Exercices : transferts thermiques par diffusion

Exercice TT 1 Conduction thermique entre deux sphères concentriques

On considère un matériau homogène compris entre deux sphères concentriques de centre O, de rayon a et b avec $a < b$, de conductivité thermique λ, de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ. Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures T_1 en $(r = a)$ et T_2 en $(r = b)$ et on suppose $T_1 > T_2$.

1. En effectuant un bilan thermique entre deux sphères de rayons voisins r et $r + dr$, écrire l'équation aux dérivées partielles que vérifie la température T en un point M à l'instant t.
2. Déterminer en régime permanent la température $T(r)$ en tout point du matériau, la puissance P transférée entre les deux sphères de rayon a et b et la résistance thermique du conducteur.

Exercice TT 2 Pertes latérales

Une barre cylindrique de longueur ℓ et de section S est constituée d'un matériau de conductivité thermique λ. Les températures aux deux extrémités sont maintenues constantes (T_1 et T_2). La barre échange avec l'extérieur à température T_0, au niveau de sa surface latérale de température $T(x)$ une puissance thermique par unité de longueur $P = \alpha(T - T_0)$. On supposera que la température est uniforme dans toute section de la barre. Déterminer en régime permanent la répartition de température $T(x)$.

Exercice TT 3 Double vitrage : résistance thermique

On ne considère que des régimes permanents. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S, orthogonale à l'axe (Ox), et dont le verre a une conductivité thermique λ. Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_i > T_e$.

1. La paroi vitrée est une simple vitre d'épaisseur e. Donner l'expression du flux thermique ϕ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de S, e, λ, T_i et T_e. En déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} de la vitre.
2. La paroi est maintenant un ensemble de deux vitres de même épaisseur e, séparées par une épaisseur e' d'air de conductivité thermique λ'. On ne tient compte que de la conduction. Donner l'expression du flux thermique ϕ_2 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de S, e, λ, e', λ', T_i et T_e. Donner l'expression de ϕ_2/ϕ_1.
   A.N. $T_e = 270$ K, $T_i = 292$ K, $e = e' = 3$ mm, λ= 1,2 W.m^{-1}.K^{-1} et $\lambda' = 0{,}025$ W.m^{-1}.K^{-1}.
   Calculer ϕ_2/ϕ_1 et T_1 et T_2 les températures des faces intérieures des deux vitres. Représenter graphiquement les variations de températures dans le double vitrage.
3. En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air extérieur. Une surface de verre de surface S, à la température T_v échange avec l'air à la température T_a le flux thermique : $\phi = hS(T_v - T_a)$ avec $h > 0$.
   (a) Quelle était la valeur implicite donnée précédemment à h.
   (b) Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique dont on donnera l'expression.

(c) Soit h_e le coefficient de transfert thermique de surface entre le verre et l'air extérieur et h_i le coefficient de transfert thermique de surface entre le verre et l'air de la pièce. On prendra $h_e = 14$ W.m^{-2}.K^{-1} et $h_i = 10$ W.m^{-2}.K^{-1}. Justifier le fait que $h_e > h_i$. Exprimer les flux ϕ_1' et ϕ_2' correspondant ici au cas du simple et du double vitrage. Calculer ϕ_2'/ϕ_1'. Conclusion ?

Exercice TT 4 Température de contact

On considère dans cet exercice des matériaux homogènes et isotropes. L'échantillon étudié est constitué de deux matériaux successifs soudés, de section $S = 1\text{cm}^2$ et isolés thermiquement. Le premier milieu est de l'aluminium, de longueur $\ell_1 = 1$ m et de conductivité thermique λ_1= 200 W.m^{-1}.K^{-1}. Le deuxième milieu est du cuivre, de longueur $\ell_2 = 1{,}5$ m et de conductivité thermique λ= 380 W.m^{-1}.K^{-1}. Les deux températures extrêmes sont $T_0 = 300$ K et $T_2 = 500$ K. Déterminer la température de contact T_1 en régime permanent.

Exercice TT 5 Diffusion d'un pic de température

Soit une tige isolée et homogène, de section S constante et suffisamment longue pour que le problème des conditions aux limites à ses extrémités ne se pose pas. A l'instant initial, la répartition de température est une fonction gaussienne de x :

$$T(x,0) = T_0 + \theta \exp\left(-\frac{x^2}{\ell_0^2}\right)$$

1. Vérifier que

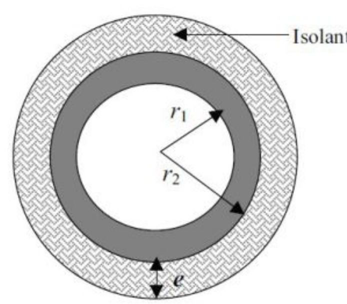
$$T(x,t) = T_0 + \frac{\theta}{\sqrt{1+\frac{4Dt}{\ell_0^2}}} \exp\left(-\frac{x^2}{\ell_0^2 + 4Dt}\right)$$

est solution de l'équation de la diffusion.

2. Définir et calculer la largeur $\ell(t)$ du pic de température à l'instant t.
3. Peut-on vérifier rapidement que la solution respecte la conservation de l'énergie ?

Exercice TT 6 Isolation d'une conduite de vapeur

On considère une conduite cylindrique en acier de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 et de longueur $L = 2$ m. On note λ_a la conductivité thermique de l'acier. Elle canalise une vapeur surchauffée de température $T_i = 650$ °C. L'air extérieur est à la température $T_e = 20$ °C. On isole cette canalisation à l'aide d'un isolant d'épaisseur e, de forme cylindrique et de conductivité thermique λ_i .



1. Déterminer les résistances thermiques de conduction de la conduite en acier et de l'isolant.
2. On note h_{int} le coefficient de convection entre la vapeur d'eau et l'acier et h_{ext} le coefficient de convection entre l'isolant et l'air extérieur. En utilisant la loi de Newton, déterminer les résistances de convection de la conduite ainsi isolée.
3. Déterminer la résistance thermique équivalente, notée R_{th-eq}, de la conduite ainsi isolée.
4. Etudier les variations de R_{th-eq} et discuter de l'utilité de l'isolant dans les deux cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ où $\alpha = r_2 h_{ext}/\lambda_i$.

Exercice TT 7 Diffusion thermique à travers un manchon cylindrique

On considère un tube métallique de longueur supposée infinie, dont les rayons intérieur et extérieur sont notés respectivement r_i et r_e. La température extérieure de ce tube est maintenue constante à la valeur T_e=25 °C. Une résistance électrique dégage, à l'intérieur du tube une puissance linéique P, constante selon la longueur du tube. On s'intéresse à la diffusion radiale de la chaleur dans le tube. On note λ la conductivité thermique du métal supposée constante et T la température en Kelvin.

1. Exprimer le flux thermique radial à l'intérieur du tube et déterminer l'équation différentielle vérifiée par la température en régime stationnaire.
2. Montrer que l'on peut exprimer le coefficient λ de la loi de Fourier en fonction de la puissance linéique dégagée par la résistance électrique et de la température T_i à l'intérieur du tube.
   A.N. : r_i=5 mm, r_e=6 mm, T_i=25,3°C, puissance linéique P=1000 W.m^{-1}. Calculer λ.
3. Quelle analogie peut-on établir avec une expérience d'électrocinétique utilisant la même géométrie ?
   (a) On précisera la relation analogue à la loi de Fourier et les grandeurs analogues à j_{th}, T et λ.
   (b) Définir et calculer la conductance thermique d'une hauteur H de cylindre.

Exercice TT 8 Barreau d'Uranium

Un barreau d'uranium a la forme d'un cylindre de rayon $a = 1$ cm. Des réactions nucléaires y produisent une puissance thermique p par unité de volume. La conductivité thermique de l'uranium, dans le domaine de température considéré est λ= 38 W.m^{-1}.K^{-1}. Déterminer la puissance maximale (rapportée à l'unité de volume) que l'on peut extraire du barreau si l'on ne veut pas que la température dépasse la valeur de 600 °C à l'intérieur du barreau. La température de surface est fixée à 400 °C. L'étude se fera en régime stationnaire.

Exercice TT 9 Homéothermie

Un animal est dit *homéotherme* si il peut maintenir sa température constante. On propose une évaluation de l'énergie nécessaire. Une sphère est maintenue en permanence à la température T_1 dans un milieu fluide qui, à grande distance de la sphère est à la température $T_0 < T_1$. La conductivité thermique du fluide est notée λ. On néglige toute discontinuité de température à la surface de la sphère et on se place en régime permanent.

1. Expliciter la puissance P_{th} produite par la sphère pour maintenir sa température constante, en fonction des données.
2. On donne T_1=310 K, $T_0 = 280$ K et R=25 cm (comparable à un être humain). Calculer P_{th} si le fluide est de l'air (λ=2,6 10^{-2} W.m^{-1}.K^{-1}). Comparer à la puissance disponible pour un homme dont la ration journalière est de 2800 kcal (on rappelle qu'une calorie est définie par 1 cal=4,18 J).
3. L'homéothermie est-elle plus aisée pour un petit animal ou un gros ?

Exercice TT 10 Igloo

Quelle épaisseur e faut-il donner à un igloo pour survivre ?
On pourra envisager les cas d'un igloo de diamètre 2m ou 4m. La conductivité thermique de la neige tassée est λ= 0,05 W.K^{-1}.m^{-1}. La puissance dégagée par un être humain est $P_0 = 50$ W. On supposera que la température extérieure est de $T_{ext} = -10$ °C et que la survie est assurée si $T_{int} = 10$ °C.

Exercice TT 11 Géothermie

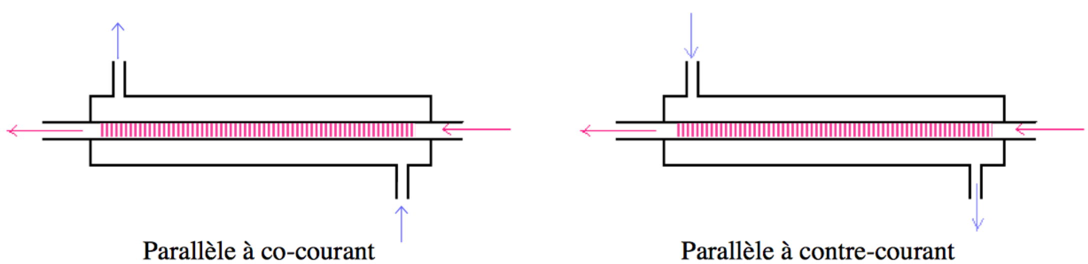
La Terre est assimilée à une boule de rayon R= 6400 km de conductivité thermique λ indépendante de la température. On suppose que l'origine de l'énergie libérée à l'intérieur du globe terrestre est une désintégration radioactive de certaines roches qui libère une puissance volumique p répartie uniformément. On observe que, au voisinage de la surface terrestre, la température s'accroit de 1 degré lorsque l'on s'enfonce de 32 m. On note :

$$\alpha = -\frac{dr}{dT}_{r=R} = 32\ m.K^{-1}$$

1. En faisant un bilan énergétique sur une sphère de rayon r, exprimer le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ en fonction de p et r. En déduire une relation entre p, λ, α et R.
2. Calculer la température à la distance r du centre de la Terre en fonction de R, α, r et de la température de surface T_0. A.N. : Calculer la température à une distance $R/2$ du centre de la Terre. Quel serait dans ce modèle simpliste la température au centre de la Terre ?

Exercice TT 12 Echangeur thermique à contre-courant ou à co-courant

Deux liquides circulent en sens contraire dans deux canalisations en contact sur une longueur L. On suppose que dans chaque canalisation, la température est uniforme dans une section. Le liquide 1, de capacité thermique c_1 et de débit massique D_1 arrive en A, $(x = 0)$, à la température $T_1(0)$ et ressort en B à la température $T_1(L)$. Le liquide 2, de capacité thermique c_2 et de débit massique D_2 arrive en B, $(x = L)$, à la température $T_2(L)$ et ressort en A à la température $T_2(0)$. La puissance cédée par le liquide 1 au liquide 2 dans une tranche dx de canalisation vaut $dP = \alpha(T_1(x) - T_2(x))dx$ avec $\alpha > 0$.



1. Justifier la forme de dP.
2. Etablir les équations différentielles vérifiées par $T_1(x)$ et $T_2(x)$ en régime permanent.
3. Dans le cas où $D_1c_1 = D_2c_2$, exprimer $T_2(0)$ en fonction de $T_1(0)$, $T_2(L)$ et des données du problème. Comment obtenir $T_2(0)$ aussi voisin que possible de $T_1(0)$?
4. Reprendre ces questions dans le cas où les fluides circulent dans le même sens. Comparer les deux systèmes.

Exercice TT 13 Ecoulement dans une canalisation
De l'eau s'écoule dans un tuyau cylindrique de rayon R, dont la paroi est à température constante et uniforme T_0. Le débit massique de l'eau est D_m, la capacité thermique massique à pression constante est c_p. Les échanges thermiques sont modélisés par un coefficient de transfert h. En supposant l'écoulement unidimensionnel déterminer sa température en fonction de x, si on note T_1 la température de l'eau à l'entrée du tuyau.

Exercice TT 14 Irréversibilité

Une enceinte calorifugée contient un solide S_1 de capacité thermique C_1 et de conductivité thermique infinie, à la température T_1 et un solide S_2 de capacité thermique C_2 et de conductivité thermique infinie, à la température T_2 reliés par un tube de section S de longueur ℓ et de capacité thermique négligeable. A $t = 0$, $T_1 = T_{1_0}$ et $T_2 = T_{2_0} > T_{1_0}$.

1. Commenter le fait que la capacité thermique du tube soit nulle.
2. Commenter le fait que les conductivités thermiques des solides soient très grandes.
3. Etablir les lois $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
4. Calculer la variation d'entropie et la commenter.

Exercice TT 15 Bilan d'entropie

Une barre homogène de longueur L est entourée par des parois adiabatiques. On impose aux extrémités les températures respectives T_A et T_B.

1. Quelle est le profil de température $T(x)$ dans la barre à l'équilibre (état 1) ?
2. On enlève les thermostats (T_A et T_B) que l'on remplace par des parois adiabatiques. Que se passe-t-il ? Quelle est le nouveau profil de température $T(x)$ dans la barre à l'équilibre (état 2) ?
3. Calculer la variation d'entropie de la barre entre l'état 1 et l'état 2, si T_A est proche de T_B ?

(réponse : $\Delta S = \rho S c_p L[(T_A - T_B)^2/24T_B^2]$

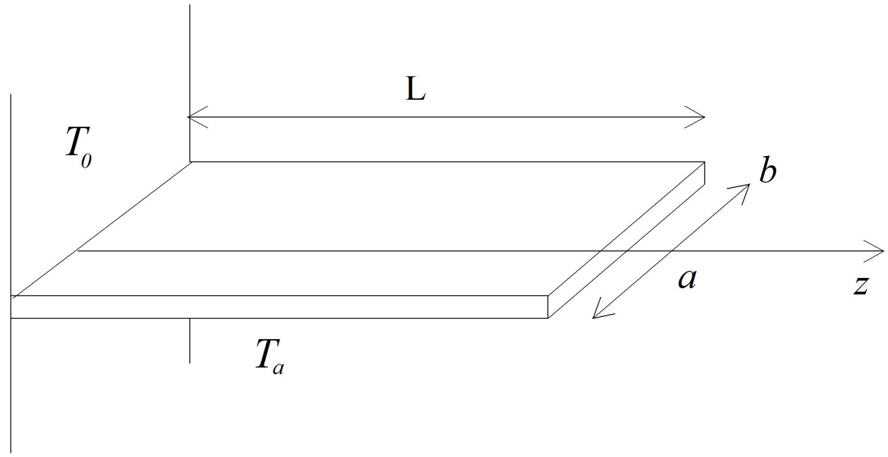
Exercice TT 16 Conduction thermique et création d'entropie

Un solide indilatable de masse volumique μ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ a une distribution de température $T(z,t)$ non homogène dépendant de z et t uniquement.

1. Ecrire le premier principe à une tranche d'épaisseur dz du solide
2. Appliquer le second principe à cette même tranche et calculer le taux volumique de création d'entropie en fonction de T, λ et $\frac{\partial T}{\partial z}$.
3. Généraliser le résultat à une distribution quelconque de température.

Exercice TT 17 Ailette de refroidissement

On considère une ailette de refroidissement constituée du matériau de conductivité thermique λ, de section rectangulaire de côtés a et b et de longueur L. Elle est fixée à une paroi à température T_0 et baigne dans un milieu à température T_a. L'échange de chaleur entre un point de l'ailette à température T et le milieu ambiant se fait par conducto-convection, avec un coefficient conducto-convectif h. On supposera $b \ll a$ et on posera $m^2 = 2h/b\lambda$. La température T sera supposée homogène dans une section de l'ailette.



1. Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit en régime permanent la température $T(z)$ de l'ailette en faisant un bilan d'énergie entre deux sections de cotes z et $z + dz$.
2. Préciser la condition aux limites en $z = L$. Résoudre complètement cette équation différentielle.
3. Quelle serait la loi $T(z)$ si l'ailette avait une longueur infinie ? Evaluer une condition portant sur L et m pour que l'ailette réelle puisse être assimilée de façon acceptable à une ailette de longueur infinie.
4. Quelle est la quantité de chaleur évacuée par unité de temps par l'ailette de longueur L ? Quelle serait la quantité de chaleur évacuée par unité de temps par une ailette infinie ? sans ailette ?

Exercice TT 18 Eau fraîche dans une gourde

On considère une gourde de forme cylindrique (rayon R, hauteur h) réalisée dans un matériau métallique de conductivité thermique λ et d'épaisseur e. Sa contenance est de 1 L. On la remplit avec de l'eau de température initiale 280 K alors que la température extérieure est de 300 K. Estimer la durée caractéristique du réchauffement de l'eau dans la gourde. Pour quelles valeurs de R et h ce temps est-il le plus long ? Pourquoi dispose-t-on un linge mouillé autour de la gourde dans les pays chauds ? Evaluer le nouveau temps de réchauffement.

Exercice TT 19 Effet Joule

Une barre conductrice calorifugée de longueur L, de section S, de conductivité électrique γ, et de conductivité thermique λ, est parcourue par un courant d'intensité I(uniformément réparti). On se place en régime permanent.

1. Déterminer $T(x)$. Les températures imposées aux extrémités sont T_1 et T_2.
2. Représenter $T(x)$ pour quelques valeurs de I et discuter.

Exercice TT 20 Cylindre parcouru par un courant électrique

On considère un conducteur cylindrique (électrique et thermique) d'axe (Ox), de rayon r et de longueur L de section droite d'aire S de surface latérale d'aire Σ. Le conducteur est supposé homogène et isotrope. On note μ sa masse volumique, c sa capacité thermique massique, λ sa conductivité thermique et σ sa conductivité électrique.

1. La surface latérale du cylindre est calorifugée. Les extrémités sont maintenues aux températures T_1 et T_2 constantes. Le conducteur est traversé par un courant d'intensité I dans le sens des x croissants. trouver l'équation satisfaite par $T(x)$ en régime permanent. En déduire $T(x)$. On posera $A = \frac{I^2}{\sigma\lambda S^2}$.
   Etudier les variations de j_Q avec x. On supposera $T_1 > T_2$.

2. La paroi latérale n'est plus calorifugée, mais on calorifuge les extrémités. La puissance thermique perdue à travers la surface latérale est décrite par un coefficient conducto-convectif h. On note T_a la température de l'air. Quelle est l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$?
3. On suppose que la résistivité du matériau dépend de la température selon la loi suivante :$\rho = \frac{1}{\sigma} = \rho_0(1 + a(T - T_0))$ où a est un coefficient constant et T_0= 273 K. On pose :

$$< T > (t) = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,t)dx$$

$$\theta(t) =< T > (t) - T_a$$

Montrer que θ vérifie l'équation :

$$\tau\frac{d\theta}{dt} + \left(1 - \frac{I^2}{I_C^2}\right)\theta = \frac{I^2}{I_C^2}\left(\frac{1}{a} + T_a - T_0\right)$$

Donner les expressions des constantes τ et I_c et vérifier leur homogénéité.
4. On suppose $\theta = 0$ pour $t = 0$. Discuter de l'évolution en fonction de la valeur de I.

Exercice TT 21 Température de contact

Deux barres calorifugées, de même section S, ont des températures initiales T_1 et $T_2 > T_1$, des capacités thermiques massiques c_1 et c_2, des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et de conductivités thermiques λ_1 et λ_2. On se propose de déterminer la température T_0 à la jonction en x=0. Les barres sont considérées comme infinies.

1. Dans un modèle simple, on introduit deux longueurs dépendant du temps $\ell_1(t)$ et $\ell_2(t)$ telles que :
   — $T = T_1$ pour $x < -\ell_1(t)$
   — T est une fonction affine de x pour $-\ell_1(t) < x < 0$
   — T est une fonction affine de x pour $0 < x < \ell_2(t)$
   — $T = T_2$ pour $x > \ell_2(t)$
   On admet que la température de contact reste constante au cours du temps. Exprimer T_0 en fonction de T_1, T_2 et des $\alpha_i = \sqrt{\rho_i c_i \lambda_i}$.
2. On rappelle que la fonction :

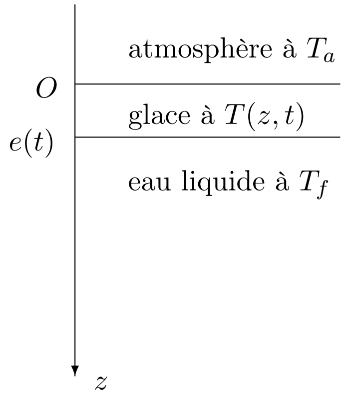
$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp(-y^2)dy$$

avec $u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ et $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ est solution de l'équation de la chaleur. De plus $\lim_{u\to 0}\text{erf}(u) = 0$ et $\lim_{u\to+\infty}\text{erf}(u) = 1$. Déterminer $T(x,t)$ et retrouver le résultat précédent.

Exercice TT 22 Gel d'un lac

On étudie la cinétique de refroidissement d'une couche de glace d'épaisseur $e(t)$ à la surface d'un lac. L'eau du lac est à la température de fusion T_f pour $z > e(t)$, l'air est à une température $T_a < T_f$. On se place dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, c'est à dire qu'on suppose que le profil de température $T(z,t)$ dans la glace est le même que si le régime était stationnaire. On donne T_f = 273 K, la chaleur latente de fusion de la glace ℓ_f = 330 kJ.kg^{-1}, la capacité thermique massique de la glace c = 2,1 kJ.kg^{-1}.K^{-1}. On note λ la conductivité thermique de la glace et μ sa masse volumique.

1. On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac.



(a) Exprimer le flux thermique ϕ traversant une couche de glace de surface S dans le sens des z décroissants en fonction de $e(t)$, λ, S, T_a et T_f.

(b) En faisant un bilan pour la couche d'eau qui gèle entre t et $t+dt$, établir l'équation différentielle vérifiée par e :

$$e\frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_f - T_a)}{\mu \ell_f}$$

(c) Déterminer $e(t)$ en prenant $e(t=0) = e_0$.

(d) On évalue le temps caractéristique τ d'évolution de l'épaisseur de la glace en posant

$$\frac{e}{\tau} \approx \frac{de}{dt}$$

Discuter la validité de l'ARQS en fonction de la valeur de $T_f - T_a$.

2. En réalité, l'échange thermique entre la glace et l'atmosphère est plutôt conducto-convectif. En notant T_s la température de surface de la glace, on donne la loi de Newton

$$\phi = hS(T_s - T_a)$$

où h est une constante.

(a) Exprimer T_s en fonction de e, h, λ, T_a et T_f.

(b) Comment doit être e_0 pour que l'on puisse considérer que le calcul de $e(t)$ précédent est encore valable ?

Exercice TT 23 Evaporation d'une goutte d'eau

On considère une gouttelette d'eau sphérique que l'on suppose à une température $T = 100°C$ uniforme dans toute la gouttelette. Le rayon de la gouttelette est de 5 μm. On se place dans une atmosphère calme à 300°C loin de la gouttelette. On donne $\rho = 960$ kg.m^{-3} la masse volumique de l'eau, $\lambda = 0{,}046$ SI la conductivité thermique de l'air et $\ell_v = 2{,}26.10^6$J.kg^{-1} la chaleur latente de vaporisation de l'eau.

1. A l'aide d'un bilan thermique, établir une relation faisant intervenir notamment le flux de chaleur ϕ, ρ, ℓ_v et R.
2. Calculer $T(r)$ en régime quasi-permanent. En déduire $\phi(R)$.
3. Donner la loi d'évolution de R au cours du temps et en déduire le temps nécessaire pour vaporiser la gouttelette.

Exercice TT 24 Glaçon qui fond (variante de l'exo précédent)
On immerge un glaçon à la température de fusion $T_f = 0$ °C sphérique de rayon initial R_0 dans une grande masse d'eau à $T_0 = 10$ °C. Estimer le temps τ au bout duquel le glaçon a totalement disparu.
Données : $R_0 = 1$ cm, conductivité thermique $\lambda = 0{,}6$ W.m^{-1}.K^{-1}. Chaleur latente de fusion $\ell_f = 330$ J.g^{-1}. Densité de la glace par rapport à l'eau liquide 0,9.
Réponse : moyennant des approximations à préciser, on trouve : $\tau = \rho\ell_f R_0^2/2\lambda(T_0 - T_f)$ soit environ 40 min.

Exercice TT 25 Temps d'uniformisation d'un champ de température
Un matériau homogène de conductivité thermique λ et de diffusivité D est limité par deux faces planes de section A. La masse volumique de l'échantillon est μ et sa capacité thermique massique c. La longueur de l'échantillon est ℓ et on considère uniquement les transferts thermiques unidimensionnels dans la direction x.
On impose aux deux faces un température T_0 constante. A l'instant initial, la température de l'échantillon est :

$$T(x) = T_0 + \theta \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

avec $\theta>0$.

1. Tracer la fonction $T(x,0)$ et vérifier qu'elle satisfait les conditions aux limites.
2. Déterminer la solution $T(x,t)$ et en donner une représentation graphique.
3. En déduire $j_Q(x,t)$ et en donner une représentation graphique.
4. Calculer par deux méthodes différentes le transfert thermique total reçu par l'échantillon.

Exercice TT 26 L'age de la Terre par Kelvin

Le demi-espace $z > 0$ est occupé par un milieu homogène de diffusivité thermique D (avec $D = \lambda/\rho c_p$). La surface $z = 0$ est maintenue à température constante égale à T_1. A $t = 0$, la température du milieu est uniforme de valeur $T_0 \neq T_1$. Il s'agit de déterminer $T(z,t)$ pour $t > 0$ (problème résolu par Kelvin).

On introduit la fonction erreur :

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du$$

et on pose

$$\xi = \frac{z}{\sqrt{Dt}}$$

1. Quelle est la dimension de ξ ?
2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $T(z,t)$.
3. On cherche les solutions sous la forme $T = f(\xi)$. Montrer que
$$T(z,t) = T_1 + (T_0 - T_1)\,\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{Dt}}\right)$$
4. Montrer qu'à la surface :
$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{(T_0 - T_1)}{\sqrt{\pi D t}}$$

5. Application : On suppose que la Terre était une boule de fluide, bien brassée, c'est-à-dire à température uniforme, séparée de l'extérieur par une interface sur laquelle se produit la discontinuité de température. La boule se refroidit et quand sa température franchit le seuil de T_0 une écorce solide apparaît à l'interface, c'est la naissance de la Terre. Lord Kelvin a estimé $T_0 - T_1$=1500 K. On mesure aujourd'hui au delà de 20 m de profondeur $\frac{\partial T}{\partial z}= 4.10^{-2}$ K.m^{-1} et D = 1,52.10^{-7} m^2.s^{-1}. Estimer l'âge de la Terre. On a daté des roches de plus de 4.10^9 années. Commenter.
6. En évaluant numériquement une distance caractéristique des variations spatiales du champ de température, montrer que l'approximation de Kelvin d'une Terre plate n'est pas en cause.

Exercice TT 27 Ondes thermiques

Un milieu de conductivité thermique λ constante est situé dans le demi-espace $z < 0$. La surface à $z = 0$ est à la température $T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$. Déterminer la température $T(z,t)$ à tout instant dans le sol. Calculer l'épaisseur de pénétration de ces ondes thermiques pour des fluctuations journalières puis annuelles en prenant les valeurs numériques suivantes c = 800 J.kg^{-1}.K^{-1} , ρ = 3103kg.m^{-3} et λ = 0,4 W.m^{-1}.K^{-1}.

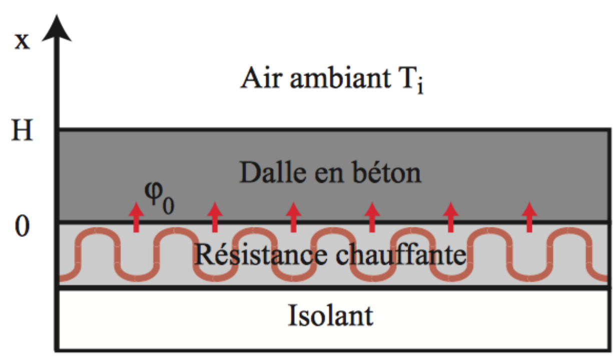
Exercice TT 28 Ondes thermiques (bis)

Un milieu de conductivité thermique λ constante est situé dans le demi-espace $z < 0$. La surface à $z = 0$ est à la température $T(0,t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$. La température dans le sol ($z < 0$) est alors modélisée par la forme $T(z,t) = T_0 + \theta(z,t)$. On chercher à déterminer $\theta(z,t)$.

1. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(z,t)$.
2. A la grandeur réelle $\theta(z,t)$, on associe la grandeur complexe $\underline{\theta}(z,t) = f(z)\exp(j\omega t)$. Donner l'équation différentielle vérifiée par f ainsi que sa solution générale.
3. Déterminer les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites.
4. En revenant en notation réelle, déterminer alors la solution complète au problème de départ. Interpréter physiquement cette solution.
5. Calculer l'épaisseur de pénétration de ces ondes thermiques pour des fluctuations journalières puis annuelles en prenant les valeurs numériques suivantes c = 800 J.kg^{-1}.K^{-1} , ρ = 3103 kg.m^{-3} et λ = 0,4 W.m^{-1}.K^{-1}.

Exercice TT 29 Chauffage d'une dalle en béton

Une dalle en béton, matériau de masse volumique μ, de conductivité thermique λ et de capacité thermique c forme le sol du rez de chaussée d'une maison.



1. Dalle chauffée en régime permanent
   La dalle est tout d'abord chauffée dans sa partie inférieure par une circulation d'eau chaude dans des tuyaux noyés dans le béton. On la modélise de la manière suivante :

— la dalle reçoit de la part de l'air un flux thermique surfacique $\varphi_{air \to dalle} = h[T_i - T(H)]$
— la dalle reçoit sur sa surface inférieure ($x = 0$) un flux thermique surfacique φ_0 constant imposé.

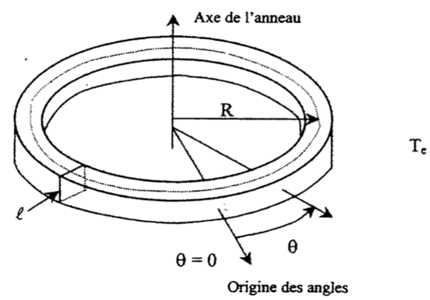
(a) Déterminer la température $T(x)$ dans la dalle en régime permanent.

(b) Calculer $T_i - T(H)$ pour h=6,7 S.I. et $\varphi_0 = 20{,}1$ W/m^2.

2. Dalle chauffée en régime sinusoïdal forcé
On considère maintenant que la dalle est chauffée par un flux thermique qui varie de manière sinusoïdale dans le temps :
$$\varphi_0(t) = \varphi_0 \cos(\omega t)$$
(a) On note $\vec{j}_{th} = j_{th}(x,t)\vec{u}_x$ le vecteur densité de courant thermique. De quelle équation aux dérivées partielles $j_{th}(x,t)$ est-il solution ? On posera $a = \frac{\lambda}{\mu c}$.

(b) Chercher la solution sous la forme $j_{th}(x,t) = \Re\big[\underline{f}(x)\underline{g}(t)\big]$. On peut supposer pour simplifier l'épaisseur H infinie. Interpréter physiquement l'expression obtenue.

Exercice TT 30 Expérience de Fourier



Un anneau de fer de rayon moyen R et de section carrée de coté $\ell \ll R$ est enfoui dans le sable, considéré comme un isolant thermique parfait. On repère un point quelconque de l'anneau par l'angle θ dans [-π ; π].

1. A l'instant initial, le profile de température $T_0(\theta)$ dans l'anneau est non uniforme, soit T_m sa valeur moyenne. Pour des raisons de symétrie du dispositif ayant créé ce profil initial, $T_0(\theta)$ est une fonction paire.

(a) Etablir l'équation de la chaleur régissant l'évolution de $T(\theta, t)$.

(b) On pose $T(\theta,t) = T_m + f(\theta)g(t)$. Justifier l'observation faite par Fourier : " les écarts de température avec la valeur moyenne T_m deviennent rapidement proportionnels au cosinus de l'angle θ ".

(c) Quel est l'ordre de grandeur du temps au bout duquel cette observation est valable ?
ℓ= 3,3 cm, $R = 16$ cm, $c = 460$ J.kg^{-1}.K^{-1}, $\lambda = 81$ W.m^{-1}.K^{-1}, $\mu = 7{,}86.10^3$ kg.m^{-3}

2. La méthode permettant de créer l'inhomogénéité thermique initiale consiste à chauffer la position de l'anneau $\theta = 0$. Pendant cette phase de l'expérience, l'anneau est placé dans l'air à la température T_a si bien qu'un échange thermique conducto-convectif de coefficient de transfert h intervient. Après deux heures de chauffage, Fourier étudie le profil de température stationnaire obtenu $T_0(\theta)$. Pour ce faire trois thermomètres sont disposés en des points repérés par les angles θ_1, θ_2 et θ_3 tels que $\theta_1 + \Delta\theta = \theta_2 = \theta_3 - \Delta\theta$. On pose $\Delta T_i = T_0(\theta_i) - T_a$.

(a) En notant $T_0(0)$ la température du point de chauffage, déterminer l'expression de $T_0(\theta)$. Mettre en évidence une longueur caractéristique L_{th} fonction de ℓ, λ et h.

(b) Fourier remarqua que le rapport $C = (\Delta T_1 + \Delta T_3)/\Delta T_2$ est indépendant de la valeur de la température $T_0(0)$ et de la valeur de θ_2. Est-ce prévisible théoriquement ?

(c) Avec $h = 10$ W.m^{-2}.K^{-1} et $\Delta\theta = \pi/4$ quelle valeur numérique prévoit-on d'obtenir pour C ? Expérimentalement, on a trouvé : $\Delta T_1 = (48 + 1/3)$ °C, $\Delta T_2 = 33$ °C, $\Delta T_3 = (26 + 1/3)$ °C Commenter.

Exercice TT 31 Diffusion thermique dans une plaque

Une plaque d'épaisseur $2d$, de dimensions illimitées dans les directions des axes Oy et Oz, est plongée dans un fluide dont la température T_f est maintenue constante. On note ρ la masse volumique, c la capacité thermique massique et λ la conductivité thermique du matériau constituant la plaque. A l'instant initial, la plaque a une température uniforme T_0 et à un instant quelconque, le point M de la plaque de coordonnées x, y, z a une température T. On pose $\theta = T - T_f$.

1. De quelles variables dépend la fonction θ ? Déterminer l'équation vérifiée par θ en posant $D = \lambda/\rho c$.
2. Justifier la recherche d'une solution de cette équation sous la forme $\theta = f(x)g(t)$ et montrer que la résolution passe par l'introduction d'une constante k réelle positive, homogène à l'inverse d'une longueur et qui intervient par son carré.
3. Déterminer la fonction $g(t)$ puis la fonction $f(x)$. Donner l'expression de θ en fonction de D, k, x et t et d'une constante multiplicative A.
   On note h le coefficient de transfert conducto-convectif entre la plaque et le fluide.
4. Déterminer une relation entre les coefficients k, d, λ et h puis l'exprimer en fonction de $n = kd$ et $B = hd/\lambda$.
5. Montrer graphiquement que cette équation caractéristique admet une infinité de solutions en n. Donner pour chaque nombre propre n_i la solution propre $\theta_i(x, t)$ en fonction de D, d, n_i, x, t et A_i (valeur de A pour $n = n_i$).
   On considère une solution générale du problème sous la forme
   $$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(x,t)$$
6. Justifier cette solution générale et montrer qu'elle peut convenir alors que chaque solution particulière ne vérifie pas la condition initiale.
7. Calculer la valeur de l'intégrale $I_{ij} = \int_{-d}^{d} \cos(n_i x/d)\cos(n_j x/d)dx$ pour $i = j$ et pour $i \neq j$.
8. En déduire l'expression des coefficients A_i en fonction de $\theta_0 = T_0 - T_f$ et écrire l'expression définitive de $\theta(x, t)$ en fonction de D, d, θ_0 et des n_i.
9. Montrer que si Dt/d^2 est assez grand, on peut négliger dans l'expression de θ tous les termes sauf le premier (hypothèse maintenue pour la suite). Cette approximation est judicieuse pour $Dt/d^2 > 0,3$. A partir de quel instant t_0 l'approximation est-elle valable si d = 0,5 cm ; λ = 420 W.m^{-1}.K^{-1} ; ρ = 10,5 10^{3}kg/m^3 ; c = 230 J.kg^{-1}.K^{-1} ?
10. En supposant $T_0 < T_f$, représenter θ en fonction de x à différents instants $t > t_0$ en distinguant le cas B petit et le cas B grand. Commenter.
11. Si h = 2000 W.m^{-2}.K^{-1}, T_0 = 290 K et T_f = 350 K, calculer le coefficient B et en déduire une valeur approchée de n_1. Peut-on considérer à un instant $t > t_0$ donné que la température est uniforme dans la plaque ? Au bout de combien de temps, tous les points de la plaque auront-ils la même température que le fluide extérieur à moins de un degré près ?

Exercice TT 32 Evolution de la température du corps humain lors d'une plongée

Le but de cet exercice est de décrire les processus de transfert d'énergie entre le corps d'un plongeur sous-marin et l'eau. On note $T_i(t)$ la température interne du plongeur et T_{ext} = 15 °C la température de l'eau. On note R_1 la résistance thermique de la partie extérieure du corps humain (derme), le plongeur est équipé d'une combinaison d'épaisseur e. On note R_{comb} la résistance thermique associée. Les transferts convectifs entre la paroi externe de la combinaison et l'eau sont modélisés par une loi de Newton de coefficient h. Les transferts radiatifs entre la surface extérieure de la combinaison et l'eau sont modélisés par le flux radiatif global : $\phi_{rad} = \sigma\epsilon(T_{paroi}^4 - T_{ext}^4)$ où ϵ est le paramètre d'émissivité traduisant l'efficacité des processus radiatifs et σ la constante de Stefan. On suppose qu'on peut modéliser ces transferts thermiques radiatifs par une résistance thermique R_{ray}.

1. A quelle condition cette dernière hypothèse est-elle réalisée, quelle est alors la résistance thermique R_{ray} ? Exprimer également la résistance thermique de conducto-convection en fonction de h et S.
2. Proposer un schéma équivalent permettant de déterminer la résistance totale au transfert thermique de l'intérieur du corps à l'eau R_{tot}.
3. Le corps humain dégage de l'énergie thermique, on note P la puissance associée à cette production interne et C la capacité thermique du corps humain.
   (a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $T_{int}(t)$.
   (b) En supposant P constante au cours du temps, déterminer $T_{int}(t)$.

Exercice TT 33 Evolution temporelle des conditions aux limites

Un solide(C) ayant la forme d'un cylindre droit à base circulaire de hauteur L, de rayon R est constitué d'un matériau homogène et isotrope de masse volumique μ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ supposées constantes. T désigne la température du cylindre.
On appelle x la direction parallèle à l'axe du cylindre et on suppose que T ne dépend que de x et du temps.
On place les deux faces extrêmes de (C) (en $x = 0$ et $x = L$) en contact avec deux thermostats de températures respectives T' et T'' et on empêche tout échange par les parois latérales.
On posera $K = \dfrac{\lambda}{\mu c}$.

1. Pour $t < 0$, on a $T' = T'' = T_1$. A $t = 0$, on change les thermostats et pour $t > 0$ on a $T' = T'' = T_0$.
   Donner en le justifiant la fonction $T(x,t)$ juste avant $t = 0$.
   On s'intéresse désormais à la fonction $T(x,t)$ pour $t > 0$.
2. On pose $\theta = T - T_0$; quelles sont les conditions aux limites pour θ en $x = 0$ et $x = L$ $(\forall t)$ et les conditions initiales $(\forall x)$.
3. On cherche $\theta(x,t)$ sous la forme $\theta = f(t)g(x)$.

   — Montrer que $g(x)$ est solution de l'équation différentielle :
   $$g''(x) + \alpha g = 0$$
   où α est pour l'instant une constante indéterminée.

   — A l'aide des conditions aux limites, montrer que $\alpha > 0$, on posera $\alpha = k^2$, et ne peut prendre que certaines valeurs dépendant d'un entier n. A quelle équation obéit $f(t)$? Montrer que les solutions de cette équation dépendent du même entier n.

   — Ecrire la solution $\theta(x,t)$ correspondant à l'entier n et montrer que la solution la plus générale que l'on peut obtenir par cette méthode est :
   $$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)\sin(k_n x)$$
   en donnant les expressions de τ_n et k_n en fonction de n, L et K.

4. A l'aide des conditions initiales, montrer que le calcul des coefficients B_n se ramène au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction $g^*(x)$ dont on précisera la parité et la période.
   On rappelle que la série de Fourier d'une fonction $g^*(x)$ périodique de période L peut s'écrire :
   $$g^*(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{2\pi nx}{L}) + b_n \sin(\frac{2\pi nx}{L}) \right)$$
   avec
   $$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} g^*(x) \cos(\frac{2\pi nx}{L}) dx$$
   et
   $$b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} g^*(x) \sin(\frac{2\pi nx}{L}) dx$$
   Calculer B_n et donner l'expression de $\theta(x, t)$.
5. Calculer le rapport r entre un terme quelconque du développement de θ et le premier terme et montrer qu'à partir d'un instant t_1 dont on donnera un ordre de grandeur on peut ne garder que le premier terme.
   Donner l'allure de $\theta(x, t)$, pour $t \ll t_1$, pour $t > t_1$ puis pour $t \to \infty$. A partir de quel instant t_2 a-t-on :
   $$\frac{|T(x, t) - T_0|}{T_0} < 10^{-2}$$
   Données : L=1m ; R=2cm ; μ=9000kg.m^{-3} ; c=400J.kg^{-1} ; λ=400SI ; T_1=370K ; T_0=300K

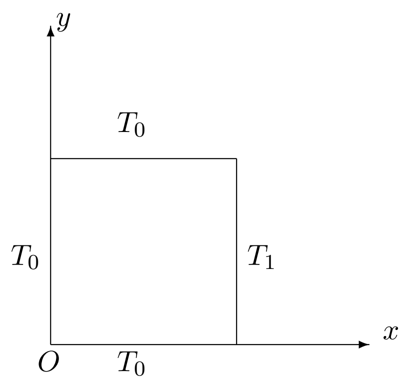
Exercice TT 34 Neige artificielle

Un canon à neige pulvérise dans l'air froid ($T_{ext} = -15$ °C et P_0= 1 bar) des gouttelettes d'eau liquide de rayon R=10 μm et de température $T_i = 10$ °C supposée uniforme. Chaque gouttelette entretient avec l'air des échanges thermiques modélisés par un flux conducto-convectif de coefficient h avec h=10 W.m^{-2}.K^{-1}. On pourra négliger les phénomènes de diffusion thermique.

1. Calculer le temps nécessaire pour qu'une gouttelette atteigne la température $T_s = -5$ °C, appelée température de surfusion jusqu'à laquelle l'eau reste liquide en l'absence de perturbations.
2. A $T = T_s$, l'état de surfusion cesse brutalement. Calculer la fraction massique du glace formée.
3. Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.
4. Caractériser les phénomènes de diffusion thermique : est-il juste de dire qu'ils sont "négligeables" ?

Exercice TT 35 Analogie électrostatique

On considère un solide de section carrée de coté a infini selon z. Le coté d'équation $x = a$ est porté à la température $T = T_1$ et les trois autres cotés sont à la température T_0. Déterminer la température en tout point de ce solide en régime permanent.



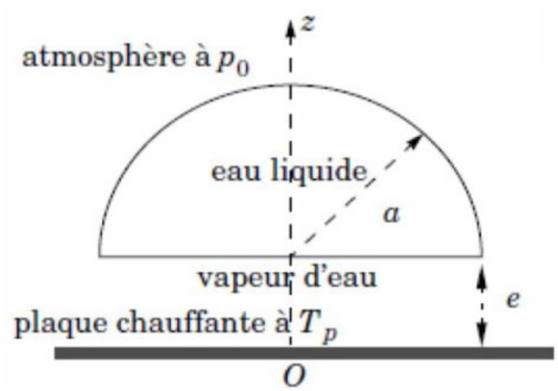
Exercice TT 36 Effet Leidenfrost

Une goutte d'eau est en lévitation au-dessus d'une plaque chauffante de température T_p.

La lévitation est due à la vaporisation de l'eau sous la goutte.

On note $a(t)$ le rayon de la goutte supposée hémisphérique et $e(t)$ la distance entre la plaque et la face inférieure de la goutte.

Typiquement, le rayon initial de la goutte est a_0=1 mm et la durée τ d'existence de la goutte est de l'ordre de la minute.



L'interprétation qualitative de la caléfaction a été proposée par Leidenfrost en 1756 : la plaque, de température plus élevée que celle de la goutte, cède à celle-ci de la chaleur, ce qui provoque l'évaporation progressive de la goutte liquide.

Cette évaporation, qui n'est pas isotrope, provoque un écoulement de vapeur d'eau sous la goutte qui permet à celle-ci de léviter au-dessus de la plaque.

1. Déterminer l'équation vérifiée par la température $T(r, z, t)$ de la vapeur d'eau située entre la plaque et la face inférieure de la goutte.

   On note D le coefficient de diffusivité thermique de la vapeur d'eau.

   On donne le Laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

2. Donner une condition sur a et e pour que les dérivées partielles par rapport à r soient négligeables devant celles par rapport à z .

   On se place dans la suite dans cette hypothèse.

3. Donner une relation entre e, D et τ pour que l'on puisse se placer en régime "quasi-stationnaire".
4. Expliciter la solution $T(r,z,t)$. La goutte liquide est à la température d'ébullition, notée T_e, en $z = e(t)$.
5. On note μ_l la masse volumique de l'eau liquide et ℓ_v la chaleur latente massique de vaporisation de l'eau. Montrer que $a(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\lambda}{2e\mu_l \ell_v}(T_p - T_e)$$

où λ est la conductivité thermique de la vapeur d'eau.

Exercice TT 37 Marche aléatoire non symétrique

On considère un modèle simple de marche aléatoire unidimensionnelle selon l'axe des x. Une particule se déplace tous les τ d'une distance ℓ soit vers la gauche soit vers la droite. Ici, cette marche aléatoire est supposée non symétrique : la probabilité d'aller vers la gauche est 1/2-ϵ et celle d'aller vers la droite est 1/2+ϵ. On note $p(x,t)$ la probabilité de trouver la particule en x à l'instant t.

1. Exprimer $p(x, t+\tau)$ en fonction de ϵ, $p(x-\ell, t)$ et $p(x+\ell, t)$.
2. On considère que la fonction $p(x,t)$ est à variable continue. En faisant des développements de Taylor de l'expression précédente, déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $p(x,t)$. On notera $v = \frac{2\epsilon\ell}{\tau}$.
3. On fait le changement de variable $X = x - vt, T = t$, montrer que dans ces variables, on retrouve l'équation de la diffusion. Interpréter.

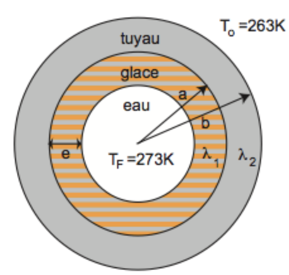
Exercice TT 38 Sédimentation

On disperse des particules sphériques identiques de faible dimension de masse m_0 et de rayon r dans un récipient rempli d'eau. On note $m*$ la masse d'eau déplacée par une sphère et on pose $m = m_0 - m*$. Une particule dispersée est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède et à une force de frottement fluide donnée par la formule de Stokes $\overrightarrow{F} = -6\pi r\eta\overrightarrow{v}$ où η est la viscosité de l'eau.

1. Déterminer la vitesse limite des particules supposée atteinte très rapidement. En déduire le vecteur densité de courant de particules correspondant à ce mouvement de sédimentation.
2. Du fait de l'existence d'un gradient de densité particulaire, quand les sphères commencent à s'accumuler au fond, les collisions provoquent un phénomène de diffusion qui se superpose au phénomène précédent. On note D le coefficient de diffusion des particules de la loi de Fick. Déterminer en régime stationnaire le profil de densité particulaire $n(z)$ dans le récipient en fonction de $n(0)$, z, et des autres données du problème.
3. On admet que $n(z)$ est aussi donné par un facteur de Boltzmann. En déduire la relation d'Einstein reliant D, η, r, T et k_B.

Exercice TT 39 Formation de glace dans un tuyau

De l'eau s'écoule dans un tuyau de conductivité thermique $\lambda_2 = 1\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ en régime quasi-stationnaire. On observe la formation de glace (conductivité $\lambda_1 = 2\text{W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$).



1. Définir et calculer la résistance thermique du tuyau et de la glace de deux manières différentes.
2. Montrer que la formation de la glace suit la loi :

$$\tau\frac{de}{dt} + e = A$$

Expliciter τ et A.

3. Il n'y a pas de glace à l'instant initial. Calculer le temps au bout duquel $e = 1\text{mm}$.