Exercices d'oral de Physique : Naine blanche

16 juin 2024

Enoncé :

On s'intéresse aux naines blanches, étoiles en fin de vie qui deviennent très denses et très compactes. Dans cette situation, on considère que les protons et les électrons sont des sphères dures qui se touchent.

1. Quelle interaction permet la stabilité de la naine blanche ?
2. On considère que la naine blanche a la masse du Soleil. Calculer son rayon R.

Déroulé :

Commentaires : En entrant, l'examinateur avait noté trois masses au tableau : celle du proton, celle de l'électron, et une autre que je devais deviner qui correspondait à la masse du Soleil. C'est alors qu'il me décrit ce qu'est une naine blanche, avant de me poser la première question. Je réfléchis et je réponds qu'il me paraissait plus intuitif que ce soit l'interaction gravitationnelle, sachant que l'on considérait que la naine blanche était globalement neutre. C'est alors que l'on passe à la deuxième question. Je n'arrive malheureusement pas à me souvenir si cette deuxième question était motivée par la première ou si elle était totalement indépendante. Pour y répondre, je commence par faire des approximations en disant qu'en faisant le rapport du volume de l'étoile et celui d'une des "sphères dures"(j'ai considéré qu'on avait le même rayon r pour les protons et les électrons), on obtenait le nombre de particules, que l'on pouvait aisément relier à la masse de l'étoile, soit $(\frac{R}{r})^3 = N_{particules} = \frac{2M_{etoile}}{m_e+m_p}$.
C'est alors que je choisis de prendre r de l'ordre du femtomètre. L'examinateur me dit que ce n'est pas absurde, mais que l'on pouvait le calculer explicitement en exprimant le fait que l'étoile était à l'équilibre. C'est alors que je suggère de calculer son énergie potentielle et de calculer les points critiques de cette dernière. Il me dit alors (ce que je n'ai pas bien compris) que vu que l'on va voir des phénomènes quantiques apparaître on allait plutôt regarder l'énergie mécanique.
Il me demande alors comment calculer l'énergie cinétique, et je propose d'utiliser des méthodes de physique statistique, ce qui n'avait pas l'air de le satisfaire. Je propose alors d'utiliser Heisenberg dans son cas d'égalité, et c'était ce qu'il attendait. Mais il me demande de justifier pourquoi je pouvais prendre le cas d'égalité. Je pense alors immédiatement à parler de paquets d'ondes gaussiens, sans voir le rapport avec l'exercice. Il voulait quelque chose de plus "physique". Il m'a laissé galérer 5-10 mn sur la question, avant que je parle sans grande conviction de niveaux d'énergie. Il me dit qu'effectivement, les particules se rapprochant de leur état fondamental étaient proches du cas d'égalité (je n'ai toujours pas compris pourquoi).
Après, c'était plus facile : j'ai dit que $\langle p^2 \rangle = (\Delta p)^2$ par symétrie et j'ai calculé sans problème l'énergie cinétique.
Pour l'énergie potentielle, j'ai eu du mal sur le calcul, commençant par d'horribles sommes multiples incalculables. Il me suggère de modéliser la situation avec une distribution volumique uniforme de masse. Le calcul restait compliqué, dans la mesure où en intégrant l'énergie potentielle de chaque élément de volume, je comptais des choses plusieurs fois.
Il me dit alors qu'il est possible de découper intelligemment la boule de sorte à éviter ce problème. Je réfléchis quelques minutes et je propose d'intégrer sur chaque couronne entre r et $r+\mathrm{d}r$ l'énergie potentielle due à l'intérieur de la couronne.
L'oral s'est terminé par le calcul de cette énergie, de la dérivée de l'énergie mécanique, et la détermination du rayon. En application numérique, je trouvais du $10^4 m$

Proposition de correction :

Du fait de la compression de la matière, chaque électron est confiné dans un espace minuscule et sa position est en conséquence très bien définie. Mais, d'après la mécanique quantique, le prix à payer est une grande incertitude sur la vitesse de la particule.

Les électrons sont donc animés de mouvements très rapides et leur agitation donne naissance à un nouveau type de force de pression, d'origine purement quantique, appelée la pression de dégénérescence. Celle-ci s'oppose à l'effondrement de l'étoile et rétablit l'équilibre avec la force de gravité. L'étoile est devenue une naine blanche.

Il est facile d'en estimer grossièrement la taille.

1. Ces astres tirent leur équilibre de la compensation entre deux types de forces : les forces attractives de la gravité et les forces répulsives d'origine quantiques résultant du confinement des électrons dans un volume réduit.
2. Faisons des calculs d'ordre de grandeur.
   Soit N le nombre total de noyaux atomiques de l'étoile, pris comme des protons de masse m_H pour simplifier. La masse totale de l'étoile est :
   $$M = Nm_H$$
   Ces N particules sont réparties dans un volume R^3, grossièrement parlant, si R est le rayon de l'étoile. En conséquence est alloué à chacun un cube élémentaire de volume R^3/N. La distance mutuelle a moyenne de deux particules voisines est de l'ordre de la longueur d'arête de ce cube, c'est-à-dire :
   $$a = (R^3/N)^{1/3} = R/N^{1/3}$$
   Cette distance est aussi la distance moyenne qui sépare deux électrons. En vertu des relations de mécanique quantique (inégalité d'Heisenberg), il correspond à cette quantité a une impulsion
   $$m_e v = \hbar/a$$
   où m_e est la masse de l'électron et $\hbar$ la constante de Planck réduite. L'énergie cinétique moyenne par électron est donc :
   $$(1/2)mev^2 = \hbar^2/(2m_e a^2)$$
   En remplaçant a par sa valeur, cette énergie s'exprime en fonction du rayon R de l'étoile comme
   $$(1/2)m_e v^2 = \hbar^2 N^{2/3}/(2m_e R^2)$$
   À cette énergie d'agitation s'oppose l'énergie gravitationnelle qui, pour toute l'étoile est de l'ordre de $-GM^2/R$, G étant la constante de la gravitation, ce qui fait $-(1/N)GM^2/R$ par noyau ou encore,
   $$-GNm_H 2/R$$
   L'énergie totale moyenne par atome s'écrit donc :
   $$\hbar^2 N^{2/3}/(2m_e R^2) - GNm_H^2/R$$
   Cette énergie, différence d'un terme en ($1/R^2$) et d'un terme en ($1/R$) est particulièrement importante en physique, car c'est aussi la forme de l'énergie d'un électron dans le champ d'un proton. Le point crucial est que cette énergie possède un minimum, lequel correspond à un équilibre stable (d'où l'explication de la stabilité de l'atome d'hydrogène). Cet équilibre est réalisé au moment où le premier terme est égal à la moitié du second, ce qui correspond à la valeur du rayon
   $$R = \hbar^2/[Gm_e m_H^2 (M/m_H)^{1/3}]$$
   Sachant qu'une naine blanche a environ la masse du Soleil (2×10^{30} kg), on trouve une valeur de son rayon de l'ordre de 6 000 km, c'est-à-dire la dimension de la Terre. Cet ordre de grandeur est correct. Il signifie incidemment que la masse d'un centimètre cube (un dé à coudre) de naine blanche se mesure en tonnes !

   Etant peu lumineuses, les naines blanches sont très difficiles à détecter, sauf celles qui se trouvent dans le voisinage du Soleil. En 1844, l'astronome allemand Friedrich Bessel se rendit compte que l'étoile la plus brillante du ciel nocturne, Sirius, n'était pas parfaitement fixe dans le ciel, mais oscillait légèrement. Il attribua cet effet à la présence d'une autre étoile, peu lumineuse, dont l'attraction gravitationnelle influençait le mouvement de Sirius.

Il fallut attendre 1862 pour que l'Américain Alvan Clark, avec de meilleurs moyens d'observation, puisse prendre une image de ce compagnon, Sirius B, la première naine blanche à être photographiée. Depuis, environ 500 corps de ce type ont été détectés, ce qui est très peu comparé au nombre total dans notre Galaxie, estimé à une dizaine de milliards.

La nébuleuse NGC 2440 contient en son centre la naine blanche ayant la température de surface la plus importante connue à ce jour.

La limite de Chandrasekhar

Toutes les naines blanches n'ont pas la même taille. Plus une naine est massive, plus la pression et la densité requises pour résister à la gravité sont grandes, donc plus la taille finale est faible.

Mais la pression de dégénérescence des électrons ne peut pas supporter une masse arbitrairement grande. Dans les années 1930, l'astrophysicien indien Subrahmanyan Chandrasekhar mit en évidence sur le plan théorique qu'elles n'étaient capables de résister à l'effondrement que si leur masse était inférieure à 1,4 fois celle du Soleil.

En tenant compte des pertes de matière par vent stellaire, cela signifie qu'une étoile ordinaire de la séquence principale ne peut atteindre le stade de naine blanche que si sa masse avant son effondrement final est inférieure à environ huit fois celle du Soleil.

Etoile à neutrons

L'équilibre d'une étoile à neutrons obéit formellement aux mêmes lois, à ceci près que le degré de compacité est tel que nous n'avons plus affaire à des électrons car ceux-ci se sont recombinés aux noyaux pour former des neutrons de masse m_H . Notre étoile est maintenant constituée de neutrons et pour trouver son rayon il convient de remplacer m_e , la masse de l'électron, par m_H , celle du neutron, dans la formule. On trouve une valeur un millier de fois plus faible, de l'ordre maintenant de quelques kilomètres. La masse par unité de volume est, elle, un milliard de fois plus grande, de l'ordre de grandeur, absolument phénoménal, de la densité du proton lui-même !