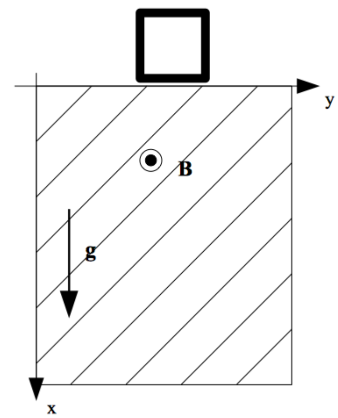
Exercices d'induction

Exercice 1 Chûte d'un cadre

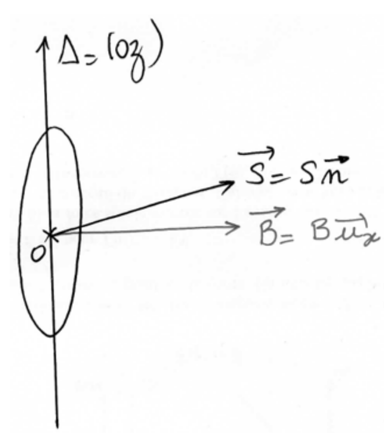
Une spire carrée de côté a, de masse m, tombe dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{u}_x$. Dans le demi-espace $x > 0$ règne le champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$.
A l'instant $t = 0$, la spire se trouve dans la situation représentée sur la figure ci-contre, et sa vitesse est $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$, son côté inférieur est en $x = 0$.



1. Montrer que le mouvement ultérieur de la spire reste une translation verticale selon l'axe Ox.
2. Soit R la résistance de la spire. Déterminer la vitesse $v(t)$ de la spire.
3. Que se passe-t-il si la spire est suspendue à un ressort de raideur k, initialement de longueur égale à sa longueur à vide ? On suppose que la raideur est suffisante pour que la spire ne pénètre pas entièrement dans la zone de champ magnétique.

Exercice 2 Freinage par induction

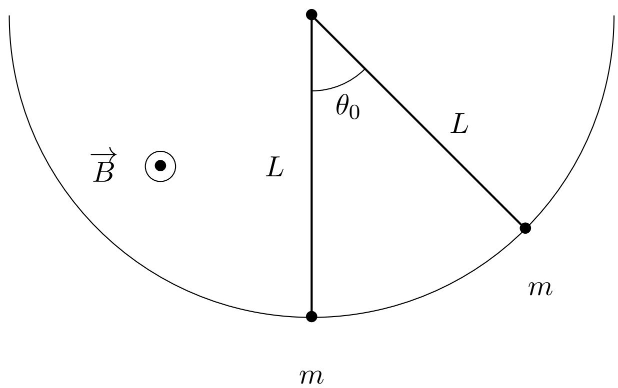
On place une spire d'aire S, de normale $\vec{n}$, de résistance R ($L = 0$), pouvant tourner autour d'un diamètre vertical $(\Delta) = (Oz)$ dans le champ magnétique uniforme horizontal et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$. On note J le moment d'inertie de la spire par rapport à l'axe Δ. On lance la spire avec une vitesse angulaire ω_0. La spire fait un grand nombre de tours N avant de s'immobiliser.



Déterminer N.

Exercice 3 Pendule freiné par induction

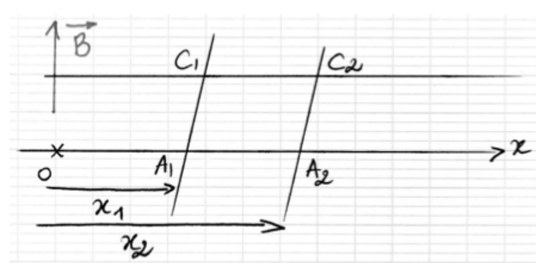
On considère deux tiges de longueurs L de même axe, légèrement décalées pour que l'une puisse passer devant l'autre, numérotés 1 et 2, au bout desquelles se trouvent deux masses m. Les masses sont en contact avec un cercle conducteur, et les tiges sont conductrices. On suppose qu'il y a une résistance R au niveau de l'axe entre les tiges, et nulle ailleurs. Le tout est dans un champ magnétique orienté dans le même sens que l'axe, et dans le champ de gravité terrestre (voir la figure, en vue de face).



1. Initialement l'angle θ_1 de la première tige vaut θ_0 (un petit angle), et l'autre tige est à la verticale. Comment évoluent les tiges sur un temps court ? Et sur un temps long ? Que se passe-t-il avec la résistance ?
2. Que se passe-t-il si on considère l'inductance propre du système, modélisée pas une bobine entre les deux tiges sur l'axe ?

Exercice 4 Barre entraînée par induction

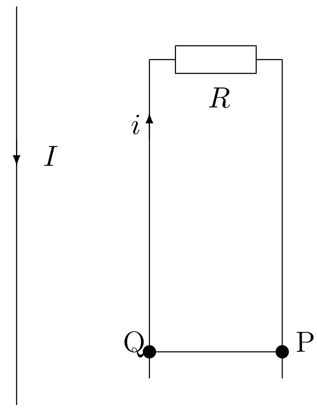
On considère deux barres parallèles identiques (A_1C_1) et (A_2C_2), de résistance R et de masse m, disposées sur deux rails métalliques parallèles distants de ℓ. On note $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions respectives des barres (A_1C_1) et (A_2C_2) au temps t. Initialement, $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = a$. L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. À $t = 0$, un opérateur met en mouvement la barre 2 à une vitesse $\vec{V_0} = V_0\vec{u}_x$ avec $V_0 > 0$.



Quel est le travail que doit exercer l'opérateur entre $t = 0^+$ et $t = +\infty$ pour maintenir la barre 2 à la vitesse constante $\vec{V_0}$. On négligera les effets auto-inductifs.

Exercice 5 Chûte d'une barre dans un champ magnétique

Une barre (QP) de masse m et de résistance R peut coulisser sans frottement sur deux rails parallèles distants de L. Un fil infini, parallèle aux rails et distant de d du rail le plus proche est parcouru par un courant I constant. Le poids s'exerce selon z. On note $v(t)$ la vitesse de la barre à l'instant t.

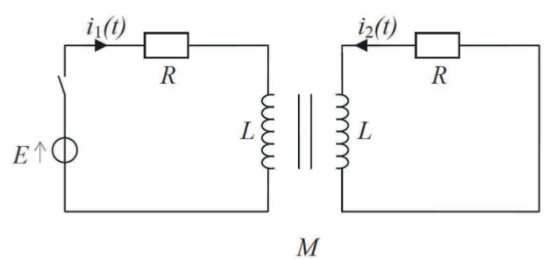


1. Prévoir qualitativement ce qui va se passer.
2. Exprimer la fem du circuit en fonction de I, $v(t)$, d et L. (attention à l'orientation du courant).
3. Déterminer $v(t)$ et $i(t)$, faire apparaître un temps caractéristique τ et en vérifier l'homogénéité.
4. Calculer la puissance de la fem et la puissance de la force de Laplace, P_{fem} et $P_{Laplace}$. Vérifier que $P_{fem}+P_{Laplace} = 0$. Comment s'appelle cette loi ? Dans quelles conditions est-elle généralement vérifiée ?
5. Calculer l'énergie dissipée par effet Joule pendant le temps τ en fonction de m, g et τ.

Exercice 6 Régime transitoire de deux circuits couplés

Soient deux circuits RL couplés.

- Le premier circuit comporte un solénoïde d'inductance L, une résistance R, un générateur de tension stabilisée de force électromotrice E et un interrupteur disposés en série. Soit $i_1(t)$ l'intensité du courant qui parcourt ce circuit.
- Le deuxième circuit comporte un solénoïde d'inductance L et une résistance R en série. Soit $i_2(t)$ l'intensité du courant qui parcourt ce circuit.

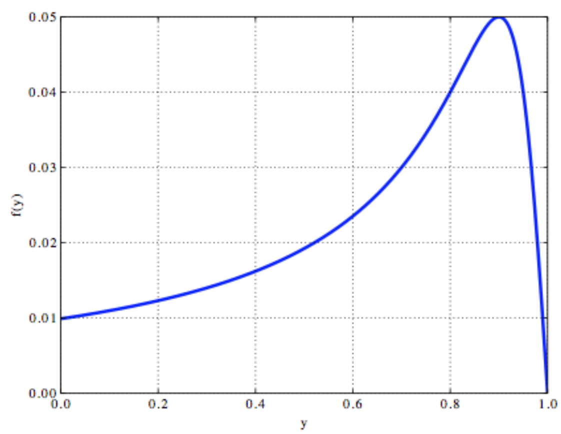


Pour simplifier les calculs, on suppose que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif. Déterminer les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ pour $t > 0$, dans le cas où $M < L$. Donner l'allure des représentations graphiques de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction du temps.

Exercice 7 Moteur asynchrone

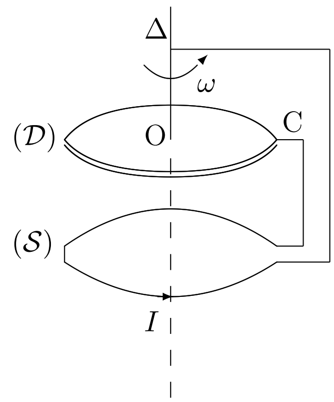
On a réalisé dans le plan xOy un champ magnétique B de norme B_0 constante tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω_0 constante. Une spire de surface utile S, de résistance électrique R, d'inductance L et de centre O est repérée par son vecteur normal $\vec{n}$ situé dans le plan xOy. $\vec{n}$ tourne autour de Oz à la vitesse angulaire $\omega < \omega_0$ constante elle aussi. A l'instant $t = 0$, l'angle entre $\vec{n}$ et $\vec{B}$ est α.

1. Exprimer à l'instant t, en fonction de S, B_0, ω, ω_0, t, α, le flux ϕ du vecteur $\vec{B}$ à travers la spire.
2. Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait l'intensité $I(t)$ du courant dans la spire.
3. Expliciter la solution du régime permanent de cette équation en introduisant deux constantes I_0 et φ sous la forme $I = I_0(\omega)cos((\omega - \omega_0)t + \varphi)$.
4. Exprimer le moment magnétique $\vec{M}$ de la spire siège du courant $I(t)$ et caractériser l'action mécanique à laquelle elle est soumise.
5. Exprimer la valeur moyenne au cours du temps de la composante selon Oz du moment du couple $< \Gamma >$ auquel est soumise la spire.
6. Comment se modifierait $< \Gamma >$ si la spire était remplacée par une bobine comportant N spires identiques ? Etudier la fonction $< \Gamma >$ en fonction de ω et représenter son graphe pour $0 < \omega < \omega_0$. On donne ci-dessous le tracé de la fonction : $f(y) = \frac{1-y}{1+\alpha^2(1-y)^2}$ pour $\alpha = 10$ (on supposera que c'est la valeur correspondant au système étudié).
7. Le moteur sert à entraîner un système qui exerce un couple résistant constant Γ_r. Est-ce toujours possible ? Dans le cas où le moteur peut entraîner le système, quel domaine vous semble correspondre à un fonctionnement en régime stable ?



Exercice 8 Modèle de la dynamo terrestre

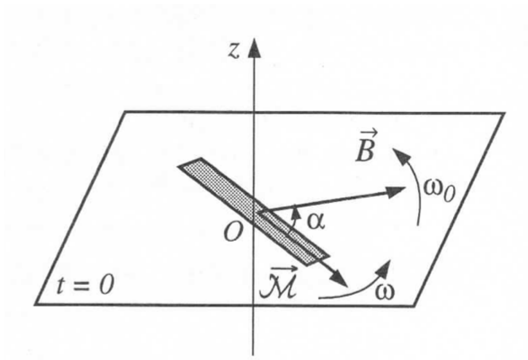
On considère un disque conducteur $(\mathcal{D})$ tournant autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire ω, soumis à un couple $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\Delta}$. Il est relié à une spire $\mathcal{S}$ par un contact glissant au point C. On note J le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe Δ et respectivement R et L la résistance et le coefficient d'autoinduction du circuit.



1. Expliquer comment un champ magnétique engendre une force électromotrice dans le circuit. Décrire le champ magnétique qui se crée (direction et sens). Que se passe-t-il si ω change de sens ?
2. On donne
$$\overrightarrow{\mathbf{B}} = B_r(r,z)\overrightarrow{\mathbf{u}_r} + B_z(r,z)\overrightarrow{\mathbf{u}_z}$$
Calculer la fem dans le circuit en fonction de L, I, ω et M un coefficient d'inductance mutuelle à préciser.
3. Montrer que
$$L\frac{dI}{dt} + RI - M\frac{\omega}{2\pi}I = 0$$
4. Etablir l'équation mécanique :
$$J\frac{d\omega}{dt} = \Gamma - \frac{MI^2}{2\pi}$$
5. Faire un bilan énergétique.
6. Montrer qu'il existe un régime permanent. Donner I_c et ω_c correspondant. Vérifier l'homogénéité.

Exercice 9 Moteur synchrone

Un montage convenable de bobines parcourues par des courants alternatifs de pulsation ω_0 produit dans un certain volume un champ magnétique $\vec{B}$ d'amplitude B_0, qui tourne avec la pulsation ω_0 constante.
D'autre part, une pièce mobile autour de l'axe Oz (le rotor) constituée d'un petit aimant permanent portant un moment magnétique permanent $\vec{\mathcal{M}}$, orthogonal à Oz tourne dans le plan xOy avec un mouvement de rotation uniforme de pulsation ω.
La valeur de l'angle $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$ à l'instant initial est noté α comme indiqué sur la figure.



1. Calculer la valeur instantanée du couple magnétique $\vec{\Gamma}$ exercé par le champ sur la pièce mobile. En déduire sa valeur moyenne au cours du temps.
2. Pour quelles valeurs de ω et α ce dispositif fonctionne-t-il en moteur ? Quelle est dans ce cas la puissance maximale P_M qu'il peut fournir ?
3. Un régime permanent de fonctionnement du moteur est dit stable si, lorsque le moteur prend accidentellement de l'avance (ou du retard) sur son régime permanent, le jeu des forces qu'il subit lui fait perdre cette avance (ou ce retard) ; il est instable dans le cas contraire.
   A partir du graphe de $\Gamma(\alpha)$, déterminer le domaine de α correspondant à un régime stable lorsque le moteur fournit un couple utile Γ_u

Exercice 10 Effet de peau dans un conducteur cylindrique

Conducteur en régime variable

La conductivité peut être décrite dans le modèle simple suivant :

Un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité n (nombre d'électrons libres par unité de volume), ces derniers assurant la conduction électrique. En plus des forces dues au champ électromagnétique, un électron de masse m et de charge $-e$ est soumis aux forces d'interaction avec les ions, modélisées par une force de type frottement fluide $-m\vec{v}/\tau$, $\vec{v}$ étant la vitesse de l'électron par rapport au conducteur et τ une constante de temps dépendant de la nature du matériau.

Le générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω parallèle à Oz et qui dans le conducteur est pour le moment supposé uniforme : en notation complexe $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i\omega t}\vec{u}_z$.

1. Déterminer en régime permanent la vitesse $\underline{\vec{v}}$ d'un électron.
2. Montrer que la loi d'Ohm locale s'écrit $\underline{\vec{j}} = \sigma\underline{\vec{E}}$ où la conductivité σ en régime variable est complexe ; l'exprimer en fonction de $\sigma_0 = ne^2\tau/m$, ω et τ. Quelles sont les deux différences importantes avec le régime continu ?
   A.N. : Jusqu'à quelle fréquence f_c peut-on utiliser, pour le cuivre, la valeur σ_0 du régime continu sans commettre une erreur supérieure à 1% sachant que $\sigma_0 = 5.8 \times 10^7\,\mathrm{S\,m^{-1}}$ et $n = 1.1 \times 10^{29}\,\mathrm{m^{-3}}$.

   La suite concerne le cas $f < f_c$.
3. Monter qu'alors le courant de déplacement $\vec{j}_D = \varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j}$.
4. Pourquoi l'hypothèse de l'uniformité de $\vec{E}$ en régime variable n'est-elle certainement pas valable ?

Epaisseur de peau

On se propose de corriger cette hypothèse dans le cas d'un conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a.

5. Montrer, en utilisant l'équation de conservation de la charge, que la densité volumique de charges est nulle dans le conducteur en régime sinusoïdal.
6. Déduire des équations de Maxwell l'équation vérifiée par le champ électrique dans le conducteur.
7. Montrer qu'une solution du type $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp\left[-(1+i)(a-r)/\delta\right] e^{i\omega t}\vec{u}_z$ convient si $r \gg \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0, σ_0 et ω.
   On donne en coordonnées cylindriques :
   $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$$
8. Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude E en fonction de r en admettant que $\vec{E}$ est négligeable pour r de l'ordre de ou inférieur à δ.
   A.N. : Expliquer pourquoi un fil de cuivre de diamètre 1mm convient à la transmission de la fréquence domestique ($f = 50\,\mathrm{Hz}$) ainsi qu'à celle des basses fréquences de l'électrocinétique ($f_{max} = 100\,\mathrm{kHz}$). Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio ($f \approx 100\,\mathrm{MHz}$) ? Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas.
9. Évaluer la puissance moyenne $< P >$ dissipée par effet Joule dans un tronçon de longueur ℓ de ce conducteur en fonction de σ_0, E_0, ℓ, a et δ dans le domaine de fréquence où $\delta \ll a$. Commenter ce résultat.
   En déduire la résistance R de ce tronçon en fonction de δ, a et R_0 sa résistance en courant continu.

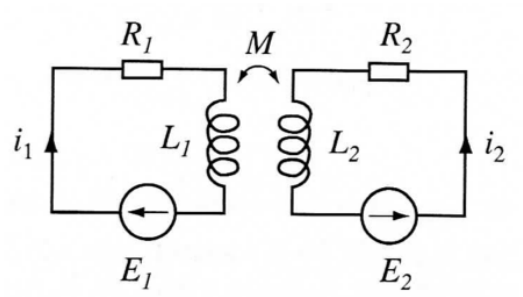
Exercice 11 Inductances propre et mutuelle

Rappels et définitions

1. Quelle est la définition de L, inductance propre d'un circuit filiforme ? Quel est son signe ? De quoi dépend-elle ? Quelle est la tension u aux bornes d'une bobine non résistive ?
2. Comment est définie l'inductance mutuelle M de deux circuits filiformes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$? Quel est son signe ? Comment s'écrit alors la fem de chaque circuit ?
3. A quelle inégalité satisfait le coefficient de couplage $\alpha = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$?

Energie magnétique de deux circuits filiformes

Les deux circuits sont couplés par une inductance mutuelle M.



4. Etablir l'expression de l'énergie magnétique U_m de l'ensemble. Quel est son signe ?
5. Quelle est l'origine de cette énergie magnétique alors que la force de Lorentz magnétique ne travaille pas ?

Evaluation de l'inductance d'une bobine

Un tronçon de longueur ℓ de section droite S, comportant N spires, est assimilé à un solénoïde (même si il n'est pas infiniment long).

6. Déterminer de deux manières différentes son inductance L.
7. **A.N.** : Estimer L pour une bobine de TP à peu près cubique de côté 10 cm et comportant 300 spires.

Association d'inductances couplées

Deux bobines non résistives et d'inductance L_1 et L_2 sont couplées avec une inductance mutuelle M (de signe quelconque).

8. Quelle est l'inductance équivalente L_s ou L_p de l'ensemble lorsque les bobines sont en série ou en parallèle ?
9. Quelle loi retrouve-t-on lorsqu'on les éloigne l'une de l'autre ?

Exercice 12 Haut parleur électrodynamique

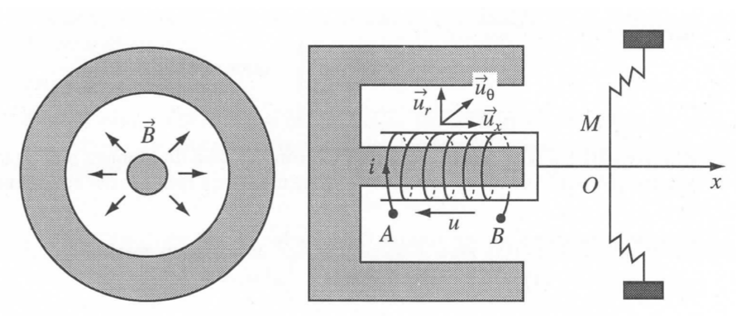
Schématiquement, un haut-parleur électrodynamique est composé :

— d'un aimant permanent (parties grisées sur la figure) qui fournit un champ magnétique $\vec{B}$ radial dans l'entrefer en forme de cavité annulaire ;

— d'une bobine de longueur de fil ℓ, de résistance R, d'inductance L, située dans l'entrefer de l'aimant et soumise à la tension $u(t)$ d'un amplificateur entre ses deux extrémités A et B ;

— d'une membrane M solidaire de la bobine. L'ensemble mobile possède une masse m et peut osciller autour de la position moyenne $x = 0$ suivant l'axe Ox, grâce à un dispositif de rappel schématisé par un ressort de raideur k. La transmission acoustique à l'air environnant se traduit par une force de frottement fluide $-r\vec{v}$ ($r>0$) opposé à la vitesse de la membrane, et dont la puissance correspond à la puissance sonore émise.

Les grandeurs électriques sont définies algébriquement comme l'indique la figure, l'orientation positive du circuit étant choisie de A vers B, c'est-à-dire suivant $+\vec{u}_\theta$.



Etude qualitative

Expliquer brièvement et sans calculs le fonctionnement du haut-parleur et en particulier par quels mécanismes une tension $u(t)$ peut engendrer une onde acoustique. Pourquoi parle-t-on de transducteur électrodynamique ?

Mise en équations

1. La bobine est parcourue par un courant $i(t)$. Ecrire l'équation différentielle reliant le déplacement $x(t)$ de l'ensemble membrane et bobine et leur vitesse $v(t) = dx/dt$ à $i(t)$.
2. La bobine est soumise à une tension $u(t)$. Ecrire l'équation différentielle reliant $u(t)$, $i(t)$ et $v(t)$.

Exercice 13 Haut parleur électrodynamique (suite)

Bilan de puissance et rendement

1. Quelle relation existe-t-il entre la puissance de le force de Laplace $P_{Laplace}$ et la puissance de la force électromotrice P_{fem} ? Ce "bilan" est-il général dans les couplages électromécaniques ? Comment s'interprète-t-il au niveau microscopique ?
2. Etablir le bilan de puissance global sous la forme

$$ui = \frac{d}{dt}(E_r) + P_1(i) + P_2(v)$$

   Donner les expressions de E_r, P_1 et P_2 et interpréter physiquement chacun de ces termes.
3. Que devient ce bilan de puissance en valeur moyenne temporelle pour un régime périodique ? Interpréter physiquement le résultat. En déduire une définition du rendement η du haut-parleur. Comment améliorer ce rendement ?
4. Expliquer le rôle du champ magnétique dans le transfert de puissance électrique à la puissance acoustique. Intervient-il dans η ?

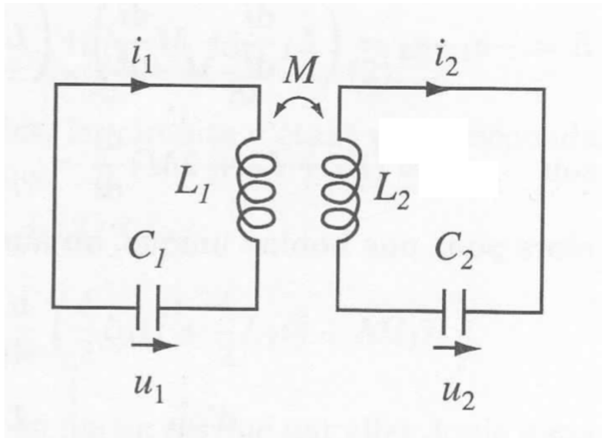
Utilisation en régime sinusoïdal

La tension appliquée à la bobine est à présent sinusoïdale de pulsation ω ; seul le régime forcé lié à cette pulsation est étudié et en notation complexe, la tension est écrite $\underline{u} = u_0 e^{j\omega t}$.

1. Montrer que l'on peut écrire $\underline{u} = \underline{Z}\ \underline{i}$ avec $\underline{Z} = \underline{Z}_e + \underline{Z}_{am}$ où $\underline{Z}_e$ représente l'impédance électrique de la bobine et $\underline{Z}_{am}$ représente l'impédance acousto-mécanique (ou motionnelle) du haut-parleur. Donner les expressions de $\underline{Z}_e$ et $1/\underline{Z}_{am}$.
2. Montrer que dans l'hypothèse simplificatrice où r ne dépend pas de ω, l'impédance acousto-mécanique peut être modélisée par trois composants électriques notés R', L' et C' à déterminer en fonction des données. Quelle caractéristique mécanique représente chacun de ces composants ?
   A.N. : Calculer la valeur de ces composants pour $B = 0.2\,\mathrm{T}$; $\ell = 20\,\mathrm{m}$; $m = 120\,\mathrm{g}$; $k = 43 \times 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}$; $r = 6\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ et proposer le schéma électrique équivalent à l'ensemble du haut-parleur.
3. Donner l'expression du rendement η défini précédemment en fonction des données. Pour quelle valeur ω_0 de la pulsation est-il maximal ?
   Calculer numériquement la fréquence f_0 correspondante ainsi que la valeur η_0 du rendement sachant qu'en plus des valeurs numériques précédentes R=$2\,\Omega$.
   Sachant qu'à cette fréquence f_0, la puissance moyenne reçue par le haut-parleur est P=$15\,\mathrm{W}$ et que le courant efficace est i_{eff}=$1.8\,\mathrm{A}$, calculer la vitesse efficace v_{eff} et le déplacement efficace x_{eff} de la membrane.
   Donner ensuite la valeur du rendement η pour une fréquence $f = 300\,\mathrm{Hz}$.
   Ce haut-parleur permet-il une restitution fidèle des sons audibles ? Comment procèdent les fabricants d'enceintes ?

Exercice 14 Circuits couplés par inductance mutuelle

Deux circuits résonnants non identiques mais accordés, soit $L_1C_1 = L_2C_2 = 1/\omega_0^2$ sont couplés par l'inductance mutuelle M.
Le coefficient de couplage entre les deux circuits oscillants est $\alpha = M/\sqrt{L_1L_2}$.
L'étude est conduite en supposant les résistances des bobines négligeables.



Etude en régime libre

Chaque oscillateur pris isolément a une pulsation propre ω_0 ; l'étude consiste à trouver les pulsations propres des deux oscillateurs une fois couplés, c'est à dire lorsque les paramètres qui les caractérisent ne varient plus de manière indépendante.
En l'absence de générateur, l'énergie du système (ici constante au cours du temps par absence d'effets dissipatifs) provient par exemple de la charge initiale d'un des condensateurs.

1. Etablir les équations différentielles couplées vérifiées par les tensions u_1 et u_2, où seules figurent les constantes ω_0, α et $\lambda = \sqrt{L_2/L_1}$.
2. Montrer que la recherche d'une solution particulière sous la forme d'un mode propre :

$$u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi) \text{ et } u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

   où u_1 et u_2 sont en phase ou en opposition de phase selon les signes de A_1 et A_2 conduit à deux solutions ω' et ω'' pour ω à déterminer.
3. Quelle est la solution générale ? Qu'observe-t-on pour $\alpha \ll 1$?

Etude en régime forcé

Chaque oscillateur pris isolément a une pulsation de résonance ω_0 lorsqu'il est mis en régime forcé. A présent, on insère un générateur de tension $e(t)$ de pulsation ω dans le circuit de gauche et l'étude consiste à chercher les pulsations de résonance en régime forcé de pulsation ω des deux oscillateurs une fois couplés.

1. Etablir les équations différentielles couplées. Eliminer u_2 et donner le rapport u_1/e en fonction de ω/ω_0 et α. Tracer le graphe u_1/e en fonction de ω.
2. Pour quelles valeurs ce rapport est-il infini ? nul ? Commenter. Comment faut-il modifier le graphe si l'on restitue aux bobines leur faible caractère résistif ?

Exercice 15 Solénoïde dans l'ARQS

On considère un solénoïde infini de rayon R et d'axe (Oz) avec n spires par unité de longuer et parcouru par un courant variable $i(t)$. Ce courant $i(t)$ va créer un champ magnétique que l'on peut calculer dans l'ARQS et que l'on note $\overrightarrow{\mathbf{B}_0}$. Ce champ magnétique étant variable dans le temps, il existe un champ électrique $\overrightarrow{\mathbf{E}_1}$. Ce champ électrique variable crée à son tour une composante du champ magnétique que l'on note $\overrightarrow{\mathbf{B}_2}$, etc ....
On se limite dans un premier temps à l'ordre le plus bas pour $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ et $\overrightarrow{\mathbf{E}}$.

1. Donner sans démonstration le champ magnétique $\overrightarrow{\mathbf{B}_0}$ dans l'ARQS.
2. Analyser les symétries et invariances pour $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ et en déduire $\overrightarrow{\mathbf{E}_1}$.
3. (a) Calculer le vecteur de Poynting à l'intérieur du solénoïde. En déduire la puissance rayonnée vers l'intérieur par unité de longueur du solénoïde.
   (b) Le courant $i(t)$ passe de la valeur 0 à I_0. Calculer l'énergie totale rayonnée vers l'intérieur du solénoïde par unité de longueur durant cette opération.
4. (a) Calculer l'énergie électromagnétique dans le solénoïde. Montrer qu'à basse fréquence, l'énergie volumique électrique est négligeable devant l'énergie volumique magnétique.
   (b) Calculer l'énergie emmagasinée par unité de longueur dans les conditions précédentes. Commenter.
5. On souhaite préciser les approximation et calculer le champ magnétique de façon plus complète. On se place en régime sinusoïdal forcé et on cherche le champ magnétique sous la forme : $\overrightarrow{\mathbf{B}} = B(r)e^{i\omega t}\vec{u}_z$ qui respecte la symétrie cylindrique.
   (a) Donner l'équation de propagation vérifiée par $\overrightarrow{\mathbf{B}}$ dans le solénoïde.
   (b) En déduire l'équation vérifiée par $B(r)$. On précise qu'en coordonnées cylindriques :

$$\Delta f(r) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

   A l'aide d'un changement de variable astucieux, montrer que B vérifie une équation aux dérivées partielles du type :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} + 1\right) B(u) = 0$$

   La solution est une fonction de Bessel.
   (c) On suppose qu'il existe un développement en série de la fonction de Bessel.

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

   On donne $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$. Calculer les coefficients a_n de l'expression (1). Calculer ensuite à partir de $\overrightarrow{\mathbf{E}_1}$ et des équations de Maxwell le terme $\overrightarrow{\mathbf{B}_2}$ en déduire a_2 et commenter.

Exercice 16 Condensateur dans l'ARQS

On considère un condensateur plan de rayon a et de faible épaisseur $e \ll a$ pour que l'on puisse négliger les effets de bord. On notera $q(t)$ la charge du condensateur en régime variable.

1. Quelle est l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}_0$ en régime statique ? Retrouver l'expression de la capacité C du condensateur plan.
2. On se place en régime "lentement variable" et on suppose dans un premier temps que l'expression de $\overrightarrow{E}_0$ précédemment trouvée est encore valable à condition de changer q en $q(t)$. A l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}_1$.
3. A l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que ce champ $\overrightarrow{B}_1$ est responsable d'un terme correctif $\overrightarrow{E}_1$ du champ électrique qui s'écrit $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}_0 + \overrightarrow{E}_1$. On admettra que $\overrightarrow{E}_1 = E_1(r,t)\overrightarrow{u}_z$ et on donne $\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E_1} = \frac{\partial E_1}{\partial r}\overrightarrow{u}_\theta$.
   En poursuivant cette méthode, on montrerait que $\overrightarrow{E}_1$ génère $\overrightarrow{B}_2$ et ainsi de suite. On obtiendrait alors l'expression de $\overrightarrow{E}$ sous la forme d'une série (développement perturbatif).
4. Soit T le temps caractéristique de l'évolution de $q(t)$. Quelle inégalité doit vérifier le rayon a du condensateur pour que l'on puisse considérer que $\overrightarrow{E} \approx \overrightarrow{E}_0$ pour $r < a$? Commenter. On se placera dans cette approximation par la suite.
5. Soient U_e et U_m les énergies électrique et magnétique stockées entre les armatures du condensateur. Calculer U_m/U_e. Commenter dans le cadre de l'approximation précédente. En déduire l'énergie du condensateur en fonction de $q(t)$ et de C.
6. Calculer le vecteur de Poynting puis son flux à travers un cylindre de rayon a. Quel lien existe entre ce flux et l'énergie du condensateur ?

Exercice 17 Chauffage par induction

Un cylindre conducteur d'axe Oz de hauteur h et de rayon R baigne dans un champ magnétique uniforme, dont l'expression est $\overrightarrow{B} = B_m \cos(\omega t)\overrightarrow{u}_z$. On note γ la conductivité électrique du matériau et on suppose que le champ magnétique n'est pas modifié par la présence du conducteur.

1. Calculer le champ électrique induit et en déduire que des courants de Foucault apparaissent dans le matériau. Préciser la densité de courant correspondante.
2. Déterminer la puissance dissipée par effet Joule. Commenter.
3. Quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par les courants qui se développent dans le cylindre ? En déduire une condition pour que l'hypothèse faite au début soit valable.