

# Induction

MP\*

Lycée Henri IV

28 février 2024

MP\*

Induction

Introduction  
Circuit fixe dans un champ magnétique variable  
Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire  
Annexe : Démonstration  $ei + P_{Laplace} = 0$

Définition du flux

Découverte par Faraday en 1831, l'induction a énormément d'applications technologiques : moteur électrique, alternateurs, transformateurs, freinage par courant de Foucault....



On se place dans l'ARQS magnétique.

On néglige donc le courant de déplacement dans l'équation de Maxwell Ampère, et on conserve donc pour  $\vec{B}$  les équations de la magnétostatique

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

En revanche lorsque  $\vec{B}$  est lentement variable, il apparaît un champ  $\vec{E}$  à circulation non nulle tel que

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

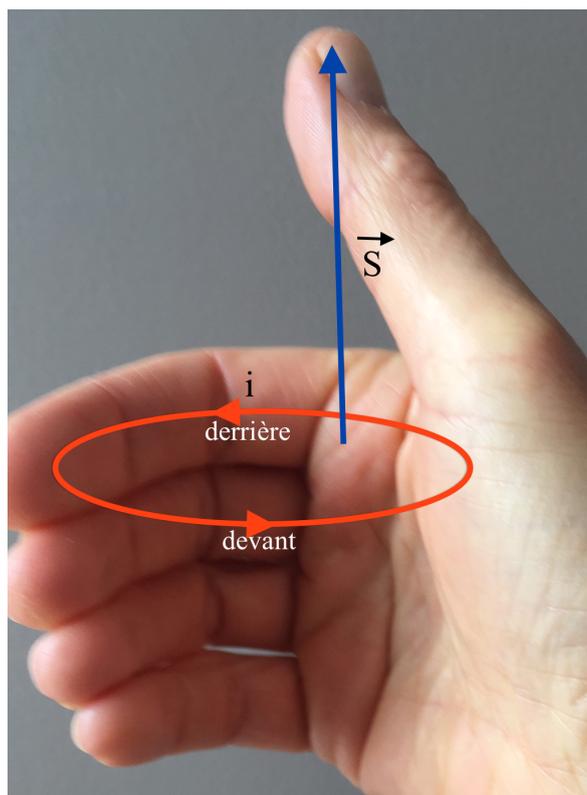
## Convention d'orientation

L'orientation du circuit  $\mathcal{C}$  définit l'orientation pour le courant  $i$ , la force électromotrice induite  $e$  et le flux  $\phi$ . Le sens d'orientation pour la fem  $e$  coïncide avec le sens d'orientation choisi pour le circuit.

$$e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\phi = \iint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

où  $\mathcal{S}$  est une surface qui s'appuie sur le contour  $\mathcal{C}$ , orientée selon la règle de la main droite.



$$\vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

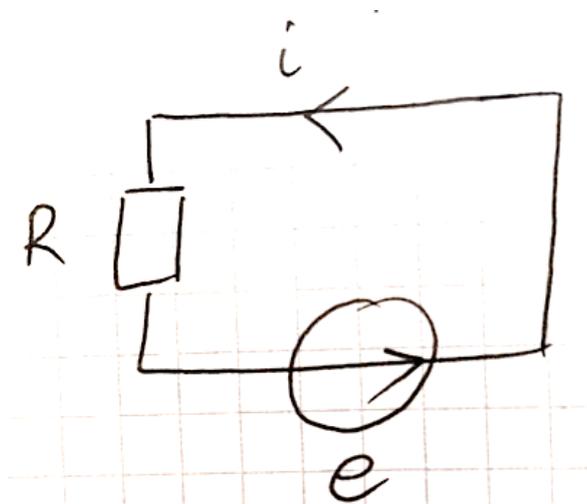
$$\Rightarrow \iint_{\mathcal{S}} \vec{rot} \vec{E} d\vec{S} = - \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\text{or } \iint_{\mathcal{S}} \vec{rot} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = e$$

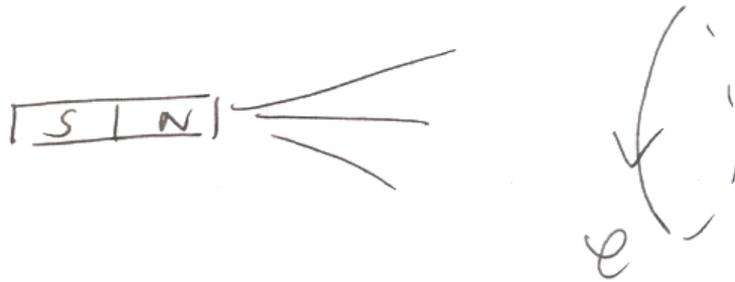
## Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Si la spire a une résistance  $R$  le circuit équivalent est le suivant :



avec la fem induite  $e$  et le courant  $i$  dans le sens de la convention d'orientation du circuit. On a alors  $e = Ri$



Lorsque l'aimant s'approche, le flux de  $\vec{B}$  à travers la spire  $\nearrow$ .

$$\phi \nearrow \Rightarrow \mathcal{E} < 0 \Rightarrow i < 0$$

Le courant  $i$  induit crée un champ magnétique propre qui s'oppose à l' $\nearrow$  du flux de  $\vec{B}$ .

## Loi de Lenz

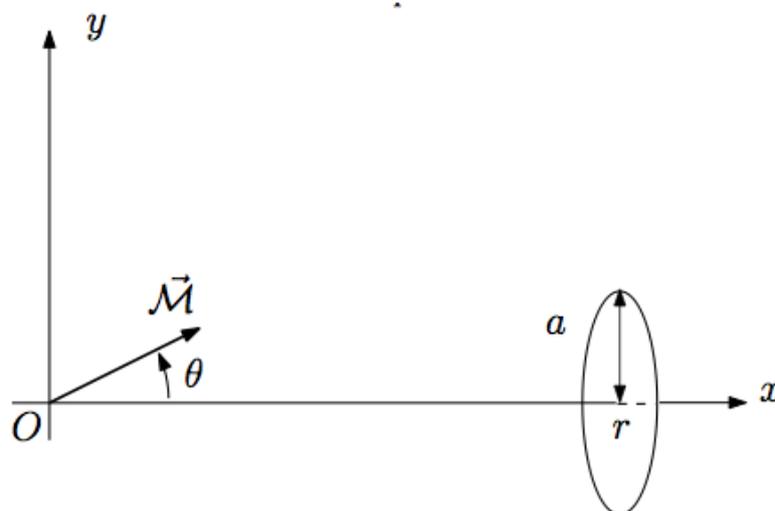
Les courants induits s'opposent, par leurs effets, à la cause qui leur a donné naissance.

Si on s'intéresse à la force exercée par la spire sur l'aimant.  
 L'énergie potentielle de l'aimant dans le champ magnétique de la spire s'écrit :  $E_p = -\vec{\mathcal{M}}_{aimant} \cdot \vec{B}_{spire}$ . Ici  $\vec{\mathcal{M}}_{aimant}$  et  $\vec{B}_{spire}$  sont de même direction et de sens opposé,  $E_p = \mathcal{M}_{aimant} B_{spire}$  augmente quand l'aimant s'approche : l'interaction est répulsive.

Cause : l'aimant se rapproche.

Effet : la force de la spire sur l'aimant s'oppose au mouvement de l'aimant.

Une aiguille aimantée de moment magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$  placée en O peut tourner dans le plan  $xOy$  (contenant  $\vec{\mathcal{M}}$ ). Sa vitesse angulaire est  $\omega = \dot{\theta} = cte$  et on appelle  $\theta$  l'angle entre  $\vec{\mathcal{M}}$  et  $Ox$ . Une spire circulaire de rayon  $a$  et d'axe  $Ox$  est placée à une distance  $r$  de l'aiguille sur l'axe  $Ox$  ( $r \gg a$ ). On note  $R$  la résistance totale de la spire.



- 1 Calculer le flux du champ créé par l'aiguille à travers la spire.

- 2 En déduire le courant parcourant la spire. On veillera notamment à bien préciser le sens conventionnel du courant ainsi défini. Vérifier la loi de modération de Lenz.

- ③ Déterminer le champ créé par la spire en O et en déduire le couple subi par l'aiguille.

- ④ En déduire la puissance que doit fournir l'opérateur pour maintenir la vitesse de rotation de l'aimant constante et la comparer à la puissance dissipée par effet Joule dans la spire.

# Flux propre

On a ici négligé l'autoinduction.

$$\phi = \phi_{\text{aimant} \rightarrow \text{spire}} + \phi_{\text{spire} \rightarrow \text{spire}}$$

Il est clair que  $\phi_{\text{propre}} \propto i$ , on note  $L$  cette constante de proportionnalité.

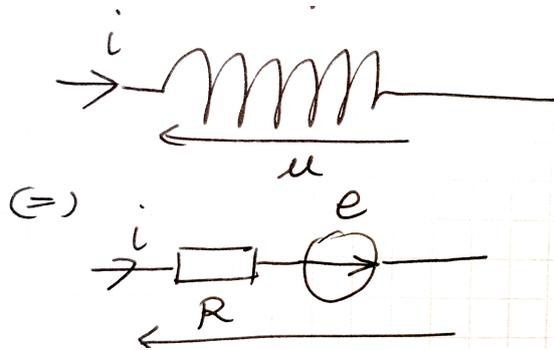
$$\phi_{\text{propre}} = Li$$

$L$  est le coefficient d'autoinduction.  $L > 0$

Une bobine est un circuit dont on ne néglige pas le coefficient d'autoinduction.

On a alors  $e = -L \frac{di}{dt}$ . La bobine peut être représentée par une résistance en série avec un générateur idéal de tension  $e$  (orienté dans le sens de  $i$ ).

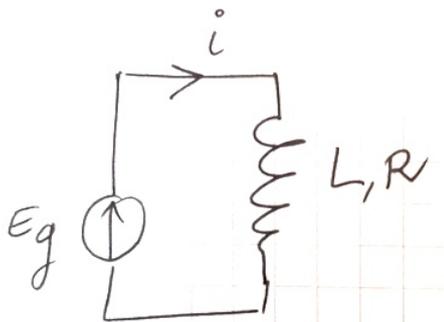
Une bobine s'oppose aux variations du courant qui la traverse.



$$u = Ri - e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Si  $i \nearrow$ ,  $\phi_{propre} = Li \nearrow$ , la fem induite est  $e < 0$  : elle s'oppose à l'augmentation de  $i$ , conformément à la loi de Lenz.

## Aspect énergétique



$$E_g = Ri + L \frac{di}{dt}$$

$$E_g i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Puissance fournie par le générateur = Puissance dissipée par effet Joule + dérivée de l'énergie magnétique de la bobine

$$\mathcal{E}_{magn} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} Li^2$$

$$\mathcal{E}_{magn} > 0 \Rightarrow L > 0$$

## Coefficient d'autoinduction d'un solénoïde

On considère un solénoïde de rayon  $a$  de longueur  $\ell \gg a$  avec  $n = N/\ell$  spires par unité de longueur.

$B_{int} = \mu_0 ni$  et  $B_{ext} = 0$ , en négligeant les effets de bord

## Coefficient d'autoinduction d'un solénoïde

Pour une longueur  $\ell$  de solénoïde, on a donc une énergie magnétique

$$\mathcal{E}_{magn} = \frac{(\mu_0 ni)^2}{2\mu_0} \ell \pi a^2 = \frac{1}{2} (\mu_0 n^2 \ell \pi a^2) i^2$$

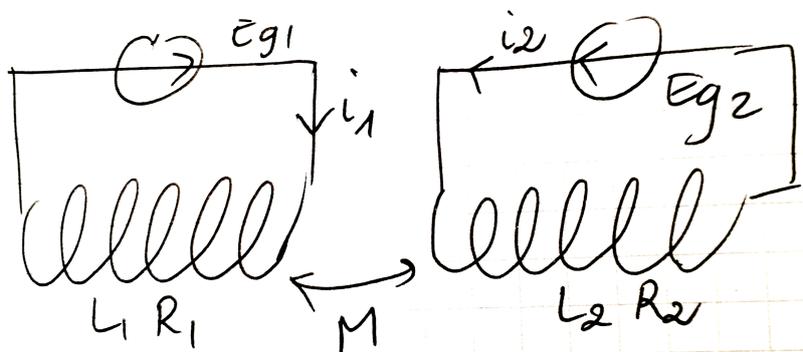
$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \propto N^2$  :  $L$  n'est non négligeable que pour une bobine avec un nombre important de spires.



MP\*

Induction

## Circuits couplés par inductance mutuelle



$$\phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

$$\phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

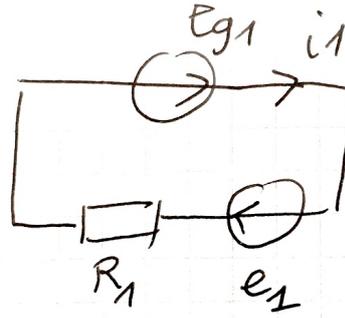


MP\*

Induction

$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$E_{g1} + e_1 = R_1 i_1$$

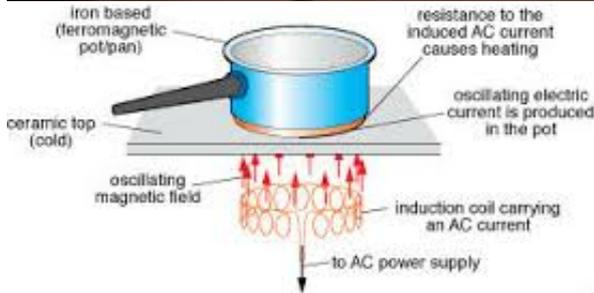
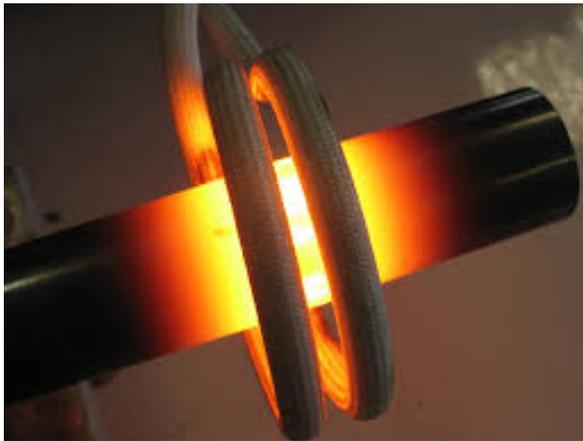


$$\begin{cases} E_{g1} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} & \times i_1 \\ E_{g2} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} & \times i_2 \end{cases}$$

$$E_{g1} i_1 + E_{g2} i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right)$$

$$\mathcal{E}_{magn} \geq 0 \Rightarrow M^2 \leq L_1 L_2$$

On parle de courants de Foucault lorsque les courants induits sont volumiques (ou surfaciques) et non plus sur un conducteur filiforme.



MP\*

Induction

## Chauffage par induction

Un cylindre de hauteur  $h$ , de rayon  $a$  et de conductivité  $\gamma$  possède un axe de révolution  $Oz$ . Il est immergé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, dirigé selon  $Oz$  et qui varie en fonction du temps :  $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ . Le cylindre est supposé globalement neutre. Son inductance propre et les effets de bord à ses extrémités sont supposés négligeables.



MP\*

Induction

- 1 Ecrire l'équation de Maxwell-Faraday. Déterminer la direction du champ électrique induit dans le cylindre.
- 2 En faisant circuler l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer les courants volumiques  $\vec{j}(M)$  dans le cylindre.

- 3 Calculer la puissance totale moyenne dissipée par effet Joule.

4 A quelle condition l'autoinduction est-elle négligeable ?

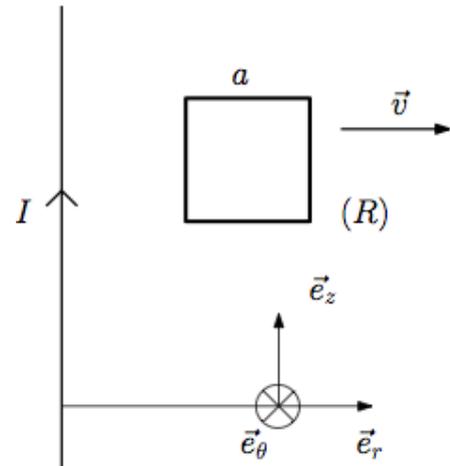
## Induction de Lorentz

On admet que la loi de Faraday s'applique encore dans ces situations.

### Loi de Faraday

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

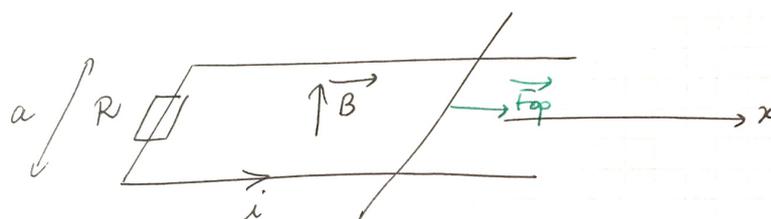
Un cadre carré, de côté  $a$  et de résistance  $R$ , se déplace dans un plan contenant un fil infini parcouru par un courant constant  $I$ . Déterminer le courant induit dans ce cadre lorsqu'il s'éloigne du fil à la vitesse constante  $v$ .



MP\*

Induction

## Fonctionnement en générateur



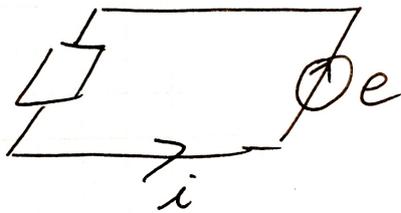
Un opérateur déplace la barre à vitesse  $v$  constante.  
 Le flux de  $\vec{B}$  à travers le circuit augmente  $\Rightarrow e < 0 \Rightarrow i < 0 \Rightarrow$  La force de Laplace qui s'exerce sur la barre s'oppose au déplacement, conformément à la loi de Lenz.



MP\*

Induction

## Mise en équation



MP\*

Induction

$$F_{Laplace} = iaB$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{équation mécanique} & F_{op} + iaB = 0 \quad \times v \\ \text{équation électrique} & e = -Bav = Ri \quad \times i \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{équation mécanique} & F_{op}v + iaBv = 0 \\ \text{équation électrique} & -Bavi = Ri^2 \end{array} \right.$$

---


$$F_{op}v = Ri^2$$

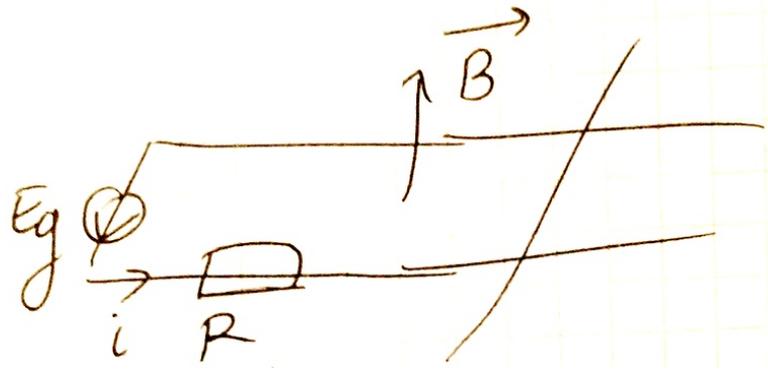
Conversion électromécanique de puissance : la puissance développée par l'opérateur est convertie en puissance électrique.



MP\*

Induction

## Fonctionnement en moteur



MP\*

Induction

## Mise en équation



MP\*

Induction

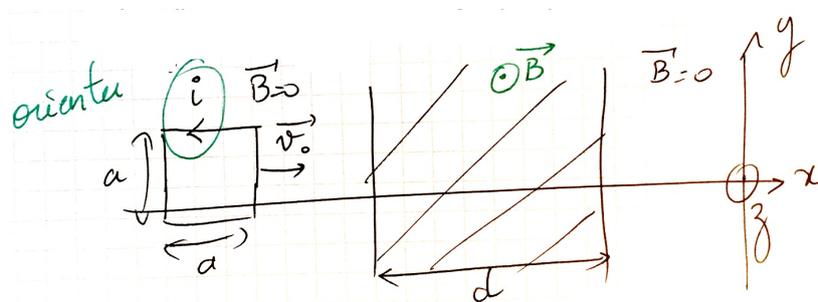
$$E_g i = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right)$$

La puissance fournie par le générateur est en partie dissipée par effet Joule et en partie convertie en énergie cinétique.



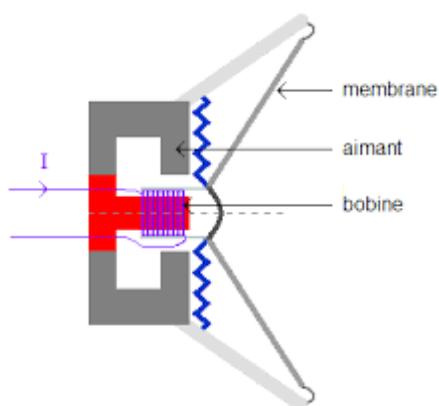
MP\*

Induction



MP\*

Induction



Le champ magnétique dans l'entrefer est radial.  $\vec{B} = B\vec{u}_r$

Le fil parcouru par  $i$  est dans une zone de champ  $B$  radial, il est soumis à une force de Laplace selon  $z$ .

⇒ La bobine se déplace selon  $z$  sous l'effet de cette force et ces vibrations mettent en mouvement l'air et un son est émis.

Le mouvement de cette bobine dans le champ magnétique de l'aimant provoque l'apparition d'une fem induite.

## Modélisation

Electrique :

- $L$  inductance propre
- $R$  résistance
- $N$  spires de rayon  $a$

Mécanique :

- masse  $m$  dont le mouvement est repéré par  $z$
- soumise à une force de rappel  $-kz$
- à la force de Laplace
- à une force de frottement fluide  $-h\dot{z}$



MP\*

Induction

## Equation mécanique

$$d\vec{F}_{Laplace} = id\vec{\ell} \wedge \vec{B} = id\ell\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r = -id\ell B\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_{Laplace} = -i2\pi aNB\vec{u}_z \text{ PFD en projection selon } z :$$

équation mécanique

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} - 2\pi aNBi$$



MP\*

Induction

## Equation électrique

On est dans une situation où la variation du flux n'est pas simple à exprimer. On utilise, dans cette situation de Lorentz (circuit mobile dans  $\vec{B}$  stationnaire)

$$ei + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$$

et on en déduit

$$e = -\frac{\mathcal{P}_{Laplace}}{i} = 2\pi aNBv$$

### équation électrique

$$u = Ri + L\frac{di}{dt} - 2\pi aNBv$$



MP\*

Induction

## Bilan énergétique

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} - 2\pi aNBv$$

$$ui = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} - 2\pi aNBvi$$

$$ui = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2 \right) + hv^2$$

$$\langle ui \rangle = \mathcal{P}_{Joule} + \mathcal{P}_{acoustique}$$



MP\*

Induction

## Conversion électromécanique dans les cas de Lorentz

On va montrer que dans le cas d'un circuit mobile dans un champ stationnaire  $\mathcal{P}_{Laplace} + \mathcal{P}_{femdeLorentz} = 0$ , comme nous l'avons constaté dans l'exemple du rail de Laplace.

Cela tient au fait que la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas.

Pour une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  par rapport au référentiel du laboratoire, on a

$$q \left( \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v} = 0$$

La vitesse des porteurs de charges mobiles par rapport au référentiel du labo est  $\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r$  où  $\vec{v}_e$  est la vitesse de la portion de circuit considérée.

$$q \left( (\vec{v}_e + \vec{v}_r) \wedge \vec{B} \right) \cdot (\vec{v}_e + \vec{v}_r) = 0$$

$$q \left( \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_r + q \left( \vec{v}_r \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_e = 0$$

On multiplie par  $nSd\ell$  et on intègre sur tout le circuit.

$$\oint_{\mathcal{C}} nqS \left( \vec{v}_e \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}_r d\ell + \oint_{\mathcal{C}} \left[ (nqS\vec{v}_r d\ell) \wedge \vec{B} \right] \cdot \vec{v}_e = 0$$

Or  $nqSv_r = i$  et  $nqSdl\vec{v}_r = id\vec{\ell}$

$$\oint_{\mathcal{C}} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} i + \oint_{\mathcal{C}} [id\vec{\ell} \wedge \vec{B}] \cdot \vec{v}_e = 0$$

$$\mathcal{P}_{Laplace} = \oint_{\mathcal{C}} i(d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}_e$$

$$\mathcal{P}_{femdeLorentz} = \left( \oint_{\mathcal{C}} (\vec{v}_e \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} \right) i = ei$$