TP Diffusion de charge

MP*

janvier 2025

L'objectif de ce TP est de :

— Modéliser à l'aide d'une chaîne de cellules RC le comportement d'un milieu diffusif continu

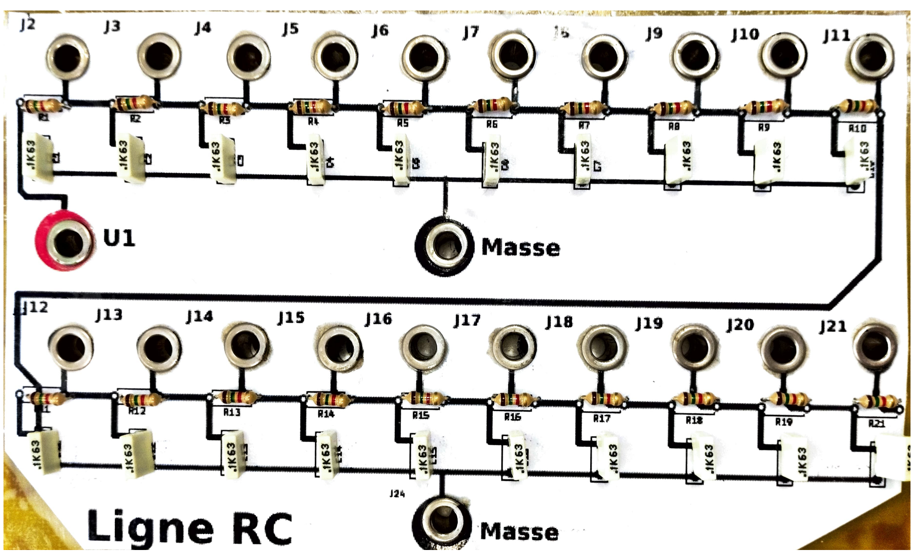
— Discuter l'influence du caractère fini de la ligne et de son caractère discret

Ces manipulations sont analogues aux expériences de diffusion thermique que l'on peut faire avec une barre conductrice de la chaleur isolée latéralement. On fera autant que possible des rapprochements avec cette partie du cours.

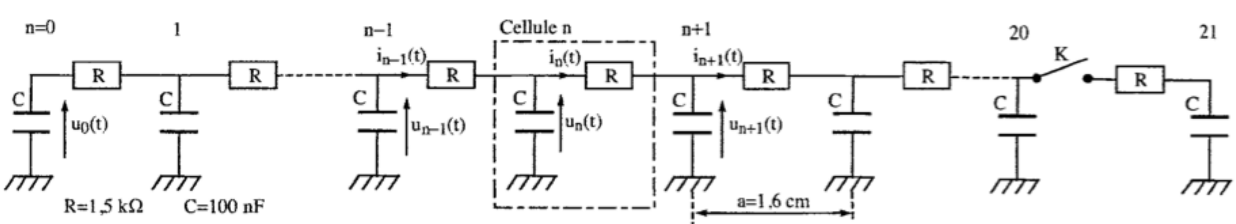
1 Le montage étudié

1.1 Montage

Le montage comporte 21 cellules RC numérotées de n=0 à n =20, avec R=1,5 kΩ et C=100 nF. On note a la dimension d'une cellule.



Il est possible de faire des mesures de tension aux bornes de chaque capacité.
Le schéma électrique du dispositif expérimental est le suivant :



Entre les cellules de 20 et 21 est placé un interrupteur K. On note $u_n(t)$ la tension aux bornes du condensateur de la cellule n et $i_n(t)$ le courant qui traverse la résistance de la cellule n.

1.2 Mise en équation

1. En appliquant la loi des noeuds et la loi des mailles montrer que :

$$RC\frac{du_n}{dt} = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$$

2. En faisant l'approximation des milieux continus, en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la tension $u(x,t)$ telle que $u(x = na, t) = u_n(t)$.
3. Exprimer le coefficient de diffusion D en fonction de a et $\tau = RC$ et vérifier l'homogénéité.
4. A quelle condition l'approximation précédente est-elle valable ?
5. Quelles sont les analogies avec la diffusion thermique ?

2 Manipulations

2.1 Régime stationnaire sans pertes

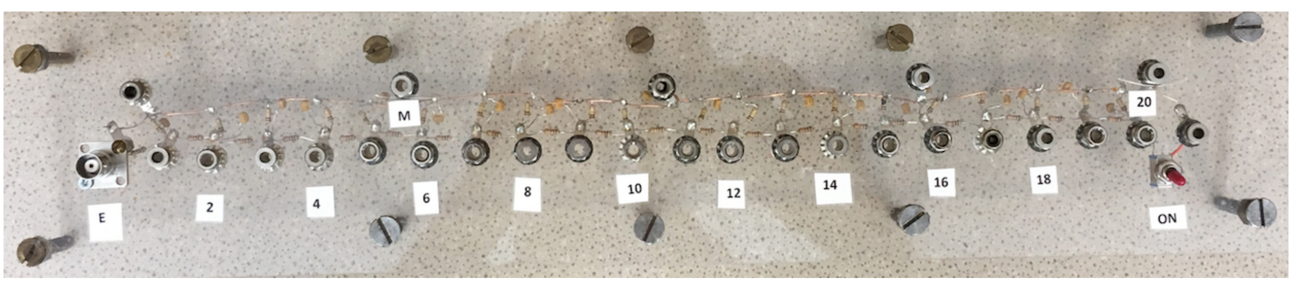
- Appliquer une tension continue u_0=10,0 V en n=0.
- Le condensateur n=20 est placé en court-circuit : u_{20}=0.
- Relever au multimètre ou voltmètre numérique les tensions u_n (6 ou 7 mesures également réparties suffisent) et tracer la courbe $u_n = f(n)$. Comparer à la théorie.
- Mesurer à l'ampèremètre le courant débité par la source. Conclure et interpréter.
- Quelle serait l'analogue en diffusion thermique ? (schéma) L'aspect discret du problème électrique étudié pose-t-il problème ?

2.2 Régime stationnaire avec pertes

Il n'existe qu'une plaquette pour cette étude, la faire circuler pour l'utiliser à tour de rôle.

2.2.1 Aspect théorique

On dispose d'une ligne analogue mais une résistance R' de 100kΩ a été montée en parallèle de chaque condensateur, modélisant ainsi une résistance de fuite. On peut définir $\tau' = R'C$ et $L = 20a$. Comme précédemment, on impose u_0=10,0 V et u_{20}=0.



- Comment sont modifiées les équations discrètes et continues ? Montrer que l'équation en régime permanent est :

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\ell^2}u$$

Que vaut ℓ ? Comparer à la taille caractéristique du problème a. Le modèle continu vous semble-t-il valable ? Peut-on considérer le milieu semi-infini ?

- Résoudre compte tenu des conditions aux limites. Montrer qu'on peut mettre la solution sous la forme :

$$u(x) = u_0 \frac{\sinh\left[(L-x)/\ell\right]}{\sinh(L/\ell)}$$

- Quelle serait l'expérience analogue en diffusion thermique ?

2.2.2 Manipulation

Relever les tensions u_n au multimètre et déterminer ℓ à l'aide du modèle théorique, en utilisant un tableur. Conclure.

2.3 Régime sinusoïdal forcé

2.3.1 Aspect théorique

- Pour une entrée $u_0(t) = E_0\cos(\omega t) = E_0\cos(2\pi f t)$ montrer que la solution de l'équation de diffusion unidimensionnelle, dans le cas d'un milieu continu semi-infini vers les $x > 0$ s'écrit :

$$u_n(t) = u_0 \exp\left(-n\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\right)\cos\left(\omega t - n\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\right)$$

  Comment s'appelle cet effet ?
- A quelle condition sur la fréquence f peut-on considérer la ligne comme infinie ? comme continue ? Donner un ordre de grandeur des fréquences possibles pour la ligne étudiée pour que les deux hypothèses soient validées.

2.3.2 Manipulation

- K étant fermé et le système ouvert en n =21, appliquer $u_0(t) = E_0\cos(2\pi f t)$ avec E_0= 9 V et f = 400 Hz. Le modèle continu est-il justifié ?
- **Etude de l'amplitude de** $u_n(t)$ Choisir un temps d'échantillonnage et une durée d'acquisition pertinents et faire l'acquisition des $u_n(t)$ de n=0 à 7. Relever les amplitudes et vérifier la loi par un tracé pertinent. En déduire τ.
- **Etude de la phase de** $u_n(t)$ Exprimer le retard Δt_n de la tension $u_n(t)$ par rapport à la tension d'entrée $u_0(t)$. Faire les mesures pour n de 0 à 7. En déduire graphiquement une nouvelle estimation de la constante de temps τ.[1]

1. Les écarts avec la valeur attendue peuvent s'expliquer par la non-validité du caractère continu. On peut chercher la solution en posant $\underline{u}_n(t) = \underline{A}\exp(i(\omega t - \underline{k}na))$ où $\underline{k} = k' + ik''$. Lorsque $\omega\tau \ll 1$, on trouve les expressions approchées suivantes : $k' \approx \frac{1}{\delta}\left(1 - \frac{\omega\tau}{24}\right)$ et $k'' \approx \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{\omega\tau}{24}\right)$