psi|^2$  dépend du temps. La CL de 2 états stationnaires n'est pas un état stationnaire.  $\rho$  oscille en fonction du temps avec une période  $T = \frac{h}{E_2 - E_1}$

$$\text{avec } E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m a^2} \Rightarrow \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{\hbar^2 \pi^2 \times 3}{h^2 2m a^2}$$



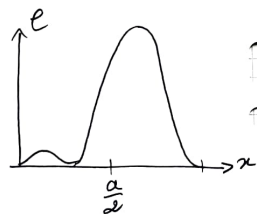
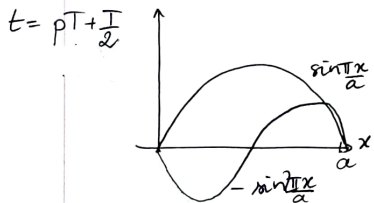
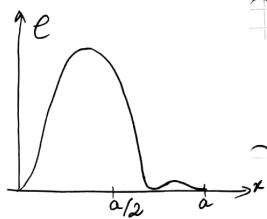
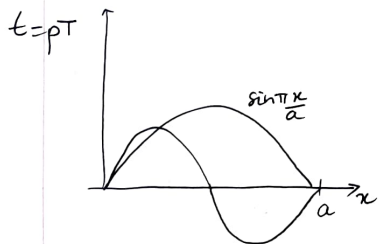
②

$$\frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \times \frac{3}{\hbar} = \frac{3E_1}{\hbar} \quad \boxed{T = \frac{\hbar}{3E_1}}$$

2 - pour  $t = pT$   $\psi = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \right)$

$$|\psi|^2 = \frac{1}{a} \left( \sin \frac{\pi x}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \right)^2$$

pour  $t = pT + \frac{T}{2}$   $|\psi|^2 = \frac{1}{a} \left( \sin \frac{\pi x}{a} - \sin \frac{2\pi x}{a} \right)^2$



③

$$\langle E^2 \rangle = -\hbar^2 \int \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

$$\langle E^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{a} \int_0^a \left( \sin \frac{\pi x}{a} e^{+iE_1 t / \hbar} + \sin \frac{2\pi x}{a} e^{+iE_2 t / \hbar} \right) \times \left( -\frac{E_1^2}{\hbar^2} \left( \sin \frac{\pi x}{a} e^{-iE_1 t / \hbar} + \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-iE_2 t / \hbar} \right) \times a^2 \right) dx$$

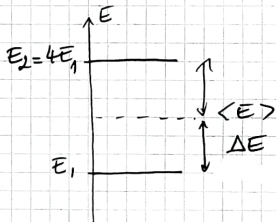
$$\langle E^2 \rangle = \frac{E_1^2}{a} \left( \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx + \int_0^a \sin^2 \frac{2\pi x}{a} dx \times 4^2 \right)$$

$$= \frac{E_1^2}{2} \left( \frac{a}{2} + 4^2 \frac{a}{2} \right) = \frac{E_1^2}{2} (1 + 4^2) = \frac{17}{2} E_1^2$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2)$$

$$\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{17}{2} E_1^2 - \frac{25}{4} E_1^2 = \frac{9}{4} E_1^2$$

$$\Delta E = \frac{3}{2} E_1$$



$$\Delta E \times T = \frac{3}{2} E_1 \times \frac{\hbar}{3E_1} = \frac{\hbar}{2}$$

l'inégalité temps énergie  $\Delta E \times \tau \geq \frac{\hbar}{2}$

amplitude des fluctuations statistiques de E  
 demi caractéristique d'évolution du système.

est vérifiée

Remarque: Pour un état stationnaire  $\tau \rightarrow \infty$ , l'énergie est parfaitement définie.

$$\langle E \rangle = i\hbar \int_{\mathcal{D}} \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$$

$$\langle E \rangle = i\hbar \int_0^a \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} dx$$

$$\text{avec } \psi = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \sin \frac{2\pi x}{a} \exp(-\frac{iE_2 t}{\hbar}) \right)$$

$$E_2 = 4E_1$$

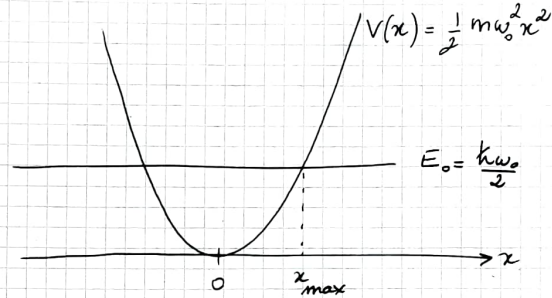
$$\langle E \rangle = \frac{i\hbar}{a} \int_0^a \left( \sin \frac{\pi x}{a} e^{+\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \sin \frac{2\pi x}{a} e^{+\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right) \times \left( -\frac{iE_1}{\hbar} \left( \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + 4 \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right) dx \right)$$

$$\langle E \rangle = \frac{E_1}{a} \left( \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx + 4 \int_0^a \sin^2 \left( \frac{2\pi x}{a} \right) dx \right) + 0$$

$$\langle E \rangle = \frac{E_1}{a} \times \left( \frac{a}{2} + 4 \frac{a}{2} \right) = \frac{E_1}{2} (1+4) \quad \begin{array}{l} \text{termes} \\ \text{voies} \end{array}$$

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2} (E_1 + E_2)$$

### 13. oscillateur harmonique

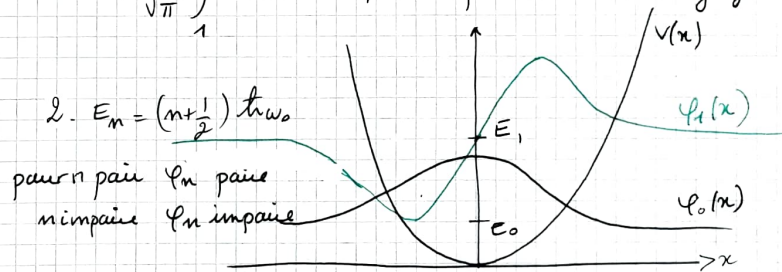


1. En mécanique classique  $V(x) \leq E_0$  ie  $\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 < \frac{\hbar \omega_0}{2}$   
 $\Rightarrow |x| < x_{\max} = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_0}} = a/\sqrt{2}$

$$P = 2 \times \int_0^{x_{\max}} |\psi|^2 dx = 2 \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{m \omega_0}{\pi \hbar}} \exp\left(-\frac{2x^2}{a^2}\right) dx$$

$$ii = \sqrt{\frac{2x}{a}} \Rightarrow dx = \frac{a}{\sqrt{2}} du = \sqrt{\frac{2\hbar}{m \omega_0}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} du = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_0}} du$$

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\infty} e^{-u^2} du \approx 0,15 : \text{probabilité non négligeable}$$



$$2. E_n = \left(m + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0$$

pair n pair

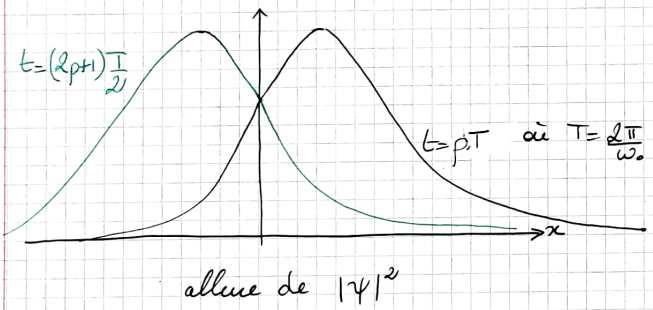
impair n impair

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_0(x) e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} + \psi_1(x) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \right] \quad \text{avec } E_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \left[ \psi_0(x) + e^{-i\omega_0 t} \psi_1(x) \right] \quad E_1 = \frac{3}{2} \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$|\Psi|^2(x,t) = \frac{1}{2} [\Psi_0^2(x) + \Psi_1^2(x) + 2\Psi_0(x)\Psi_1(x) \cos \omega_0 t]$$

$|\Psi|^2$  oscille sinusoidalement en fonction du temps à une pulsation  $\omega_0$ . La CI de 2 états stationnaires donne un état non stationnaire.



Exo 14 Puits infini tridimensionnel

1.  $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V\Psi = E\Psi$   
 $\Psi_{n_i}(x) = \sqrt{\frac{2}{L_i}} \sin\left(\frac{n_i \pi x}{L_i}\right) \Rightarrow \Psi_{n_i}''(x) = -\left(\frac{n_i \pi}{L_i}\right)^2 \Psi_{n_i}(x)$

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

si  $\Psi = \Psi_{n_1}(x) \Psi_{n_2}(y) \Psi_{n_3}(z)$

$$\Delta \Psi = \Psi_{n_1}''(x) \Psi_{n_2}(y) \Psi_{n_3}(z) + \Psi_{n_1}(x) \Psi_{n_2}''(y) \Psi_{n_3}(z) + \Psi_{n_1}(x) \Psi_{n_2}(y) \Psi_{n_3}''(z)$$

$$\Delta \Psi = -\left(\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}\right) \pi^2 \Psi(x,y,z)$$

$\Psi$  est solution de l'équation de Schrödinger stationnaire avec

$$\frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2} \right) = E_{n_1 n_2 n_3}$$

$$\Psi(x,y,z,t) = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{L_1 L_2 L_3}} \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{L_1}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{L_2}\right) \sin\left(\frac{n_3 \pi z}{L_3}\right) e^{-\frac{iE_{n_1 n_2 n_3}}{\hbar} t}$$

2. si  $L_1 = L_2 = 2L_3$   $E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m L_1^2} (n_1^2 + n_2^2 + 4n_3^2)$

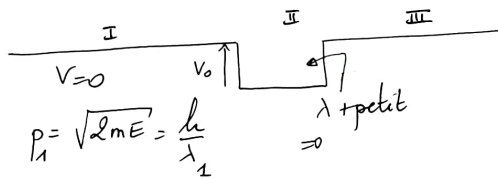
Le fondamental est donné par  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$   
 $E_1 = E_{111} = 3 \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L_1^2}$  il est non dégénéré.

Le 1<sup>er</sup> état excité est donné par  $n_1 = 2 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 1$   
 $E_2 = E_{211} = E_{121} = \frac{9}{2} \frac{\hbar^2 \pi^2}{m L_1^2}$  ou  $n_1 = 1 \quad n_2 = 2 \quad n_3 = 1$   
 il est dégénéré 2 fois.

### 15. Potentiel inconnu

1. état de diffusion
2.  $x < 0$  interférences quantiques de l'onde incidente et de l'onde réfléchie - n'existe pas en mécanique classique

3.



interférence de période  $\frac{\pi}{k_2} = \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{zone 1} \quad k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \\ \text{zone 2} \quad k_2^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (k_{II}^2 - k_I^2) \\ V_0 = \frac{\hbar^2}{2m} (2\pi)^2 \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \end{array}$$

4. Région I       $\varphi_I(x) = A_1 \exp(ik_1 x) + B_1 \exp(-ik_1 x)$   
 Région II       $\varphi_{II}(x) = A_2 \exp(ik_2 x) + B_2 \exp(-ik_2 x)$   
 Région III       $\varphi_{III}(x) = A_3 \exp(ik_3 x)$

$\varphi$  et  $\varphi'$  continue avec ici  $k_3 = k_1$

### 17. Puits de potentiel fini

1.  $\varphi''(x) + k^2 \varphi(x) = 0$  avec  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\varphi(x) = A \cos kx + B \sin kx$

$\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$  impose  $\begin{cases} A \cos ka + B \sin ka = 0 \\ A \cos ka - B \sin ka = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} A \cos ka = 0 \\ B \sin ka = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos ka = 0 \text{ et } B = 0 \\ \text{ou } \sin ka = 0 \text{ et } A = 0 \end{cases}$

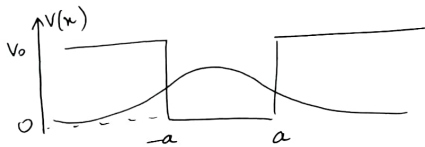
$\begin{cases} ka = \frac{\pi}{2} + p\pi \text{ et } B = 0 & \varphi(x) = A \cos\left(\left(2p+1\right)\frac{\pi}{2a}x\right) \\ ka = p\pi \text{ et } A = 0 & \varphi(x) = B \sin\left(2p\frac{\pi}{2a}x\right) \end{cases}$

$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left( n \frac{\pi}{2a} \right)^2$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$

$\begin{cases} n \text{ impair} & \varphi_n(x) = A \cos\left(n \frac{\pi}{2a}x\right) \\ n \text{ pair} & \varphi_n(x) = B \sin\left(n \frac{\pi}{2a}x\right) \end{cases}$

$E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m (2a)^2}$

2) état lié  $E < V_0$



fondamental  
 $E_1 < E_{10}$  car -  
 localisée

$-a < x < a$   $\psi''(x) + k^2\psi(x) = 0$   $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$\psi(x) = A \cos kx + B \sin kx$

$\psi$  est paire  $\Rightarrow \psi_1 = A \cos kx$   
 ou impaire  $\Rightarrow \psi_1 = B \sin kx$

$x > a$  or  $x < a$   $\psi''(x) - q^2\psi(x) = 0$  où  $q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$

$x > a$   $\psi_2(x) = C \exp(-q(x-a))$

$x < a$   $\psi_3(x) = D \exp(q(x+a))$

Cl  $\psi(x=\frac{a}{2}) = \psi(x=a)$  idem en  $x=-a$   
 $\psi'(x=a^+) = \psi'(x=a^-)$

cas pair  $\psi_1 = A \cos kx$  et  $\psi_2 = C \exp(-q(x-a))$   
 $\psi_3 = C \exp(q(x+a))$

continuité en  $x=a$   $A \cos ka = C$

continuité de  $\frac{d\psi}{dx}$   $-kA \sin ka = A \cos ka (-q)$

(2)

$\tan ka = \frac{q}{k} \Rightarrow \boxed{\tan ka = qa}$

(3)

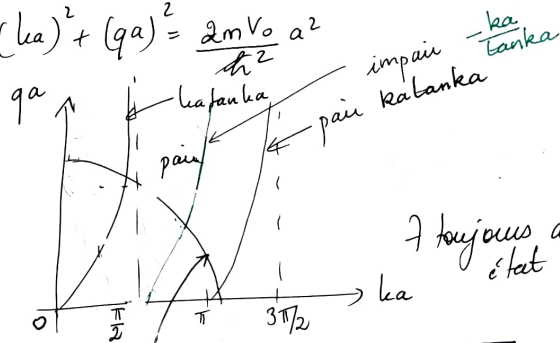
cas impair  $\psi_1 = A \sin kx$   $\psi_2 = C \exp(-q(x-a))$   
 $\psi_3 = -C \exp(q(x+a))$

$A \sin ka = C$

$A k \cos ka = -C q = -A \sin ka q$

$\Rightarrow \tan ka = -\frac{k}{q} \Rightarrow \boxed{\frac{\tan ka}{\tan ka} = -qa}$

$(ka)^2 + (qa)^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$



7 toujours au moins 1  
 état lié.

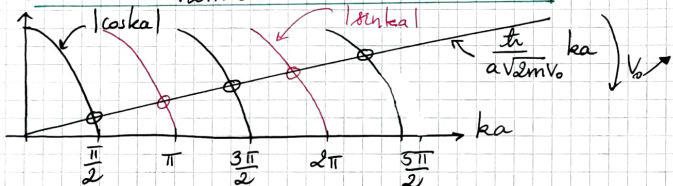
Si  $V_0$  devient très grand, alors les états pairs sont obtenus par  $ka = \frac{\pi}{2} + p\pi$   
 impairs  $ka = p\pi$  }  $ka = \frac{n\pi}{2}$   
 $n \in \mathbb{N}^*$   
 les niveaux d'énergie sont alors obtenus pour  $\frac{\sqrt{2mE_n} a}{\hbar} = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$   
 on retrouve bien les valeurs du puits infini.

Autre méthode de résolution graphique:

\*  $ka \tan ka = qa$  avec  $\tan ka > 0$  dans le cas pair  
 $\Rightarrow (ka)^2 (\tan^2 ka + 1) = (qa)^2 + (ka)^2 = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$

$\frac{ka}{|\cos ka|} = \frac{\sqrt{2mV_0} a}{\hbar}$  et  $\tan ka > 0$

$\Rightarrow |\cos ka| = \frac{\hbar}{a\sqrt{2mV_0}} ka$  et  $\tan ka > 0$



\*  $\frac{ka}{\tan ka} = -qa$  dans le cas impair

$(ka)^2 + (qa)^2 = (qa)^2 (\tan^2 ka + 1) = (qa)^2 \frac{1}{\cos^2 ka}$   
 $\frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} = \frac{(qa)^2}{(\cos^2 ka)} \Rightarrow \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} \cos^2 ka = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2} - (ka)^2$

$\Rightarrow \sin^2 ka = \frac{\hbar^2}{2mV_0 a^2} (ka)^2$

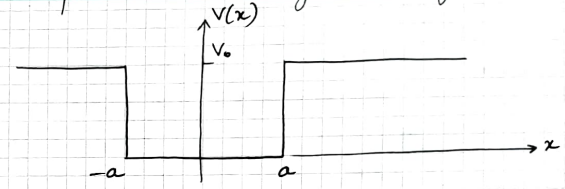
$\Rightarrow |\sin ka| = \frac{\hbar}{\sqrt{2mV_0} a} ka$  et  $\tan ka < 0$

• On retrouve une sol<sup>o</sup> pour  $ka$  dans chaque intervalle  $[(n-1)\frac{\pi}{2}, n\frac{\pi}{2}]$  alternatif<sup>s</sup> pair / impair

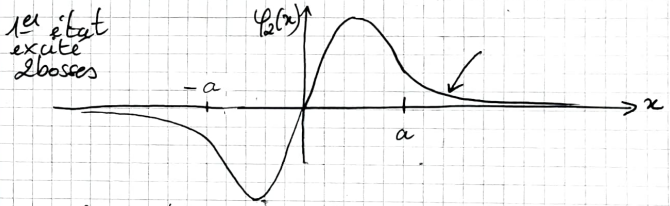
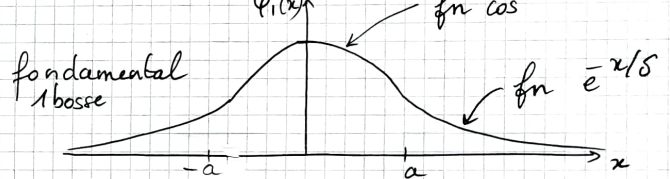
• si  $V_0 \rightarrow \infty$   $(ka)_n \rightarrow n\frac{\pi}{2}$

18. Puits de potentiel rectangulaire fini double

1.  $\Delta = 0$



Dans le cas  $\Delta = 0$ , on a un puits de largeur  $2a$ .  
 $\psi_1(x)$  a l'allure suivante: fn "cos"



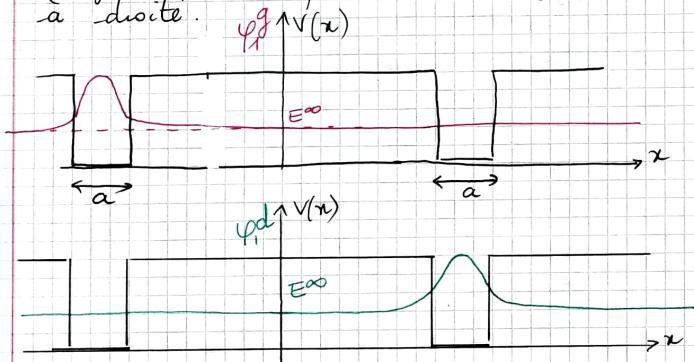
2. Si le puits était infini, on aurait  
 $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2}$  et  $E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2} \times 4$

3. Comme ici la particule a une probabilité de présence non nulle en dehors des puits, on a  $E_1' < E_1$  et  $E_2' < E_2$

② 4.  $\Delta$  très grand signifie que la particule ne peut quasiment pas passer d'un puits à l'autre par effet tunnel.  
 La particule "débordé" sur une longueur typique  $\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V_0 - E)}}$

$\Delta$  grand signifie  $\Delta \gg \delta$

On a alors 2 puits séparés, avec comme niveau fondamental de l'ensemble, la même énergie que la particule soit à gauche ou à droite.



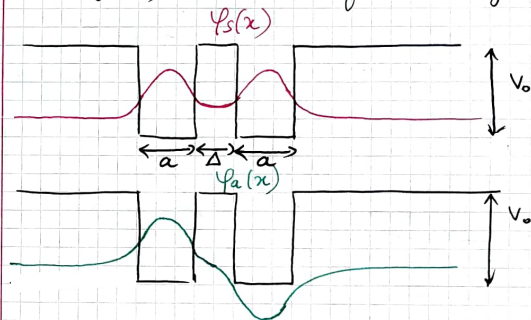
On peut aussi choisir comme base les fonctions d'onde

$$\begin{cases} \psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^g + \psi_1^d) \\ \psi_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1^g - \psi_1^d) \end{cases}$$

③  $(\psi_1^g, \psi_1^d)$  est une base orthonormée de fonctions d'onde pour la valeur propre  $E_0$   
 $(\psi_s, \psi_a)$  aussi, pour le même sous espace propre correspondant à la valeur propre  $E_0$  de l'opérateur hamiltonien.

5.  $E_0 \sim \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$   $E_0$  est une valeur légèrement inférieure à celle du fondamental d'un puits  $\infty$  de largeur  $a$ .

6. Dans le cas où  $\Delta$  est intermédiaire,  $\psi_s(x)$  et  $\psi_a(x)$  vont se déformer légèrement



7. Si  $\Delta \rightarrow 0$   $\psi_s(x) \rightarrow \psi_1(x)$   $E_s < E_a$   
 $\psi_a(x) \rightarrow \psi_2(x)$

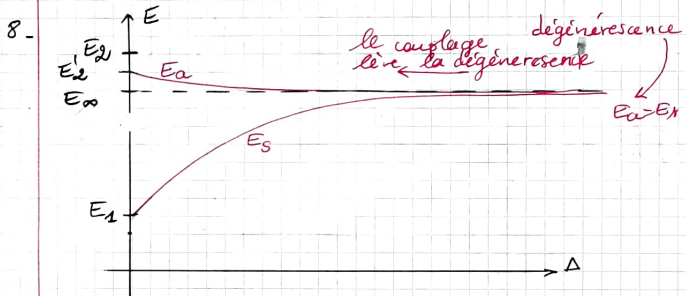
Les fonctions d'onde sont non nulles dans la partie centrale : pour  $\psi_s(x)$  il y a cumul des contributions du débordement du puits de gauche et du puits de droite, en revanche pour  $\psi_a(x)$  (fn impaire) ces débordements

4

se compensent partiellement.  
La densité de probabilité de présence dans l'état antisymétrique est plus localisée dans les puits

$\Rightarrow E_a > E_s$

Il y a levée de dégénérescence lorsque la barrière est assez étroite pour avoir un effet tunnel et donc un couplage entre les deux puits.



$E_2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$      $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2}$  pour

On sait que  $E'_1 < E_1$   
 $E'_2 < E_2$

Qu'en est-il de  $E_{00}$  par rapport à  $E'_2$  ?

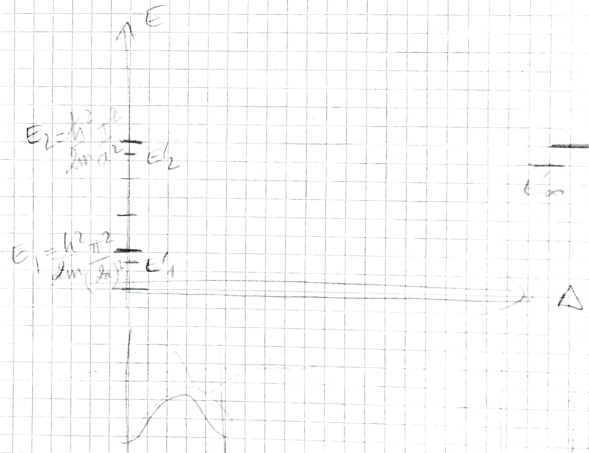
puits très éloignés  
↳ la fonction d'onde déborde dans la partie entre les 2 puits

↑ l'état excité du puits de largeur  $2a$ .  
↳ la fn d'onde ne déborde que vers  $+\infty$  et  $-\infty$

$\Rightarrow E_{00} < E'_2$

5

- 9. les protons sont aux centres des 2 puits.
- 10. L'énergie de l'élection dans l'état stationnaire symétrique diminue si les noyaux se rapprochent  $\rightarrow$  dans l'état fondamental, l'i tend à rapprocher les noyaux. La distance d'équilibre correspondra à un minimum de l'énergie globale de l'édifice pour lequel il faut aussi bien sûr tenir compte de la répulsion entre les protons. L'état symétrique est dit liant. Au contraire l'état antisymétrique est dit antiliant.



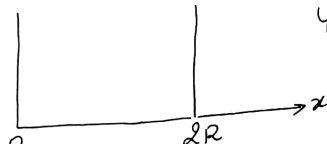


## Exo 19: Corail quantique

a.  $|\Psi|^2$  représente la densité de probabilité de présence de l'électron

le microscope à effet tunnel capte un courant dont l'intensité est proportionnelle à la densité moyenne d'électrons en face d'elle, donc à  $|\Psi|^2$ .

b.



$$\varphi''(x) + k^2 \varphi(x) = 0$$


où  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$\varphi(x) = A \sin(kx) = \sqrt{\frac{2}{2R}} \sin kx$$

$$\sin(k \cdot 2R) = 0 \Rightarrow 2kR = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{2R} \Rightarrow E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m \cdot 4R^2}$$

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{8mR^2}$$



$n=2$   
 $n=1$

c.  $\varphi_n^2$  présente  $n$  maxima ici  $n=9$ .

$$E = \frac{81 \pi^2 \hbar^2}{8mR^2} \rightarrow E = 2,4 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,15 \text{ eV}$$

En réalité pour tenir compte de l'interaction des  $e^-$  avec les cations, il faudrait prendre la masse effective de l' $e^-$   $m^* \neq m$ .

d. non. on voit  $|\Psi|^2$  il se peut que  $\varphi(r) \exp(iF(\theta))$  avec  $F$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .  
en gel états stationnaires en

$$\varphi(r, \theta) = A J_l \left( \frac{\sqrt{2mE_n e}}{\hbar} \frac{r}{R} \right) \exp(i l \theta)$$

$J_l(0) = 0$  sauf pour  $l=0 \rightarrow$  c'est le cas ici.

e.  $\psi(r, \theta, t) = \psi(r) f(t)$   $f(t) = A \exp(-i \frac{E}{\hbar} t)$

$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = E \psi$   $i\hbar V = 0$

$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = E \psi$

$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0$

on pose  $r = \frac{\hbar}{\sqrt{2mE}} u$  et  $\psi(r) = F(u)$

$F''(u) + \frac{1}{u} F'(u) + F(u) = 0$

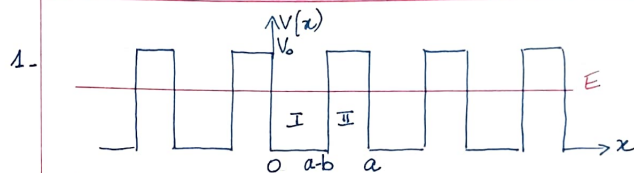
$\Rightarrow F(u) = A J_0(u)$

$|\psi|^2 \propto J_0^2(u) = J_0^2\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} r\right)$

Sur la figure, au bord on a  $u = 15$   
(regarder à gauche 5<sup>e</sup> annulation)

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} R = 15 \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \times 15^2 = 0 \quad \boxed{E = 0,17 \text{ eV}}$

Exo 21: Modèle du cristal unidimensionnel



2. domaine I  $0 < x < a-b$

$\psi''(x) + k^2 \psi(x) = 0$  où  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

$\psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$

domaine II  $a-b < x < a$

$\psi''(x) - q^2 \psi(x) = 0$  où  $q^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$

$\psi(x) = C e^{qx} + D e^{-qx}$

3.  $\psi(x=a-b)^- = \psi(x=a-b)^+ \Rightarrow A e^{ik(a-b)} + B e^{-ik(a-b)} = C e^{q(a-b)} + D e^{-q(a-b)}$   
 $\psi'(x=a-b)^- = \psi'(x=a-b)^+ \Rightarrow ik(A e^{ik(a-b)} - B e^{-ik(a-b)}) = q(C e^{q(a-b)} - D e^{-q(a-b)})$

La solution  $\psi(x) = e^{ikx} u(x)$  avec  $u(x)$  périodique de période  $a$  assure

$|\psi(x+pa)|^2 = |u(x+pa)|^2 = |u(x)|^2 = |\psi(x)|^2$

la densité de probabilité de présence est périodique de période  $a$ , comme le réseau.

4.  $\psi(x+ta) = e^{ik(x+ta)} u(x+ta) = e^{ika} \psi(x)$

La continuité de  $\psi$  en  $x=a$  assure

$\psi(x=a^-) = \psi(x=a^+) \Rightarrow \psi(x=a^-) = e^{ika} \psi(x=0^+)$

$C e^{qa} + D e^{-qa} = e^{ika} (A+B)$

et la continuité de  $\varphi'$  en  $x=a$  assure

$$\varphi'(x=a^-) = \varphi'(x=a^+) = \varphi'(x=0^+) e^{ika}$$

$$q(Ce^{qa} - De^{-qa}) = e^{ika} (A-B) ik$$

5. une solution non nulle existe si le déterminant du système :

$$\begin{cases} A e^{ik(a-b)} + B e^{-ik(a-b)} - C e^{q(a-b)} - D e^{-q(a-b)} = 0 \\ i k e^{ik(a-b)} A - i k e^{-ik(a-b)} B - q C e^{q(a-b)} + q D e^{-q(a-b)} = 0 \\ e^{ika} A + e^{-ika} B - C e^{qa} - D e^{-qa} = 0 \\ i k e^{ika} A - i k e^{-ika} B - q C e^{qa} + q D e^{-qa} = 0 \end{cases} \text{ est nul.}$$

$$\Downarrow \cos ka = \cos(qb) \cos(k(a-b)) - \frac{q^2 + k^2}{2kq} \sin(qb) \sin(k(a-b))$$

6. Dans la limite  $b \rightarrow 0$  avec  $V_0 \rightarrow \infty$  et  $bV_0 = Y$  fixé alors  $qb = \frac{Y}{V_0} \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \rightarrow 0$

$$\text{d'où } \cos ka \approx \cos ka - \frac{2mV_0}{\hbar^2} \times qb \times \sin a$$

$$\cos ka = \cos ka - Q \frac{\sin ka}{ka} \quad \text{où } Q = \frac{mYa}{\hbar^2}$$

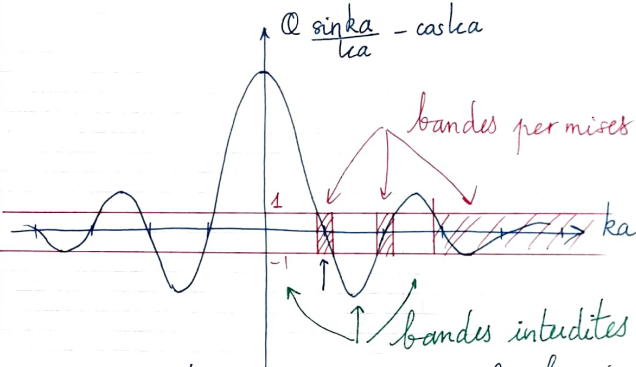
$$\text{Pour } Q \rightarrow 0 \quad \cos ka = \cos ka \Rightarrow k_p = \pm K + \frac{2p\pi}{a}$$

$$\text{soit } E_{K,p} = \frac{\hbar^2}{2m} \left( K \pm \frac{2p\pi}{a} \right)^2$$

$$\text{Pour } Q \rightarrow \infty \quad \frac{\sin ka}{ka} \rightarrow 0 \quad \text{ie } ka = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} n^2 \quad : \text{ on retrouve les solutions habituelles du puits infini.}$$

7. Pour une valeur de  $Q$  quelconque, il existe des valeurs de  $k$  (donc de  $E$ ) pour lesquelles le membre de droite n'est pas compris dans  $[-1; 1]$  et l'égalité ne peut alors pas être satisfaite. Cela correspond à des bandes d'énergie interdites.



On comprend que si  $Q \rightarrow \infty$ , les bandes permises deviennent très étroites, autour des valeurs  $ka = n\pi$ .

Au contraire si  $Q \rightarrow 0$  il n'y a plus de limitation sur les énergies possibles de l'électron.

## Exo 22-23: Effet Josephson

1. La paire d'électrons traverse par effet tunnel la barrière isolante entre les deux supraconducteurs. Les électrons sont appariés, la charge de la paire de Cooper est  $-2e$ .

2. Pour une tension  $V_1 - V_2$  continue

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{2e}{\hbar} (V_1 - V_2) t + \phi_0$$

$\Rightarrow I = I_0 \sin(\phi_1 - \phi_2) = I_0 \sin\left(\frac{2e}{\hbar} (V_1 - V_2) t + \phi_0\right)$   
est un courant sinusoïdal de fréquence

$$f = \frac{e}{\pi \hbar} (V_1 - V_2) \quad \text{qui ne dépend pas de la nature des supraconducteurs}$$

utilisés mais uniquement de  $V_1 - V_2$  et de constantes fondamentales.

3. La mesure de fréquence, très précise grâce aux horloges atomiques permet une mesure très précise des tensions.

4. Lorsque  $V_1 - V_2 > 0$   $\phi_1 - \phi_2 = \phi_0 = c \text{te}$   $\Rightarrow$  un courant continu circule entre les deux supraconducteurs.

5. Selon le texte, le champ magnétique modifie les phases, ce qui génère une tension  $V_1 - V_2$ .

## Exo 24: Dém<sup>o</sup> de l'inégalité de Heisenberg spatiale

$$1. \Delta x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi|^2 dx$$

$$\Delta p^2 = -\frac{\hbar^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx$$

$$2. I(d) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x\psi + \lambda \hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}|^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi|^2 + 2\lambda \hbar x \left[ \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \lambda^2 \hbar^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx$$

$$I(d) = \langle x^2 \rangle + 2\lambda \hbar \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\partial (\psi \psi^*)}{\partial x} dx + \hbar^2 \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx$$

$$I(d) = \langle x^2 \rangle + 2\lambda \hbar \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi|^2 dx - \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi|^2 dx \right) + \hbar^2 \lambda^2 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx \right)$$

$$\boxed{I(d) = \langle x^2 \rangle - 2\lambda \hbar + \hbar^2 \lambda^2 \langle p^2 \rangle}^{-1}$$

$$3. I(d) \geq 0 \Rightarrow \Delta = \hbar^2 \lambda^2 - 4 \Delta x^2 \Delta p^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$