Exercices de statique des fluides

1. **Surface libre de l'eau dans un verre en rotation**

   Un verre contenant de l'eau est mis en rotation à la vitesse angulaire ω. La mise en rotation a été initiée il y a suffisamment longtemps pour que le régime soit stationnaire : chaque particule d'eau est immobile par rapport au verre.

   (a) Dans quel référentiel peut-on appliquer la relation de la statique des fluides ?

   (b) Quelles sont les forces volumiques agissant sur une particule fluide dans ce référentiel ?

   (c) En déduire l'expression de la pression.

   (d) Quelle est la forme de la surface libre ?

2. **Variation de la composition de l'air**

   (a) Donner l'évolution des pressions partielles en diazote et en dioxygène en fonction de l'altitude pour une atmosphère isotherme.

   (b) A partir de quelle altitude h le rapport de ces pressions partielles diffère-t-il de plus de 10% de sa valeur au sol ?

3. **Prise en compte de la compressibilité de l'eau**

   (a) L'eau liquide est faiblement compressible. Exprimer sa masse volumique en fonction de la pression (à température constante) en supposant constant le coefficient de compressibilité isotherme χ_T. On rappelle que pour l'eau $\chi_T \approx 10^{-10}$USI. Quelle est l'unité de χ_T ? On donnera une relation linéaire entre ρ et P et on notera ρ_0 et P_0 les valeurs à la surface.

   (b) Donner l'expression de la pression en fonction de la profondeur.

   (c) Commenter cette solution pour de faibles profondeurs. On explicitera cette notion.

4. **Pression au centre de la Terre**

   On suppose la Terre composée d'un fluide de masse volumique uniforme ρ.

   (a) Exprimer explicitement le champ de gravitation à l'intérieur de la Terre en fonction de r, du rayon terrestre R et de la norme g_0 du champ de gravitation à la surface.

   (b) De quelles variables dépend la pression ? Trouver l'équation différentielle vérifiée par la pression.

   (c) La résoudre connaissant la pression P_0 à la surface.

   (d) En déduire la pression au centre de la Terre.

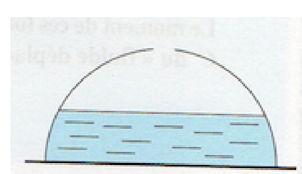
   (e) A.N. sachant que la masse de la Terre est M=6.10^{24}kg. Commenter sachant que la valeur communément admise est $P_C \approx 350$GPa.

5. **Masse de l'atmosphère**

   Estimer la masse de l'atmosphère terrestre.

6. **Soulèvement d'une calotte sphérique**

   Pour quelle hauteur d'eau la cloche sphérique de masse m, renversée sur le plan horizontal, va-t-elle se soulever ?



7. **Un glaçon qui fond**
   Un glaçon flotte dans un verre rempli à ras bord. Faut-il s'empresser de vider un peu celui-ci pour éviter que le verre ne déborde quand le glaçon fond ?

8. **Surface libre**
   Un chariot se déplace sur le sol avec une accélération constante $\vec{a} = a\vec{u}_x$. Quelle est l'allure de la surface libre du liquide lorsqu'elle est stabilisée ?

9. **Atmosphère non isotherme**
   On considère que dans la troposphère la température T varie avec l'altitude z suivant la loi ci-dessous où a et T_0 sont des constantes :
   $$T = T_0 - az$$
   Le coefficient $-a$ est appelé gradient de température.
   (a) Déterminer les constantes T_0 et a sachant que la température au niveau de la mer ($z = 0$) est de 15 °C et vaut -56 °C à 11 km d'altitude. Préciser leurs unités.
   (b) Etablir la loi de variation avec z de la pression atmosphérique p. On notera $p(0)$ la pression atmosphérique au niveau de la mer (z = 0) qui vaut 1013 hPa.
   (c) Calculer la température et la pression au sommet du Mont Everest ($z = 8850$ m).

10. **Atmosphère à gradient thermique. Ballon atmosphérique. Stabilité de l'atmosphère.**
   On assimile l'atmosphère à un gaz parfait de masse molaire $M_0 = 29$ g.mol^{-1} et de coefficient $\gamma_0 = C_p/C_v$ constant et égal à 1,4. On observe expérimentalement que la température varie linéairement avec l'altitude selon la loi $T(z) = T_0 - az$ avec a de l'ordre de 6 K/km.
   (a) Expliquer l'origine de ce gradient quand l'air est calme. Etablir la loi donnant la variation de la pression avec l'altitude.
   (b) Un ballon atmosphérique, dont les structures solides et la charge emportée ont une masse totale m_u, est empli d'une masse m_g d'un gaz léger, de masse molaire M (de coefficient γ constant), enfermé dans une membrane souple assurant à tout moment l'équilibre entre la pression de ce gaz et la pression atmosphérique. On envisage ici l'équilibre du ballon à altitude constante depuis un temps suffisamment long pour que l'équilibre thermique entre gaz et atmosphère ait eu le temps de s'établir. A quelle condition le ballon reste-t-il à altitude constante ? Quels gaz pouvez vous proposer et préciser leurs avantages et inconvénients.
   (c) On se propose d'étudier la stabilité de l'équilibre précédent. Pour cela, on imagine qu'une petite perturbation, le passage d'un oiseau un peu curieux par exemple, décale le ballon d'une hauteur dz. L'équilibre des pressions entre gaz du ballon et atmosphère se fait instantanément, par contre la transformation est adiabatique réversible. Justifier cette approximation. A quelle condition l'équilibre est-il stable ? Préciser numériquement dans le cas d'un ballon gonflé à l'hélium.
   (d) Comment adapter ce qui précède pour trouver une condition de stabilité (absence de convection) de l'atmosphère. Indiquer qualitativement dans quel sens varie la conclusion si l'air est gorgé de vapeur d'eau. Expliquer comment le gradient de température se stabilise.

11. **Energie totale d'une colonne d'air**
   On considère une colonne d'atmosphère de section A et on suppose g et M, la masse molaire de l'air, uniformes sur l'intégralité de la colonne.
   Montrer que l'énergie totale de la colonne est :
   $$U + E_p = \frac{AC_p}{Mg} \int_0^{P_0} T(P)dP$$

12. **Energie potentielle moyenne**
   Dans le modèle de l'atmosphère isotherme calculer le nombre total de particules dans une colonne infiniment haute de section S. On note $n(0)$ la densité particulaire au niveau du sol.
   Calculer l'énergie potentielle totale de pesanteur et en déduire l'énergie potentielle de pesanteur par particule.