

## Exercices de Mécanique

### 1 Référentiels non-galiléens

#### Exercice 1 Expérience du manège inertiel

Si vous allez à la Cité des Sciences vous pourrez monter dans un manège inertiel. Une fois que l'on est entré les portes se referment et le manège est mis en mouvement par rapport au référentiel terrestre, en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  par rapport à un axe vertical, dans le sens trigonométrique pour un observateur extérieur. L'une des expériences consiste à lancer une balle en mousse depuis le centre du manège et d'essayer d'atteindre un cible situé en face à une distance  $d=3\text{m}$ .

1. Définir le référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$  et le référentiel  $\mathcal{R}$  non galiléen nécessaire à l'étude. Quel est le mouvement de  $\mathcal{R}$  par rapport à  $\mathcal{R}_g$  ?
2. Lors du premier lancé, le tireur vise la cible. Est-ce qu'il l'atteint ? Est-ce que son point d'impact est à gauche ou à droite de la cible ? Justifier.
3. Lors du deuxième tir, le tireur n'ayant pas atteint sa cible la première fois décide de tirer plus fort. A-t-il raison ? tort ? ne peut-on pas conclure ?
4. La distance entre les points de départ et d'arrivée étant faible, on suppose que la vitesse initiale  $v_0$  est suffisante pour que le mouvement ait lieu dans un plan horizontal.  $(Oz)$  est l'axe vertical confondu avec l'axe de rotation. La cible est sur l'axe  $(Ox)$  et le tireur en  $O$ . L'hypothèse conduit à négliger une force, laquelle ?
5. Etablir l'équation du mouvement dans le référentiel lié au manège.
6. Montrer que :

$$x = v_0 t \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y = -v_0 t \sin(\omega t)$$

est la solution de ces équations.

7. Déterminer le point d'impact sur le mur et commenter vos réponses aux questions précédentes.

#### Exercice 2 Système deux masses - ressort

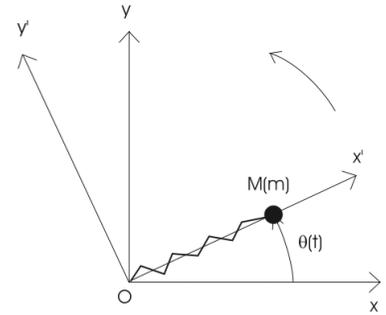
Deux masses  $m$  et  $m'$ , reliées par un ressort sans masse de raideur  $k$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , sont disposées verticalement sur un plateau horizontal. L'ensemble est initialement immobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le plateau est alors accéléré uniformément à  $\vec{a}_0 = a_0 \vec{k}$  par rapport au sol. Déterminer les valeurs de  $a_0$  pour lesquelles la masse  $m'$ , décolle du plateau.

### Exercice 3 Mouvement dans un référentiel en rotation

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est élastiquement lié à l'origine  $O$  d'un axe  $Ox'$  par un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ .

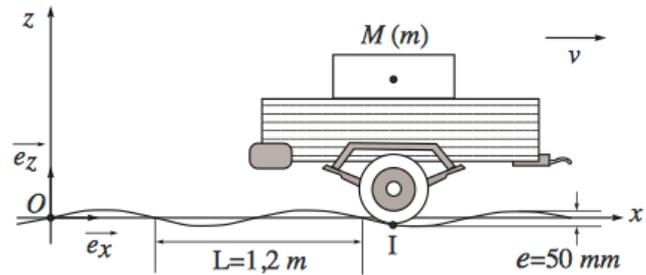
$Ox'$  est astreint à tourner autour de l'axe vertical  $Oz$  avec une vitesse angulaire constante  $\Omega = \dot{\theta}$ . On note  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  les référentiels  $(Ox, Oy, Oz)$  et  $(Ox', Oy', Oz)$ . Le point  $M$  glisse sans frottement le long de l'axe  $Ox'$ . On suppose que  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > \Omega$ .

1. En travaillant dans  $\mathcal{R}'$ , exprimer  $x'(t)$ , sachant que  $x'(0) = l_0$  et  $\dot{x}'(0) = 0$ .
2. Quelles sont les composantes de la réaction  $\vec{R}$  exercée par l'axe  $Ox'$  sur le point matériel ?



### Exercice 4 Objet sur une remorque

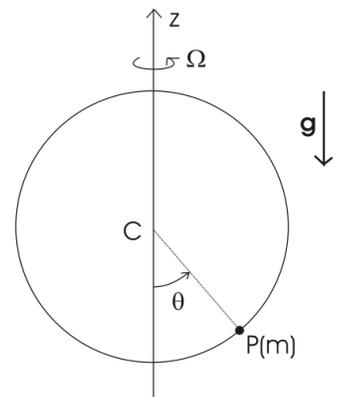
Une boîte  $M$  de masse  $m$  est posée sur le plateau d'une remorque qui roule sur une route bosselée, qu'on modélisera par une sinusoïde  $z = e \cos(\frac{2\pi}{L}x)$ . La voiture roule à vitesse  $v$  constante dans la direction  $x$  et on suppose que les amortisseurs et les pneus de la remorque sont complètement rigides. On suppose que la boîte ne glisse pas sur la voiture. A partir de quelle vitesse  $v$  la boîte n'est elle plus en permanence en contact avec le plateau de la remorque ?



### Exercice 5 Anneau en rotation

Un anneau  $P$  de masse  $m$  coulisse sans frottement sur un cercle de centre  $C$  et de rayon  $R$ . Il est soumis à l'action de la pesanteur. Le cercle tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$  autour de l'axe fixe  $(Cz)$ . On repère par l'angle  $\theta$  la position de la masse  $m$ . On utilisera les coordonnées polaires de centre  $C$  adaptées au problème.

1. Faire le bilan des forces qui s'appliquent à l'anneau  $P$  dans le référentiel lié au cercle. Donner l'équation du mouvement.
2. En déduire les positions d'équilibre. Définir une pulsation critique  $\Omega_c$  puis rassembler les résultats sur un graphe  $\theta_{eq} = f(\Omega)$ .
3. Parmi les forces lesquelles ont un travail non nul ? En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale  $E_p(\theta)$ . Tracer l'allure de  $E_p$  pour différentes valeurs de  $\Omega$ .
4. Retrouver à l'aide de  $E_p$  les positions d'équilibre et discuter de leur stabilité. Compléter le diagramme avec cette information. Pourquoi peut-on parler de bifurcation ?
5. Retrouver l'équation du mouvement en appliquant le théorème du moment cinétique.



### Exercice 6 Satellite dans la soute d'une navette

La Terre est assimilée à un astre à symétrie sphérique, de rayon  $R$ , de centre  $C$ , origine du référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$  supposé galiléen. On note  $g_0$  l'accélération de la pesanteur au niveau du sol.

1. Une navette spatiale décrit une orbite circulaire de rayon  $r$  autour du centre de la Terre. Déterminer la pulsation temporelle  $\omega_0$  de son mouvement.
2. Il est d'usage de dire qu'un objet situé dans la soute se trouve en impesanteur. Que signifie cette expression ?
3. Soit  $\mathcal{R}_N$  le référentiel lié à la navette, dont l'origine  $A$  est le centre de masse de la navette. Il est en rotation de centre  $C$  par rapport à  $\mathcal{R}_g$ , de sorte que la navette garde toujours la même orientation par rapport à la Terre. On utilisera les axes  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ , où  $\vec{u}_r$  est radial,  $\vec{u}_\theta$  colinéaire à la trajectoire circulaire de la navette. Les axes  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$  sont fixes dans  $\mathcal{R}_N$ .

Un satellite situé dans la soute est assimilé à un point matériel  $P$  de masse  $m$  repéré par :

$$\vec{AP} = x\vec{u}_r + y\vec{u}_\theta + z\vec{u}_z$$

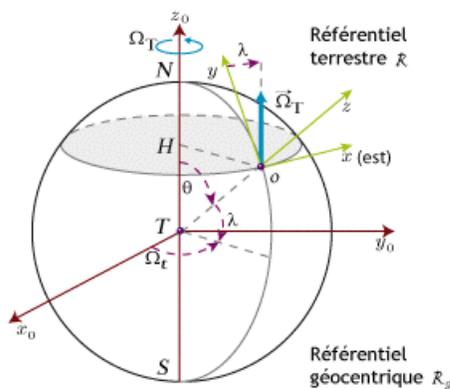
Quelles sont les forces qui s'exercent dans  $\mathcal{R}_N$  sur le point matériel  $P$ ? Donner leur expression vectorielle.

4. Exprimer l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_P$  du point matériel  $P$  dans  $\mathcal{R}_N$  en fonction de  $m, \omega_0, x, y$  et  $z$ .
5. On peut effectuer un développement limité de  $\mathcal{E}_P$  au voisinage du point  $A$ . On obtient :

$$\mathcal{E}_P \approx -\frac{m\omega_0^2}{2}(3x^2 - z^2)$$

à une constante additive près. Représenter l'allure des fonctions  $\mathcal{E}_P(x, z = 0)$  et  $\mathcal{E}_P(x = 0, z)$ . La position d'équilibre  $A$  est-elle a priori stable ?

6. Dans le cadre de l'approximation de la question précédente, établir les équations du mouvement d'une masse ponctuelle au voisinage du point  $A$ , dans le référentiel  $\mathcal{R}_N$ . A partir de ces équations conclure quant à la stabilité de la position d'équilibre  $A$ .

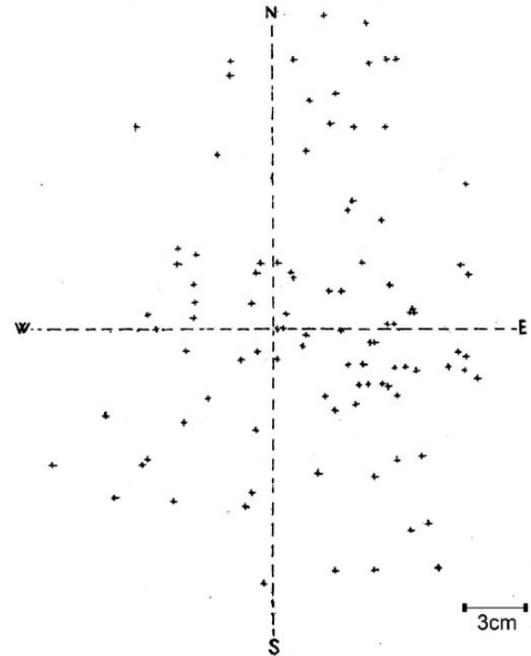


## Exercice 7 Déviation vers l'est

On étudie l'expérience réalisée par Ferdinand Reich, en 1833, dans un puits de mines à Freiberg (latitude  $\lambda = 50^{\circ}54'$ ). Des billes étaient lâchées d'une hauteur  $h = 158,5$  m.

On travaille dans le référentiel terrestre. On prend comme repère  $(O, x, y, z)$ ,  $O$  étant au fond du puits,  $(Ox)$  vers l'est,  $(Oy)$  vers le nord, et  $(Oz)$  selon la verticale ascendante. On note  $\vec{\Omega}_T$  la vitesse de rotation de la terre autour de son axe,  $g$  l'intensité du champ de pesanteur et  $m$  la masse d'une bille.

On rappelle que dans le référentiel terrestre, le poids inclut la force d'inertie d'entraînement due au mouvement de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique. On néglige tout frottement dans cette étude.

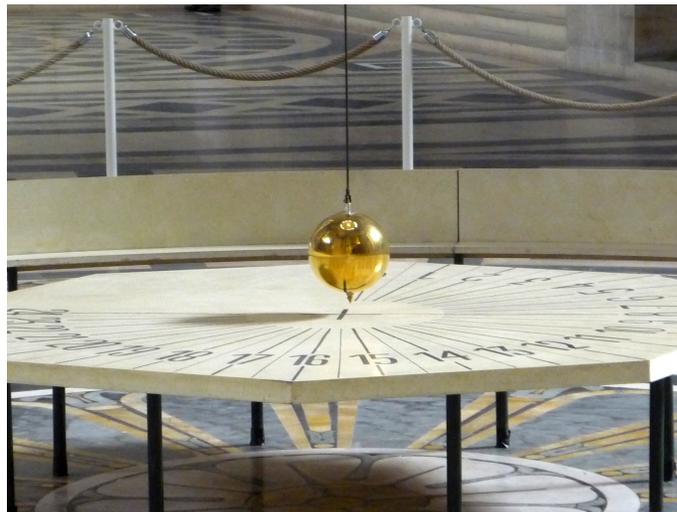


1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille dans le référentiel terrestre.
2. On cherche à évaluer l'importance de la force de Coriolis. Quelle est la vitesse maximale d'une bille pour laquelle la force de Coriolis est égale à un millième de son poids ? On prendra  $\Omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .
3. Comme on constate expérimentalement que la vitesse précédente n'est pas atteinte, on va trouver une solution approchée par la méthode dite des perturbations. Cela consiste à résoudre le problème en ignorant dans un premier temps la force de Coriolis, puis à utiliser l'expression de la vitesse ainsi trouvée pour évaluer la force de Coriolis.
  - En utilisant cette idée, mais en travaillant en ordre de grandeur, déterminer l'ordre de grandeur de l'écart entre le point de chute et  $O$ .
  - La bille est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$  à la verticale du point  $O$ . Quelles sont les expressions de  $\dot{x}_0(t)$ ,  $\dot{y}_0(t)$ ,  $\dot{z}_0(t)$  des composantes du vecteur vitesse, à l'ordre 0, ie en l'absence de force de Coriolis ?
  - Quelle est l'expression approchée de la force de Coriolis utilisant l'approximation précédente de la vitesse ? Réécrire les équations du mouvement dans cette approximation et les résoudre.
  - Déterminer les coordonnées du point d'impact. Comparer à la mesure expérimentale de Reich, à savoir une déviation moyenne de 28 mm à l'est de  $O$ .
4. La résolution analytique exacte du système non approché est possible. Elle prévoit qu'en plus de la déviation vers l'est il y a une déviation vers le sud. Que faudrait-il faire dans notre étude pour la mettre en évidence ?
5. On entend parfois dire que dans l'hémisphère sud la bille est déviée vers l'ouest. Qu'en pensez vous ?

## Exercice 8 Pendule de Foucault

En 1851, le physicien français Foucault a observé le mouvement d'un pendule supposé simple, destiné à prouver la rotation de la Terre. Foucault a étudié le phénomène tout d'abord avec une masse de 5 kg suspendue à un fil de 2 m de long, puis à l'Observatoire de Paris avec un pendule de 11 m et enfin de façon spectaculaire au Panthéon à Paris (latitude  $\lambda = 48^\circ 51'$ ) avec une masse de 28 kg suspendue à la coupole par un fil d'acier de 1,4 mm de diamètre et de longueur  $\ell = 67$  m.

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  est suspendu par l'intermédiaire d'un fil sans masse de longueur  $\ell$  à un point fixe  $A$  par rapport au sol.



1. Soit  $O$  le point d'équilibre du pendule. Pour des oscillations de faible amplitude, le mouvement est quasi plan et s'effectue pratiquement dans le plan horizontal ( $Oxy$ ). On écarte le pendule de sa position d'équilibre en un point de coordonnées  $(x_0, y_0)$  (très inférieures à  $\ell$ ).

Ecrire les équations du mouvement dans le plan, tenant compte du fait que le référentiel terrestre est non galiléen.

On posera  $\vec{\Omega}_T$  la vitesse de rotation de la terre autour de son axe. Montrer que les équations du mouvement sont les suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x + 2\Omega_T \sin(\lambda) \frac{dy}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2 y - 2\Omega_T \sin(\lambda) \frac{dx}{dt}$$

2. Intégrer les équations du mouvement en posant  $\underline{u} = x + iy$  ce qui revient à repérer le point du plan par le nombre complexe  $\underline{u}$ . Montrer que l'on arrive à une équation différentielle linéaire à coefficients constants.
3. En supposant que la Terre ne tourne pas ( $\Omega_T=0$ ), montrer que le point  $M$  décrit dans le cas général une ellipse avec une période :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

4. Trouver les solutions de l'équation précédente en fonction de  $\omega_0$ ,  $\Omega_T$ ,  $\lambda$  lorsque le pendule est lâché sans vitesse initiale de la position  $x_0 = x_m$ ,  $y_0 = 0$  et que l'on tient compte la rotation de la Terre.
5. Montrer que l'existence de la rotation de la Terre implique que le plan de la trajectoire du point  $M$  tourne autour de l'axe vertical ( $Oz$ ) par rapport aux axes fixés au sol avec la vitesse angulaire

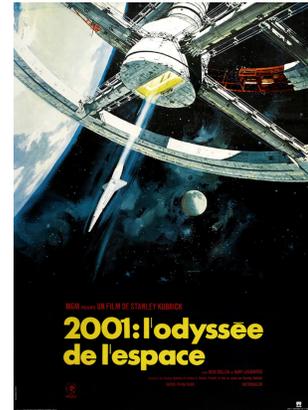
$$\Omega = -\Omega_T \sin(\lambda)$$

Que se passe-t-il aux pôles ou à l'équateur ?

6. Avec les valeurs de l'expérience du Panthéon à Paris, calculer les valeurs de  $T_0$  et  $\Omega$ . En déduire la valeur de la période de rotation complète de l'ellipse.

### Exercice 9 2001 l'Odysée de l'espace

Dans ce film de Stanley Kubrick, les spationautes évoluent en marchant "normalement" dans une station spatiale en forme d'anneau tournant autour de son axe de révolution (dans son référentiel barycentrique....). Avec quels paramètres peut-on reproduire la gravité terrestre ? Où sera le plancher dans la station spatiale ? Pourquoi ? La station devra également permettre un déplacement de spationautes dans le vaisseau similaire à celui expérimenté sur Terre.



### Exercice 10 Fusée

On considère une fusée, constituée d'un corps de masse  $M$  et d'un réservoir de contenant initialement une masse  $m_0$  de gaz. On suppose le mouvement de la fusée vertical. La fusée est propulsée par réaction : elle émet des gaz chauds à une vitesse  $\vec{u} = -u\vec{e}_z$  dirigée vers le bas, *cette vitesse est relative à la fusée*. On note  $m(t)$  la masse de gaz restants dans la fusée, et  $D_m$  le débit massique des gaz éjectés, supposé constant.



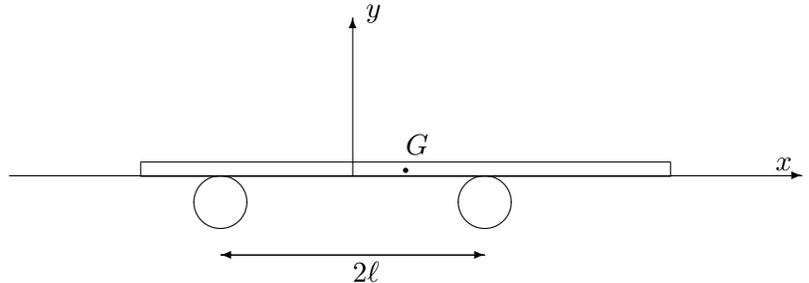
1. En effectuant un bilan de quantité de mouvement entre  $t$  et  $t + dt$  pour le système {gaz +fusée} dans le référentiel galiléen du sol, montrer que la fusée et son contenu sont soumis à l'analogie d'une force, appelée force de poussée :  $\vec{\Pi} = -D_m\vec{u}$
2. Avec une masse totale initiale de la fusée égale à  $M + m_0 = 460$  tonnes, un débit de gaz  $D_m = 3,6 \text{ t}\cdot\text{s}^{-1}$  et une vitesse d'éjection  $u = 2,1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ , la fusée peut-elle décoller ? L'accélération initiale est-elle supportable pour un être humain (calculer le poids apparent ressenti) ?
3. Etablir l'expression approchée de la vitesse  $v(t)$  de la fusée au cours du temps pour un décollage vertical. Tracer  $v(t)$  et calculer la vitesse de la fusée au bout de 15 s. Discuter le modèle utilisé pour le poids.

## 2 Frottement solide

### Exercice 11 Expérience de Timochenko

Deux cylindres de rayon  $R$  tournent en sens inverse à vitesse angulaire  $\omega$  constante. Une planche homogène de masse  $m$  et d'épaisseur négligeable glisse sur les rouleaux. A l'instant  $t = 0$ , le centre d'inertie de la planche a une abscisse non nulle.

Montrer que la planche oscille.  
Donner la période du mouvement.

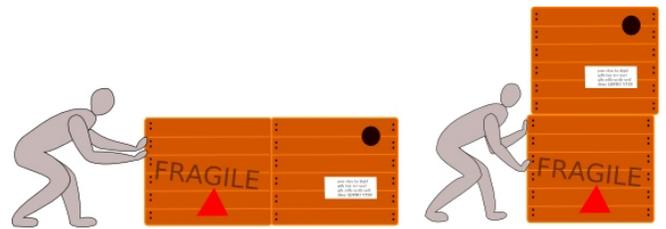


### Exercice 12 Equilibre sur un plateau tournant

Sur un plateau horizontal tournant autour d'un axe fixe vertical à la vitesse angulaire constante  $\omega$ , on dépose un jeton à la distance  $r$  de l'axe de rotation. A quelle condition le jeton reste-t-il là où on l'a posé ?

### Exercice 13 Comment pousser des caisses

Si l'on doit pousser sur un sol horizontal deux caisses identiques, vaut-il mieux les placer l'une derrière l'autre ou les poser l'une sur l'autre ?



### Exercice 14 Règle qui tombe d'une table

Une barre de longueur  $L$  et d'épaisseur négligeable glisse sur une table avec un coefficient de frottement  $f$ . Elle est lancée à  $t = 0$  avec une vitesse  $v_0$  avec son centre en  $x = x_0 < 0$ . A partir de quelle vitesse initiale la barre tombe-t-elle de la table ?

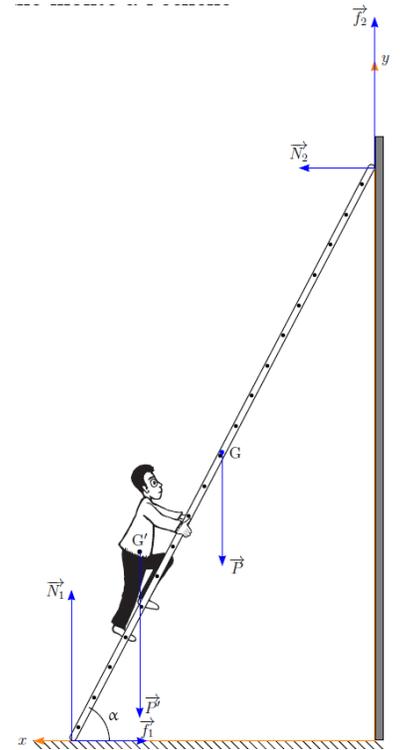


### Exercice 17 Echelle contre un mur

Une échelle AB est assimilée à une barre homogène de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ . Elle repose d'une part sur le sol en un point B, et d'autre part contre le mur vertical en un point A.

On suppose que la réaction avec le plan vertical est sans frottement et on note  $f$  le coefficient de frottement statique avec le plan horizontal (sol). Cette échelle fait un angle  $\alpha$  avec la verticale. Une personne de masse  $M$  monte sur cette échelle.

A quelle condition cette échelle reste-t-elle en équilibre quelle que soit la position de cette personne sur l'échelle ?

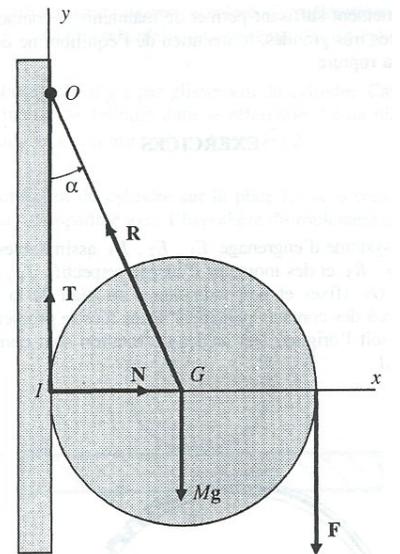


### Exercice 18 Arc-boutement : Dérouler du papier toilette

La figure ci-contre représente un cylindre de rayon  $a$  et de masse  $M$  appuyé en  $I$  avec le coefficient de frottement  $f$  sur un mur vertical qui exerce sur lui l'action de contact  $N\vec{u}_x + T\vec{u}_y$  et qui est retenu en  $G$  par un fil inextensible accroché en un point  $O$  du mur.

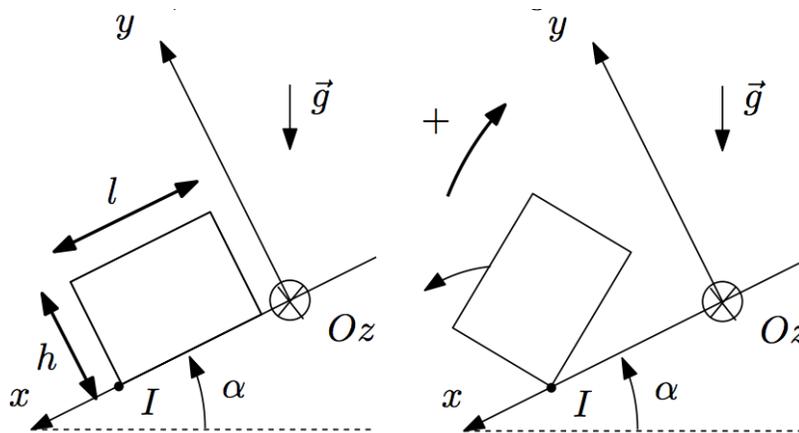
On cherche à provoquer le glissement en  $I$  en exerçant au point de coordonnées  $(2a, 0)$  du cylindre une force  $\vec{F} = -F\vec{u}_y$  avec  $F > 0$ .

1. En supposant l'équilibre maintenu, montrer que, pour  $F$  donnée, le problème est entièrement déterminé et donner les expressions de  $N$  et  $T$  en fonction des données.
2. Calculer la valeur  $F_0$  de  $F$  juste suffisante pour provoquer le glissement.
3. Montrer que si  $f$  est supérieur à une valeur  $f_0$  que l'on exprimera en fonction de  $\alpha$ , il est impossible de provoquer le glissement, aussi intense que soit la force exercée.



### Exercice 19 Basculement

Un bloc de masse  $M$  de longueur  $l$  égale à sa largeur et de hauteur  $h$  repose sur un plan initialement horizontal. On note  $f$  le coefficient de frottement entre le bloc et le plan, la nature du contact se caractérise par  $0 < f < 1$ . Un opérateur augmente progressivement la valeur de l'angle  $\alpha$  que fait le plan avec l'horizontale. On modélise le basculement éventuel du bloc par un pivotement sans glissement autour de la génératrice de contact passant par  $I$ . On note alors  $J_{Iz}$  le moment d'inertie du bloc par rapport à cet axe et  $\vec{\omega} = -\omega\vec{e}_z$ , son vecteur rotation instantané autour de cet axe, où  $\omega > 0$  est sa vitesse angulaire.



1. On ignore la possibilité de basculement. A quelle condition sur  $\alpha$  y a-t-il glissement ?
2. A quelle condition sur  $\alpha$  y a-t-il basculement sans glissement ?
3. En déduire la condition sur les dimensions du bloc telle que celui-ci glisse sans avoir préalablement basculé quelle que soit la nature du contact envisagé. Application numérique pour  $f = 0,5$ .

### Exercice 20 Corde autour d'un cylindre

Un navire est amarré à une bitte cylindrique par une corde. On suppose que la corde est immobile et à la limite du glissement. Appliquer le théorème de la résultante cinétique à un morceau élémentaire de corde sur la bitte entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  et en déduire le rapport des tensions de la corde à chaque bout de la corde. Cela explique-t-il pourquoi une corde enroulée sur deux ou trois tours peut bloquer un bateau à quai même en reposant par terre une des extrémités.

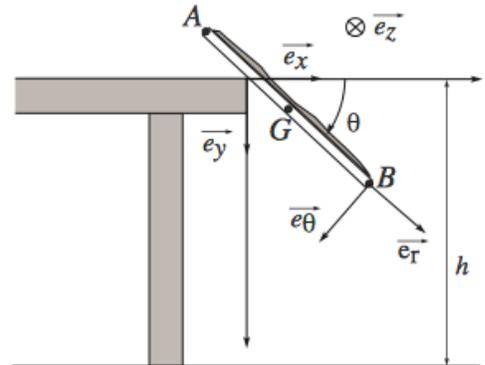
### Exercice 21 De quel côté tombent les tartines beurrées

Existe-t-il une raison pour laquelle les tartines beurrées tomberaient plus souvent du côté beurre ? Le but de cet exercice est d'apporter une réponse.

On imagine une tartine homogène (longueur  $2a$ , largeur  $2b$ , épaisseur  $2e$  et masse  $m$ ) posée sur une table. Sans faire attention, une personne la pousse vers un bord très lentement. Quand le milieu de la tartine atteint le bord  $O$ , la tartine amorce une rotation autour de l'arête ( $Oy$ ). L'action de la table sur la tartine est modélisée par une force  $\vec{R} = N\vec{e}_\theta + T\vec{e}_r$  appliquée en  $O$ . On note  $\theta$  l'angle entre la verticale et la normale à la tartine.

On donne le moment d'inertie de la tartine selon ( $Oz$ ) :

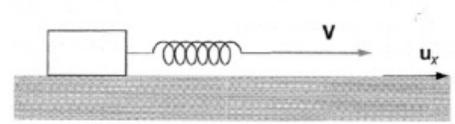
$$J = \frac{1}{3}m(a^2 + 4e^2)$$



1. Exprimer  $\ddot{\theta}$  et  $\dot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ .
2. En déduire  $T$  et  $N$ . Simplifier les expressions vu que  $a = 4$  cm et  $e = 0,4$  cm. La tartine peut-elle quitter la table sans glisser ? Comme le coefficient de frottement table/tartine vaut à peu près 1, à quel angle  $\theta_0$  la tartine commence-t-elle à glisser ?
3. A partir de cet instant pris comme origine des temps, la tartine quitte la table en un temps très bref, conservant quasiment la même orientation. Quel est, après avoir quitté table, la loi d'évolution  $z_G(t)$ , où  $G$  est le barycentre de la tartine, en supposant que la tartine ne retouche plus la table ?
4. Déterminer le temps  $\tau$  pour lequel la tartine touche le sol. On considèrera que la hauteur  $h$  de la table est évidemment nettement supérieure aux dimensions de la tartine et que la vitesse initiale de la tartine est très faible devant sa vitesse finale.
5. On admet que pendant la phase de vol, la vitesse angulaire de la tartine reste constante. En déduire  $\theta(\tau)$ . AN pour  $h = 70$  cm.
6. De quel côté tombe la tartine, si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?
7. Des astronautes prennent leur petit déjeuner sur la Lune. De quel côté tombent leurs tartines ?

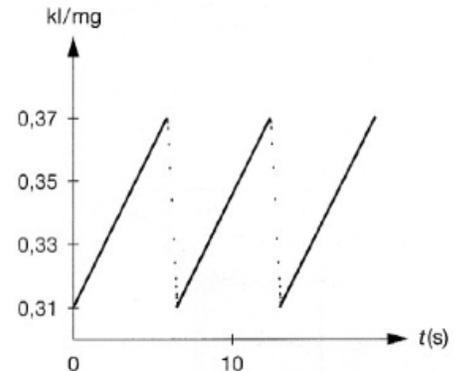
### Exercice 22 Régime fixe-glisse

Un palet, de masse  $m$  peut glisser sur une plaque horizontale fixe (figure ci-contre). Le palet est attaché à un ressort, de raideur  $k$ , dont l'extrémité est entraînée à vitesse fixe  $\vec{V} = V\vec{u}_x$ . On appelle  $l$  l'élongation du ressort par rapport à sa longueur à vide. Les coefficients de frottement statique et dynamique sol-palet sont notés  $f_s$  et  $f_d$ .



1. Calculer l'élongation  $l_P$  du ressort en régime permanent. Ce régime est-il stable ?

2. En revanche, quand  $V$  est assez faible, on observe un régime, nommé fixe-glisse et dont le profil d'élongation est tracé sur le graphique ci-contre (pour indication, un point est tracé toutes les 1,5 ms). Dans ce régime, alternativement, le palet est fixe, puis se détache brusquement et glisse. Identifier les deux types de régimes sur cette figure et expliquer l'allure générale.



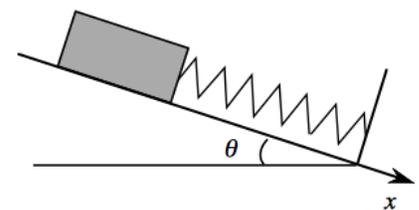
3. Calculer l'élongation  $l_1$  en fin de phase fixe. Pour trouver celle en fin de phase glisse  $l_2$ , on écrira notamment l'équation régie par  $l(t)$ . En déduire  $f_s$  et  $f_d$ .

4. Expliquer pourquoi le mouvement est périodique, et évaluer sa période  $T_0$  sachant que  $m = 1,6 \text{ kg}$ ,  $k = 1,5 \cdot 10^2 \text{ N.cm}^{-1}$  et  $V = 10 \mu\text{m.s}^{-1}$ . Comparer au graphique précédent.

5. Le phénomène fixe-glisse est à l'origine, dans la vie courante, par exemple des pneus ou des craies qui crissent, des gonds de porte qui grincent. Dans quel domaine se trouve alors  $T_0$  ? Comment empêcher, par exemple, des gonds de porte de grincer, ou une craie de crisser ?

### Exercice 23 Hysteresis de frottement

Une masse  $m$  est attachée à un ressort de raideur  $k$  lié à un mur. Le support fait un angle  $\theta$ , initialement nul par rapport à l'horizontale. Le contact entre la masse et le support est caractérisé par les coefficients de frottement statique  $f_s$  et dynamique  $f_d$  qui sont supposés différents mais très proches. On repère par  $x=0$  la position initiale de la masse, alors que le ressort est détendu.



1. Quelle est en fait la zone d'équilibre possible pour  $\theta=0$  ?

2. On augmente infiniment lentement l'angle du support à partir de  $x = 0$  et  $\theta = 0$ . Pour quel angle  $\theta_1^+$  la masse bouge-t-elle ? Vers quelle position  $x_1$  évolue-t-elle ? On donnera les réponses en fonction de  $f_s$ ,  $f_d$ ,  $k$  et  $m$  à l'ordre le plus bas non nul.

3. On commence à diminuer très lentement  $\theta$ . Pour quel angle  $\theta_2^-$  la masse quitte-t-elle  $x_1$  ? Vers quelle position  $x_2$  ?

4. On réaugmente très lentement  $\theta$ . pour quel angle  $\theta_3^+$  la masse quitte-t-elle  $x_2$  ? Vers quelle position  $x_3$  ? En déduire  $x_n$  et  $\theta_n$ . Tracer l'allure de la courbe  $x = f(\theta)$  donnant la position de la masse en fonction de  $\theta$ . Pourquoi dit-on que le système garde la mémoire des états antérieurs ?

### Exercice 24 Saut à l'élastique un peu particulier

Un américain a récemment réalisé un saut à l'élastique avec un élastique coupé en deux, "racommodé" en intercalant les pages de deux livres fixés aux deux extrémités des deux morceaux d'élastique. Les détails du "show" sont visibles sur la vidéo : <http://vimeo.com/64918615>.

*Données* : on pourra considérer que le ruban adhésif entourant les pages du livre ainsi que la couverture des livres exercent une force normale d'environ 20 N.

*Questions* :

En faisant des hypothèses raisonnables et en introduisant les ordres de grandeurs nécessaires, estimer le nombre de pages nécessaires pour pouvoir réaliser l'expérience. Auriez-vous tenté l'expérience telle qu'elle a été réalisée ?

*Indications*

Estimer la raideur  $k$  du ressort en supposant l'énergie mécanique conservée.

Effectuer un bilan de forces sur le livre du bas au moment de l'élongation maximale de l'élastique.

Estimer alors le nombre de pages que doit comporter le livre en prenant une valeur raisonnable pour le coefficient de frottement solide.

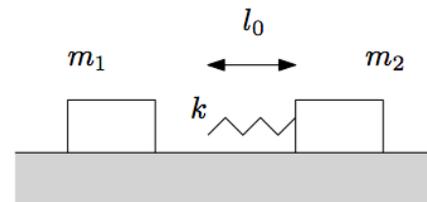
## 3 Révisions de MPSI

### Exercice 25 Bille sur un igloo

On pose au sommet d'un igloo hémisphérique une petite pièce assimilable à un point matériel. On pousse légèrement la pièce, de sorte qu'elle commence à glisser le long de l'igloo. A quel endroit décolle-t-elle de l'igloo ?

### Exercice 26 Collision

Soient deux masses  $m_1$  et  $m_2$  se déplaçant sans frottement sur un plan horizontal. La masse  $m_2$  est reliée à un ressort de raideur  $k$ , de masse négligeable et de longueur à vide  $l_0$ . La masse  $m_1$  a une vitesse initiale  $v_0$  et  $m_2$  est immobile à  $t=0$ .



1. Déterminer la compression maximale du ressort.
2. Déterminer les vitesses des deux masses après l'interaction.

### Exercice 27 Puits de potentiel

Soit une particule de masse  $m$  de vitesse  $v_0$  à l'infini. Elle arrive avec un paramètre d'impact  $b$  sur une particule immobile placée en  $O$  (si elle n'était pas déviée elle passerait à la distance  $b$  de la particule immobile). On décrit l'interaction de ces particules par une énergie potentielle  $U(r)$  telle que :

- pour  $r > R$ ,  $U(r)=0$
- pour  $r < R$ ,  $U(r) = -U_0$

Etudier la trajectoire de la particule.

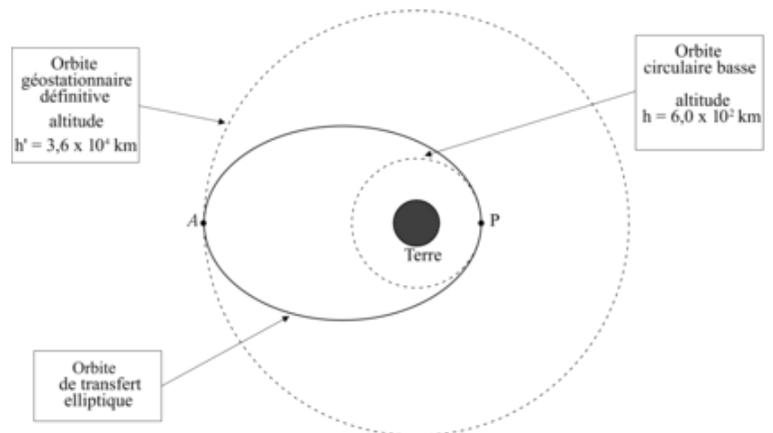
### Exercice 28 Orbite de transfert

On veut transférer un satellite terrestre à l'altitude  $h=600$  km sur l'orbite géostationnaire à l'altitude  $h'=36\,000$  km. Pour cela, on lui fait décrire la demi ellipse ( $H$ ) dont  $P$  et  $A$  sont respectivement le périhélie et l'apogée.

1. Calculer le demi-grand axe  $a$  de ( $H$ ).
2. Quel est la durée du transfert ?
3. Quelles variations de vitesse doit-on faire aux points  $A$  et  $P$ ? On admettra que l'énergie mécanique sur une orbite elliptique de demi-grand axe  $a$  est donnée par

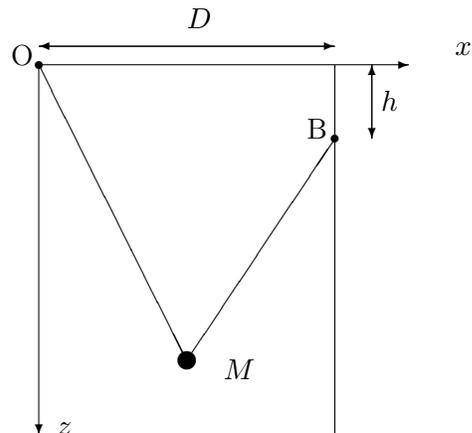
$$E_m = -\mathcal{G}mM/2a$$

4. Quelle est l'énergie fournie par le moteur par kg de satellite pour changer de vitesse ?
5. Pourquoi cette trajectoire est-elle la moins coûteuse ?



### Exercice 29 Un pendule particulier

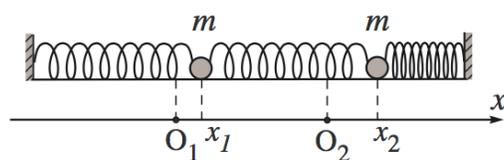
Une perle est enfilée sur un fil inextensible de masse négligeable et de longueur  $2a$ . La perle peut glisser sans frottement sur le fil. Une des extrémités est accrochée en  $O$  et l'autre en un point  $B$  de coordonnées  $(D, 0, h)$ . On suppose que les deux points  $A = O$  et  $B$  sont distants de plus que  $2a$  pour que le fil ne soit pas tendu entre les deux points.



1. Déterminer la ou les positions d'équilibre.
2. Vérifier que pour  $h=0$  on retrouve bien  $x = D/2$ .
3. Dans le cas où  $h=0$ , donner la pulsation des oscillations de faible amplitude autour de cette position d'équilibre. Vérifier la pertinence du résultat dans le cas limite  $D \ll 2a$ .

### Exercice 30 Oscillateurs couplés

On considère le système suivant où les trois ressorts sont identiques et de constante de raideurs  $k$ . Les positions des masses  $m$  sont repérées par leurs abscisses  $x_1$  et  $x_2$  à partir des positions d'équilibre  $O_1$  et  $O_2$ , positions pour lesquelles les ressorts ne sont pas tendus. On suppose qu'on lâche les masses aux abscisses  $x_{1m}$  et  $x_{2m}$  sans vitesse initiale.



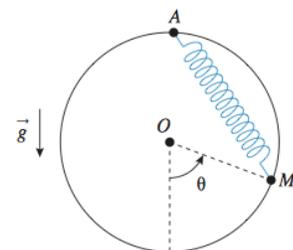
1. Écrire les équations différentielles du mouvement des deux masses.
2. En posant  $\omega_0^2 = k/m$ , chercher à quelle condition portant sur  $\omega$  il est possible d'avoir des solutions de la forme :

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

3. En déduire les deux pulsations propres possibles pour le système et écrire la solution générale du mouvement des deux masses.
4. Quelles sont les solutions  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du problème? En déduire les conditions sur  $x_{1m}$  et  $x_{2m}$  pour que les mouvements des deux masses soient harmoniques et décrire ces mouvements.

### Exercice 31 Rappel élastique

Une masselotte, assimilée à un point matériel  $M$  de masse  $m$ , est assujettie à glisser sans frottement sur un cercle vertical de centre  $O$  et rayon  $R$ . Elle est reliée au point  $A$  par un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur au repos  $\ell_0$ . Établir par trois méthodes différentes l'équation du mouvement du point  $M$ . Discuter les équilibres, leur stabilité, et indiquer éventuellement la période des petites oscillations.



### Exercice 32 Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ de force en $1/r^n$

Un point matériel de masse  $m$  évolue dans le champ de force centrale  $F(r)\vec{u}_r$ , de centre  $O$ .

1. Quelle relation lie le rayon  $r_0$  et la vitesse  $v_0$  dans le cas d'une trajectoire circulaire ?
2. L'objet subit une perturbation de vitesse, de sorte qu'à  $t=0$  :  $r(0) = r_0$ ,  $v_\theta(0) = r_0\dot{\theta}(0) = v_0$  et  $v_r(0) = \dot{r}(0) = \alpha v_0$ , avec  $\alpha \ll 1$ . Étudier l'évolution du rayon  $r(t)$  au voisinage de  $r_0$ , et établir un critère que doit vérifier le champ de force pour que l'évolution ultérieure se fasse au voisinage du cercle initial.
3. Que devient cette condition pour un champ de force en  $1/r^n$ ? Qu'en est-il pour le cas newtonien ?

### Exercice 33 Avance du périhélie de Mercure

#### Préliminaire

1. Soit un champ de force newtonien de la forme :

$$\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

En utilisant le vecteur de Lenz

$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$$

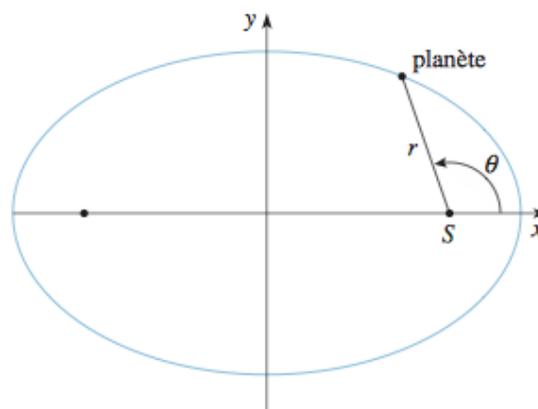
retrouver l'équation polaire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

de l'ellipse trajectoire décrite par une planète autour du Soleil.

Relier en particulier le paramètre  $p$  à  $m$ ,  $L$  ( $\vec{L}_O = L\vec{e}_z$ ) et  $\alpha$  constante d'interaction à préciser.

2. Exprimer  $p$  à l'aide de  $r_A$  et  $r_P$  distances en périhélie et à l'apogée de la trajectoire.



## Avance du périhélie de Mercure (suite)

### Avance du périhélie

En Relativité Générale, le mouvement d'une planète de masse  $m$  autour du Soleil, assimilé à une sphère homogène de masse  $M_0$  et de centre  $S$ , doit être décrit comme si au potentiel d'attraction newtonienne subi par la masse (de la forme  $V(r) = -\frac{GM_0m}{r}$ ) se superposait un potentiel perturbateur

$$V_P(r) = -\frac{GM_0}{c^2} \frac{L^2}{m} \frac{1}{r^3} = -\frac{\epsilon}{3r^3}$$

où  $c$  désigne la vitesse de la lumière ( $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ ). On prendra  $M_0 = 2.10^{30} \text{ kg}$  (on suppose que  $M_0 \gg m$  de telle sorte que l'on peut considérer le Soleil comme immobile). On traitera  $V_P$  comme une perturbation par rapport au potentiel newtonien  $V$ .

1. Quelle condition doit satisfaire le mouvement de la planète pour qu'il en soit ainsi ? Vérifier rapidement si l'on peut appliquer cette approximation à la Terre et à Mercure (dont la période de révolution autour du soleil est de 88 jours). On rappelle que la distance Terre-Soleil est  $R_T = 1,5.10^{11} \text{ m}$ . On admet alors qu'en première approximation la trajectoire de la planète reste sensiblement elliptique. On appelle  $(Ox)$  l'axe focal et  $(Oy)$  l'axe perpendiculaire à  $(Ox)$ .
2. Exprimer  $\frac{d\vec{A}}{dt}$  où  $\vec{A}$  est le vecteur de Runge-Lenz, en fonction de  $\epsilon$ ,  $G$ ,  $M_0$ ,  $\theta$  et  $\frac{d\theta}{dt}$  ainsi que de l'excentricité  $e$  et du paramètre  $p = \frac{L^2}{m^2GM_0}$  de l'ellipse. Ce vecteur sera exprimé dans la base polaire puis dans la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ . En déduire que la variation  $\Delta\vec{A}$  du vecteur  $\vec{A}$  pendant une période de révolution de la planète sur sa trajectoire elliptique est égale à :

$$\Delta\vec{A} = 2e\pi \frac{\epsilon}{GmM_0p^2} \vec{e}_y$$

Données :

$$\int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta = 2e\pi$$

En déduire que le potentiel perturbateur  $V_P$  d'origine relativiste entraîne une déformation de la trajectoire correspondant à une rotation lente du grand axe de l'ellipse, dans son plan, autour du Soleil.

3. Calculer l'angle  $\Delta\varphi$  dont tourne la trajectoire de la planète pendant une période de révolution en fonction de  $G$ ,  $M_0$ ,  $c$  et des distances maximale et minimale,  $r_A$  et  $r_P$ , de la planète au Soleil.
4. En déduire "l'avance séculaire"  $\delta\Omega$  pour une planète dont la période de révolution, exprimée en jours sidéraux, est  $T$ , c'est-à-dire l'angle dont a tourné le grand axe de sa trajectoire au bout d'un siècle (on rappelle qu'un an correspond à  $T_0 = 365,25$  jours sidéraux). Calculer  $\delta\Omega$  en secondes d'arc (1 seconde d'arc est égale à  $1/3600$  degré) pour Mercure, dont l'aphélie se trouve à  $7,0.10^{10} \text{ m}$  du Soleil et le périhélie à  $4,6.10^{10} \text{ m}$ . Expérimentalement, on trouve  $\delta\Omega = 42,6 \pm 0,9$  secondes d'arc. La théorie relativiste rend-elle effectivement compte de cette valeur ?

### Exercice 34 Limite de Roche

La comète Shoemaker-Lévy 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter en morceaux à cause des "forces de marées" dues à Jupiter. On se propose, dans cet exercice, de déterminer, par un modèle simple, la distance en dessous de laquelle la comète se disloque en s'approchant de Jupiter.

On fait les hypothèses suivantes :

- Jupiter est sphérique et homogène, de rayon  $R_J = 71\,400$  km, de masse  $M_J = 1,91 \cdot 10^{27}$  kg et de masse volumique  $\mu_J$  ;
- la comète est sphérique et homogène, de rayon  $R_C$  , de masse volumique  $\mu_C = 1,00 \cdot 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> ;
- le référentiel "Jupiterocentrique" est galiléen ;
- la comète n'est soumise qu'à l'action gravitationnelle de Jupiter ;
- la comète est en orbite circulaire de rayon  $d$  autour de Jupiter (avec  $R_C \ll d$ ).

1. Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un petit volume élémentaire, de masse  $dm$ , de la comète dans le référentiel "Cométocentrique".
2. On considère un modèle dans lequel la cohésion de la comète n'est plus assurée si le terme des marées dépasse le champ gravitationnel propre de la comète. En se plaçant à la périphérie de la comète pour comparer les deux termes, déduire l'ordre de grandeur de la distance limite  $d_{lim}$  à laquelle la comète peut s'approcher de Jupiter sans risque (appelée "limite de Roche").

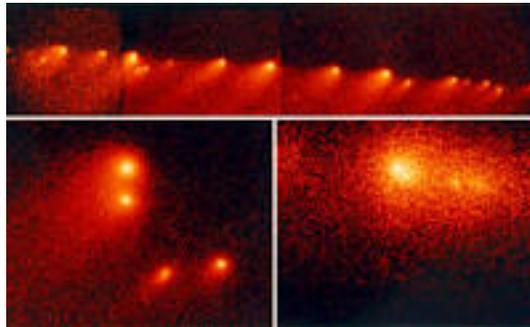


Image des fragments de la comète Shoemaker-Levy 9 le 17 mai 1994.

*Les calculs ont montré que la forme fragmentée inhabituelle de la comète est liée à un précédent passage à proximité de Jupiter en juillet 1992. À cette période, l'orbite de la comète Shoemaker-Levy 9 croise la limite de Roche de Jupiter et les forces de marée de Jupiter agissent pour séparer la comète en différents morceaux. Par la suite elle est observée comme une série de fragments allant jusqu'à 2 km de diamètre. Ces fragments entrent en collision avec l'hémisphère sud de Jupiter entre le 16 et le 22 juillet 1994 à une vitesse d'environ 60 km/s. Lors de cet événement, les importantes "cicatrices" que laissent les impacts des fragments sont plus visibles que la célèbre grande tache rouge et persistent pendant plusieurs mois.*



Les taches sombres indiquent les sites d'impact sur l'hémisphère sud de Jupiter.