Corrigé des exercices d'optique

Interférences à 2 ondes en optique, notion de cohérence

Exo 14 : fentes d'Young éclairées par 2 sources incohérentes, méthode de Michelson et Pease.

1. $\delta' = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S'S_2) - (S'S_1) + (S_2M) - (S_1M)$

or l'expérience a lieu dans le vide d'où

$\delta' = S'S_2 - S'S_1 + S_2M - S_1M$

$$S_2M^2 = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + D^2 = D^2\left(1 + \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{D^2}\right)$$

$$S_2M \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{D^2}\right) = D + \frac{1}{2D}\left(x+\frac{a}{2}\right)^2$$

de même

$$S_1M \simeq D + \frac{1}{2D}\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

d'où $S_2M - S_1M = \frac{1}{2D}\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right] = \frac{ax}{D}$ $\boxed{S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}}$

de la m̂ façon $S'S_1^2 = \ell^2 + \left(\frac{a}{2}-b\right)^2$

$$\left.\begin{array}{l} \text{d'où } S'S_1 \simeq \ell + \frac{1}{2\ell}\left(\frac{a}{2}-b\right)^2 \\ \text{et } S'S_2 \simeq \ell + \frac{1}{2\ell}\left(b+\frac{a}{2}\right)^2 \end{array}\right\} \boxed{S'S_2 - S'S_1 = \frac{ab}{\ell}}$$

on en déduit $\boxed{\delta' = \frac{ax}{D} + \frac{ab}{\ell}}$

2. Les sources S' et S'' étant supposées incohérentes, en un point M de l'écran les intensités s'ajoutent.

L'intensité $I'(x)$ due à S' correspond à un dispositif interférentiel à 2 ondes :

$$I'(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta'\right)\right)$$

$$I'(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ab}{\ell}\right)\right)\right)$$

On obtient l'intensité I'' en un point de l'écran en changeant b en $-b$:

$$I''(x) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}-\frac{ab}{\ell}\right)\right)\right)$$

Comme $I = I' + I''$

$$I(x) = 4I_0 + 2I_0\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}-\frac{ab}{\ell}\right)\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ab}{\ell}\right)\right)\right)$$

que l'on transforme en utilisant $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\boxed{I(x) = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right)}$$

On obtient donc sur l'écran des franges rectilignes, distantes de $i = \frac{\lambda D}{a}$.

On a des franges brillantes (intensité maximale) pour

$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) = 1$ si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right) > 0$.

$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) = -1$ si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right) > 0$

On a des franges sombres (intensité minimale) pour

$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) = -1$ si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right) < 0$

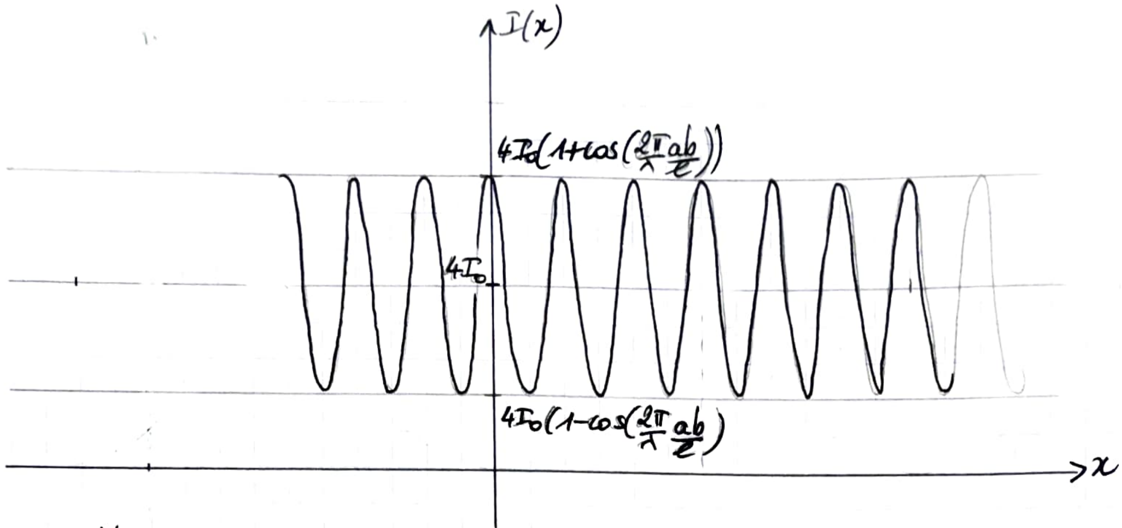
$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right) = +1$ si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right) > 0$

Le contraste est donné par $V(x) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

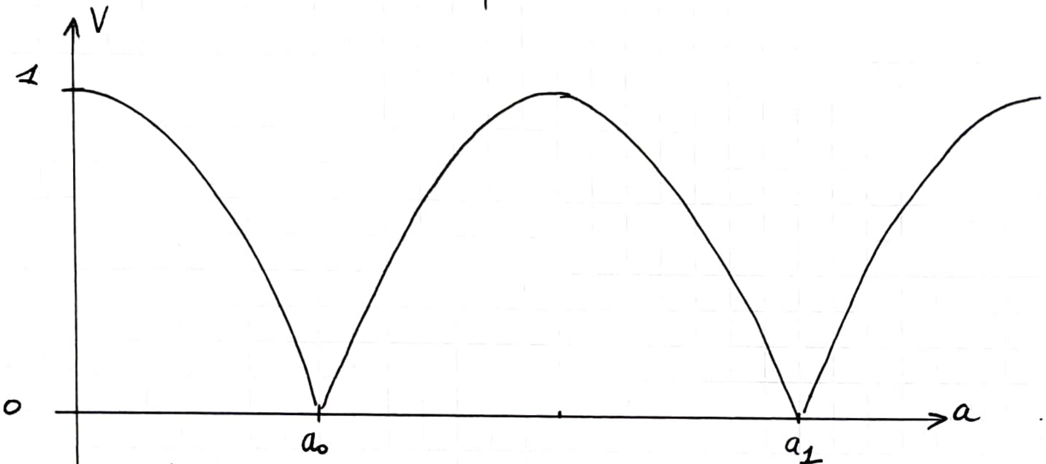
si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right) > 0$ $\quad I_{max} = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)\right)$, $\quad I_{min} = 4I_0\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)\right)$ $\Rightarrow V = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)$

si $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right) < 0$ $\quad I_{max} = 4I_0\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)\right)$, $\quad I_{min} = 4I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)\right)$ $\Rightarrow V = -\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)$

Finalement
$$\boxed{V(a) = \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell}\right)\right| \qquad V(a) = \left|\cos\left(\frac{\pi\varepsilon a}{\lambda}\right)\right|}$$
avec $\varepsilon = \frac{2b}{\ell}$



3



La visibilité $V(a)$ des franges s'annule périodiquement pour les valeurs de a telles que $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ab}{\ell} = \frac{\pi}{\lambda} a \varepsilon = (2q+1)\frac{\pi}{2}$

soit $a_q = \frac{(2q+1)}{2}\frac{\lambda}{\varepsilon}$

Expérimentalement, on fait varier a, on note les valeurs de a_q qui annulent le contraste des franges.
Entre 2 annulations on a $\Delta a = \frac{\lambda}{2\varepsilon}$. Si on mesure l'écart $\Delta_N a$ entre N annulations pour plus de précision on aura :

$\Delta_N a = (N-1)\frac{\lambda}{2\varepsilon}$ et on en déduit ε.

Cette méthode est utilisée en astronomie et permet de mesurer l'écart angulaire ε entre 2 étoiles.

Exo 20 : interféromètre de Rayleigh, indice absolu de l'air

① Avant le pompage, le montage est parfaitement symétrique et l'ordre d'interférence est nul au centre I de l'écran. Lorsque la pression baisse dans le tube T_1, l'indice de l'air n diminue et se rapproche de 1. Le chemin optique dans le tube T_1 est $n\ell$. Le chemin optique dans le tube T_2 est $n_0 \ell$ (où n_0 est l'indice de l'air dans les conditions normales).

La contribution au chemin optique dans T_1 est donc inférieure à la contribution du chemin optique dans T_2. Pour atteindre dans le plan de l'écran la frange d'ordre zéro, il faut donc qu'à la sortie du tube T_1, le rayon parcourt un chemin optique supérieur à celui sortant de T_2.

> La frange d'ordre zéro (et donc tout le système de franges) se déplace vers le bas.

② Au départ, l'ordre d'interférence est nul en I. Quand on commence à pomper, les franges se déplacent vers le bas. Quand la première frange brillante réapparait en I, l'ordre d'interférence est égale à 1 en I.

⑦ En fin de pompage, on a vu défiler 101 franges brillantes et on observe une frange sombre.

L'ordre d'interférence est donc $p = 101{,}5$

or en I $\delta = (n_0 - n)\ell = (n_0 - 1)\ell$ lorsque la pression dans le tube T_1 est quasi-nulle.

d'où $(n_0-1)\ell = p\lambda$

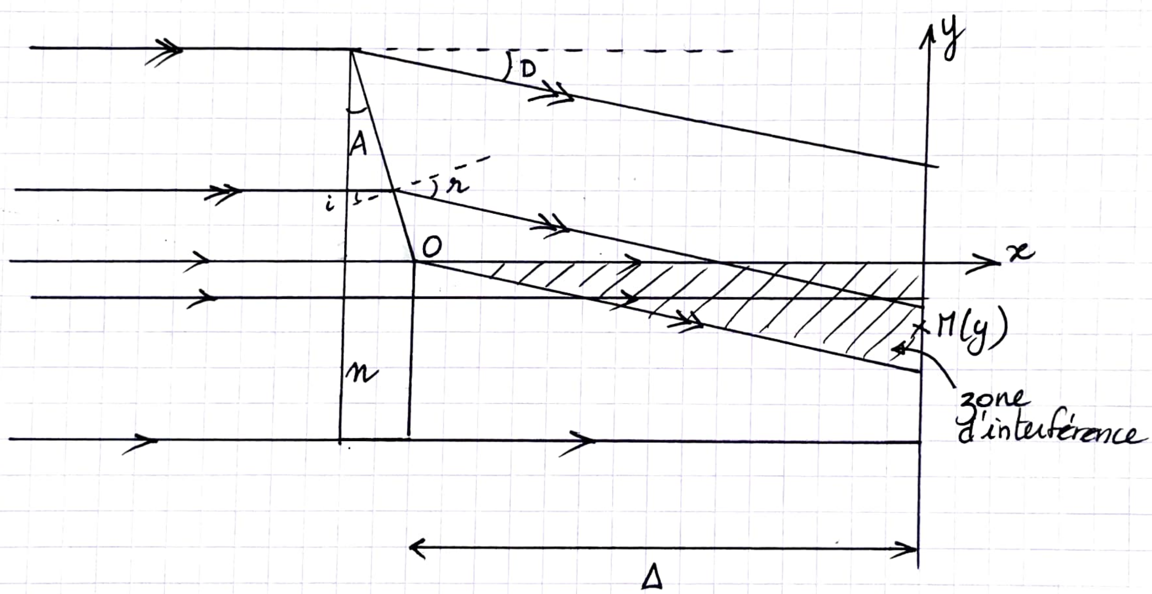
$$\boxed{n_0 = 1 + \frac{p\lambda}{\ell}}$$

A.N.: $n_0 = 1 + 101{,}5 \times \frac{577.10^{-9}}{0{,}20}$

$n_0 = 1{,}000293$

On admire bien sur ici la précision des mesures interférentielles!

Exo 15: interférences d'ondes planes



Le faisceau qui passe par le bas n'est pas dévié.
Pour le faisceau du haut, le premier dioptre n'a pas d'effet.
Sur le deuxième dioptre, les lois de la réfraction s'écrivent $n \sin i = \sin r$ or $i = A$ et les angles sont faibles $\Rightarrow$ $nA \simeq r$

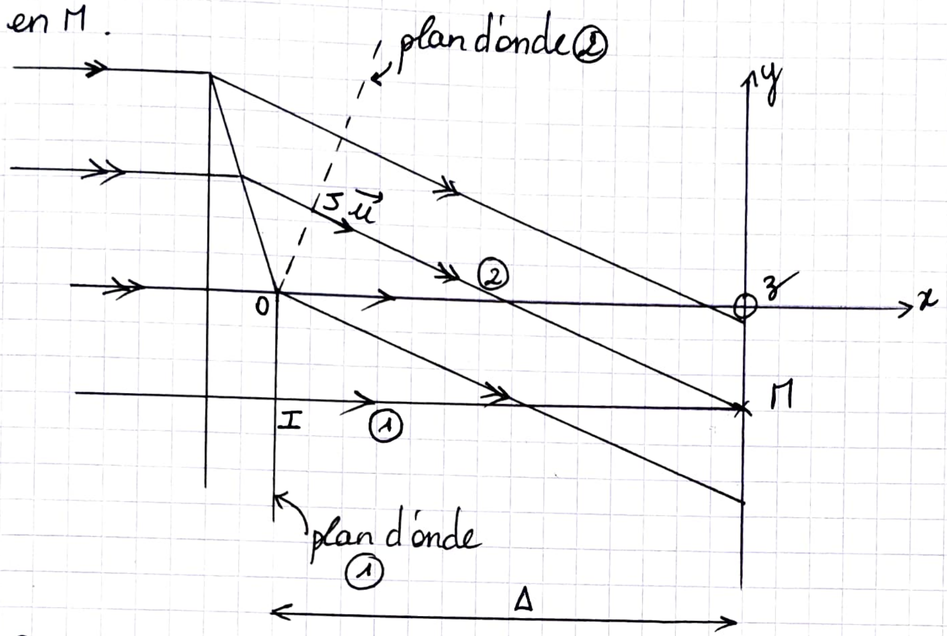
Soit une déviation du faisceau $D = -i + r = -A + nA = \boxed{(n-1)A = D}$

on a donc interférences entre 2 faisceaux parallèles dans la zone hachurée.

le plan passant par O et normal aux rayons émergents du prisme est un plan d'onde.

les deux ondes planes sont en phases au point O.

on doit calculer la différence de marche entre ces 2 rayons en M.



$\delta = IM - JM$ $\qquad JM = \vec{JM}\cdot\vec{u} = (\vec{JO}+\vec{OM})\cdot\vec{u}$ $\qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} \cos D \\ -\sin D \end{pmatrix}$ $\quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} \Delta \\ y \end{pmatrix}$

$\delta = \Delta - (\Delta \cos D - y \sin D)$

$$\boxed{\delta = \Delta(1-\cos D) + y \sin D}$$

La différence de marche ne dépend que de y : on observe donc des franges rectilignes parallèles à l'axe des z.

L'interfrange est $i = \Delta y$ telle que $\delta(y+\Delta y) - \delta(y) = \lambda$

$\Delta y \sin D = \lambda$ $\qquad i = \dfrac{\lambda}{\sin D}$ soit $\boxed{i = \dfrac{\lambda}{(n-1)A}}$

L'intensité est donnée par $I(y) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right)$

$I(y) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\Delta(1-\cos D) + y\sin D\right)\right)\right)$

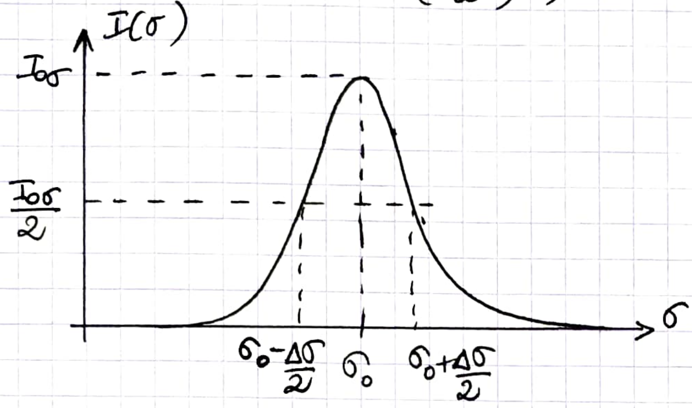
au 1er ordre en D ($\ll 1$) on a donc $\quad 1-\cos D = 0 \quad \sin D = D$

$$\boxed{I(y) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}y(n-1)A\right)\right)}$$

$I(y) = 2I_0\left(1+\cos\left(2\pi\frac{y}{i}\right)\right)$ La frange en $y=0$ est brillante

Exo 3a Profil spectral gaussien

① Représentons la répartition spectrale de l'intensité émise par la source. La raie présente un profil gaussien
$I(\sigma) = I_{0\sigma} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right)$, soit l'allure suivante :



On peut définir la largeur spectrale de la source comme la largeur à mi-hauteur de la courbe $I(\sigma)$.
On cherche donc les valeurs de σ pour lesquels $I(\sigma) = \frac{I_{0\sigma}}{2}$

$$\Leftrightarrow \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2 = \ln 2 \qquad \sigma = \sigma_0 \pm a\sqrt{\ln 2}$$

d'où $\boxed{\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}}$

a est donc l'ordre de grandeur de la largeur de la raie.

② L'intensité émise par la source entre σ et $\sigma + d\sigma$ est

$$dI = I_{0\sigma} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right) d\sigma$$

Les rayonnements aux différents nombres d'onde σ constituant le spectre de la lumière émise sont incohérents. L'intensité totale reçue en F' est donc la somme des intensités dues à chacun des nombres d'onde.

Pour un σ donné $dI_{F'} = dI(\sigma)\left(1+\cos(2\pi\sigma\delta)\right)$

avec $\delta = 2e$ (en F')

soit $dI_{F'} = I_{0\sigma} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right)\left(1+\cos(2\pi\sigma 2e)\right) d\sigma$

et $I_{tot} = I_{0\sigma} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right)\left(1+\cos(2\pi\sigma 2e)\right) d\sigma$

$$I_{tot} = I_{0\sigma}\left(\int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right) d\sigma + \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right)\cos(2\pi 2e\sigma)\, d\sigma\right)$$

* Calculons d'abord la première intégrale

posons $y = \frac{\sigma-\sigma_0}{a}$ $\quad d\sigma = a\,dy$

$$\int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2\right) d\sigma = a\int_{-\frac{\sigma_0}{a}}^{\infty} \exp(-y^2)\,dy$$

or $a \ll \sigma_0$ $\quad \frac{\sigma_0}{a} \to \infty$

$$\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} a\, e^{-y^2} dy = \underline{\underline{a\sqrt{\pi}}}$$

* La deuxième intégrale a exactement la forme proposée

$$\int_0^{\infty} \cos(2\pi 2e\sigma)\, e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma \simeq a\sqrt{\pi}\, e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \cos(2\pi\sigma_0\delta)$$

avec $\delta = 2e$

d'où

$$I_{tot} = I_{0\sigma}\, a\sqrt{\pi}\left(1 + e^{-\pi^2 a^2\delta^2}\cos(2\pi\sigma_0\delta)\right)$$

$$\boxed{I_{tot} = \frac{I(0)}{2}\left(1 + e^{-\pi^2 a^2\delta^2}\cos(2\pi\sigma_0\delta)\right)}$$

où $I(0)$ est l'intensité

en F' pour $\delta = 0$.

$\delta = 2e = 2v_0 t$, le courant $i(t)$ est proportionnel à I soit :

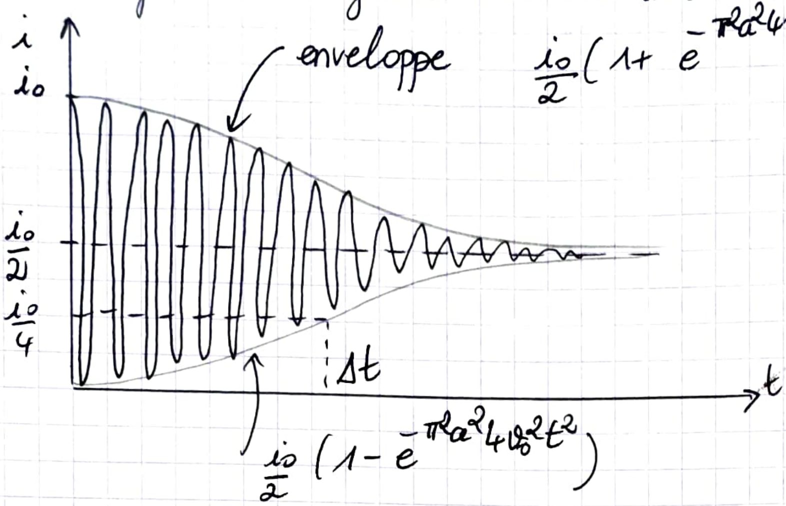
$$\boxed{i(t) = \frac{i_0}{2}\left(1 + e^{-\pi^2 a^2 4 v_0^2 t^2}\cos(2\pi\sigma_0 2v_0 t)\right)}$$

variation lente

variation rapide

$i(t)$ est quasi-sinusoïdale $\langle i\rangle = \frac{i_0}{2}$ et d'amplitude $\frac{i_0}{2} e^{-\pi^2 a^2 4 v_0^2 t^2}$

L'oscillogramme enregistré a donc l'allure suivante



③ La visibilité des franges est donnée par les valeurs de i sur l'enveloppe soit $i_{max} = \frac{i_0}{2}(1+e^{-\pi^2 a^2 4\vartheta_0^2 t^2})$

$i_{min} = \frac{i_0}{2}(1-e^{-\pi^2 a^2 4\vartheta_0^2 t^2})$

d'où $C = e^{-4\pi^2 a^2 \vartheta_0^2 t^2}$

Le contraste des franges diminue lorsque l'on s'écarte du centre.

On peut sur l'oscillogramme mesurer la largeur à mi-hauteur Δt des enveloppes :

Alors $C = \frac{1}{2} = e^{-4\pi^2 a^2 \vartheta_0^2 \Delta t^2}$

$$\ln 2 = 4\pi^2 a^2 \vartheta_0^2 \Delta t^2$$

on déduit de la mesure de Δt

$$a = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi \vartheta_0 \Delta t}$$

soit $\boxed{\Delta\sigma = \frac{\ln 2}{\pi \vartheta_0 \Delta t}}$