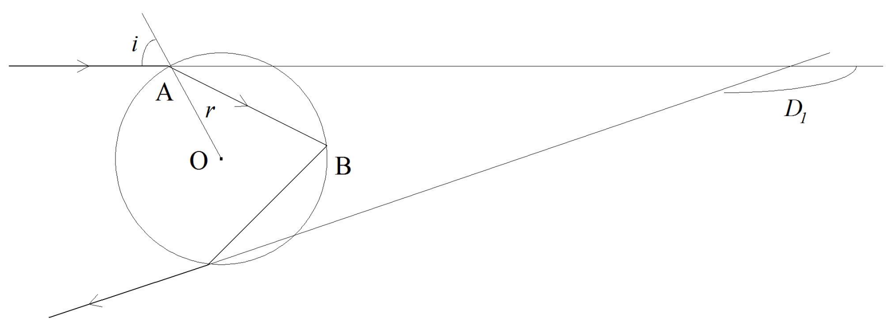
Exercices d'optique géométrique

---

1. **Le catadioptre**
   Le catadioptre est formé de trois miroirs plans, perpendiculaires deux à deux, en forme de coin de cube creux. Indiquer la direction du rayon lumineux réfléchi par les trois faces du système catadioptrique, montrer qu'après trois réflexions successives, un rayon incident est réfléchi parallèlement à lui-même. Citer une application de ce système.

---

2. **Arc en ciel**
   Pour décrire l'arc en ciel, nous allons considérer le trajet d'un rayon lumineux dans une goutte d'eau d'indice moyen $n = 1{,}333$ dans l'atmosphère d'indice 1. La goutte est une sphère de centre O et de rayon R. Le soleil est assimilé à une source ponctuelle située à l'infini de sorte que tous les rayons incidents sont parallèles. On se limite, pour commencer, à un seul rayon pénétrant dans la sphère sous l'angle d'incidence i. Le rayon est d'abord réfracté en A et fait un angle r par rapport à la direction OA, puis il subit p réflexions internes avant de ressortir (on étudiera surtout $p = 1$ et $p = 2$). Les angles i et r ne sont pas orientés et sont pris positifs. On note D_p la déviation du rayon lumineux (le schéma représente le cas $p = 1$).



   (a) Expliquer pourquoi la trajectoire du rayon lumineux est entièrement inscrite dans un plan contenant le centre de la goutte.
   (b) Peut-il y avoir réflexion totale en B ?
   (c) Exprimer D_p en fonction de r, i et p.
   (d) Exprimer en fonction de n l'angle d'incidence i_p pour lequel D_p est extrémal. Donner les valeurs numériques en degrés de i_p et de la déviation correspondante pour $p = 1$ et $p = 2$.
   (e) Calculer D_p pour $i = 0$ et $i = 90°$ pour $p = 1$ et $p = 2$.
   (f) Représenter les courbes $D_p(i)$ pour $p = 1$ et $p = 2$.

(g) Dans les deux cas, représenter sur un schéma la direction de la lumière incidente et le cône contenant la lumière diffusée par une goutte (en considérant toutes les valeurs de i). En raison d'un extremum de déviation, il y a accumulation de lumière sur une surface conique dont on précisera le demi-angle au sommet α_p par rapport à la direction de la lumière incidente (on prendra l'angle aigu inférieur à 90°). Cette accumulation est responsable du phénomène d'arc en ciel.

(h) Dans les conditions telles que le soleil soit à l'ouest, incliné de 10° au dessus de l'horizon, de quel côté faut-il regarder pour observer un arc en ciel ? Le décrire et préciser sa hauteur angulaire maximale θ au dessus de l'horizon. Préciser les circonstances météorologiques nécessaires à l'observation. Faire un schéma montrant les positions du soleil, de l'observateur, de la pluie et de l'arc en ciel.

(i) Peut-on voir un arc en ciel le matin, le midi, le soir ? Vers quel point cardinal faut-il plutôt regarder ?

(j) Sachant que les extrémités rouge et violette du spectre visibles, l'indice n vaut respectivement 1,331 et 1,337, préciser si la partie extérieure de l'arc en ciel est rouge ou violette. Calculer l'étalement angulaire δ_1 de l'arc en ciel.

(k) L'arc secondaire $p = 2$. Préciser sa position par rapport au premier, l'ordre des couleurs et l'étalement angulaire δ_2.

(l) Au II^{me} siècle après J.C., Alexandre d'Aphrodisius remarqua que la bande comprise entre les deux arcs est plus sombre que le reste du ciel (bande d'Alexandre). Expliquer.

(m) Le soleil n'est pas en toute rigueur une source ponctuelle à l'infini. Il est environ situé à 150 millions de kilomètres de la Terre et son diamètre est de l'ordre de 1,4 million de kilomètres. En déduire l'étalement angulaire supplémentaire des arcs dû à cette correction.
réponse : $\sin^2 i_p = \frac{(p+1)^2-n^2}{(p+1)^2-1}$

---

3. **Distance minimale, méthode de Silberman**
Rechercher la distance minimale objet réel-image réelle pour une lentille convergente de distance focale f'. Quelle est alors le grandissement ? Comment mesurer en pratique la vergence de cette lentille. On a maintenant deux lentilles minces accolées, l'une de vergence V et l'autre de vergence 4δ. En utilisant la méthode précédente pour ce système, on trouve l'image A'B' à 2,5m de l'objet AB. En déduire la distance focale du système total. Calculer la vergence V.

---

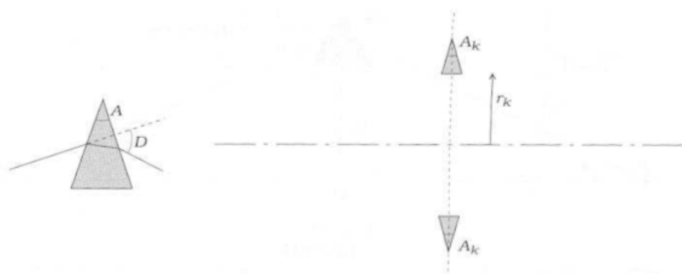
4. **Elargisseur de faisceau**
Un faisceau lumineux quasi parallèle de diamètre d= 2mm est issu d'une source laser. On désire multiplier ce diamètre par 10.

(a) L'élargisseur utilise une lentille mince divergente et une lentille mince convergente pour laquelle $f_2' = 50$mm. Calculer f_1'. Faire un schéma du dispositif. Quelle distance sépare les deux lentilles ?

(b) Les deux lentilles sont convergentes et $f_2' = 50$ mm. Reprendre les questions précédentes.

---

5. **Lentille plate de Fresnel**
On considère un prisme de verre d'indice n et d'angle A très faible. Ce prisme est utilisé sous incidence quasi-normale. Pouvez-vous déterminer la déviation subie par un rayon ? Des prismes de ce type sont répartis de part et d'autre de l'axe Ox dans le plan de figure ; ils sont régulièrement espacés, le k^{eme} étant à la distance r_k de l'axe. Ils sont orientés de façon à rabattre vers l'axe un faisceau parallèle. On désigne par A_k l'angle du k^{eme} prisme.



Que doit valoir A_k pour qu'un faisceau parallèle à Ox vienne converger en un même point F' défini par $OF' = f'$? Que se passe-t-il pour un faisceau issu d'un point P de l'axe défini par $\overline{OP} = x$?

---

6. **Utilisation des formules de Newton**
Un système centré est formé de deux lentilles minces L_1 et L_2 avec $f_1' = 6$mm et $f_2' = 20$mm. On note $\Delta = \overline{F_1'F_2} = 18$cm. Un observateur place son oeil au foyer image F_2' de L_2 et regarde à travers L_2. Où faut-il placer un objet de sorte que son image soit entre 25cm et l'infini de l'oeil. De quel instrument s'agit-il ?
Réponse : $\overline{A_\infty A_{25}} = 1,8\mu m$

---

7. **Lunette astronomique, lunette terrestre**
Une lunette est composée d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente de distance focale $f_1' = 10$ cm, de centre optique O_1, de monture circulaire de diamètre $d_1 = 3$ cm et d'un oculaire assimilé à une lentille convergente de distance focale $f_2' = 2$ cm, de centre optique O_2, de diamètre $d_2 = 1$ cm.

(a) L'observateur regarde dans l'instrument les objets à l'infini en accommodant à l'infini. Quelle est la distance O_1O_2 ?

(b) Définir et calculer le grossissement.

(c) On appelle cercle oculaire l'image du bord de la monture circulaire de l'objectif par l'oculaire. Calculer le diamètre δ de ce cercle et donner sa position C sur l'axe optique par rapport à l'oculaire.

(d) Un faisceau parallèle incident incliné par rapport à l'axe optique d'un angle θ pénètre dans l'instrument. Le faisceau étant limité par la monture de l'objectif, il éclaire la plan de l'oculaire selon un cercle de diamètre δ'. Calculer δ'. A quelle condition portant sur θ ce cercle est-il entièrement compris dans la monture de l'oculaire ? A quelle condition portant sur θ tous les rayons entrant dans le système optique sont-ils stoppés par la monture oculaire ?

(e) L'observateur place en pratique son oeil en C, position du cercle oculaire. Pourquoi ?

(f) Pourquoi l'observateur a-t-il l'impression que les bords des images observés sont moins lumineux que la zone centrale ? (on parle de champ de contour). Expliquer comment un diaphragme placé dans le plan de l'image intermédiaire peut éliminer ce champ de contour.

(g) Renversement de l'image. La lunette décrite précédemment donne une image renversée par rapport à l'objet. Pour observer des objets terrestres pouvant être considérés à l'infini, on désire redresser cette image. Pour cela, on interpose entre l'objectif et l'oculaire une lentille convergente de focale $f_3' = 1$ cm, de centre optique O_3 et donnant de l'image fournie par l'objectif une image réelle, renversée et trois fois plus grande, l'oculaire est déplacé pour donner une image définitive située à l'infini.

i. Quelle doit être la position de la lentille intermédiaire ? On calculera la distance O_1O_3.

ii. Quelle est la nouvelle longueur de la lunette ?

iii. Quel est son nouveau grossissement ? Pour effectuer ce calcul, on pourra s'aider d'une figure sur laquelle on aura tracé la marche d'un rayon passant par le centre optique O_3.

---

8. **Lunette de Galilée**

Une lunette de Galilée est constituée d'une lentille convergente L_1 de distance focale image $f_1' = 10$ cm (objectif) et d'une lentille divergente L_2 de distance focale image f_2' = -5 cm (oculaire). Cette lunette est afocale.

(a) Quelle est la longueur de la lunette (distance entre L_1 et L_2) ?

(b) Quel est son grossissement ?

(c) Pour un observateur utilisant cette lunette, l'image d'un objet éloigné est-elle renversée ou droite ? Peut-on placer l'œil au niveau du cercle oculaire ?

---

9. **Aberrations chromatiques d'une lentille**

Les aberrations chromatiques sont provoquées par le phénomène de dispersion de la lumière c'est à dire par le fait que l'indice du milieu n est fonction de la longueur d'onde λ. Afin de caractériser cet effet, on mesure l'indice du milieu pour trois longueurs d'onde bien déterminées : λ_R = 656 nm, raie rouge de l'hydrogène λ_J = 589 nm, raie jaune du sodium λ_B = 486 nm, raie bleue de l'hydrogène On pose $n_R = n(\lambda_R)$, $n_J = n(\lambda_J)$ et $n_B = n(\lambda_B)$. La quantité $\Delta n = n_B - n_R$ est appelée dispersion, n_J est l'indice moyen du milieu. On définit le pouvoir dispersif moyen d'un milieu transparent par la quantité :

$$K = \frac{n_B - n_R}{n_J - 1} = \frac{\Delta n}{n_J - 1}$$

Le pouvoir dispersif moyen est toujours positif et il est de l'ordre de 0,1 à 0,01 pour les verres les plus courants.

(a) Soit f' la distance focale image d'une lentille mince et V sa vergence ; f' et v sont reliées à l'indice par une relation de la forme :

$$V = \frac{1}{f'} = (n-1)A$$

où A est une constante géométrique dépendant des rayons de courbure des dioptres de la lentille. Soit $\Delta f' = f_B' - f_R'$ et $\Delta V = V_B - V_R$. Exprimer ΔV en fonction de K et V la vergence moyenne. Exprimer de même $\Delta f'$ en fonction de K et f'.

(b) On éclaire une lentille mince convergente de rayon h avec un faisceau de lumière blanche parallèle à l'axe optique.

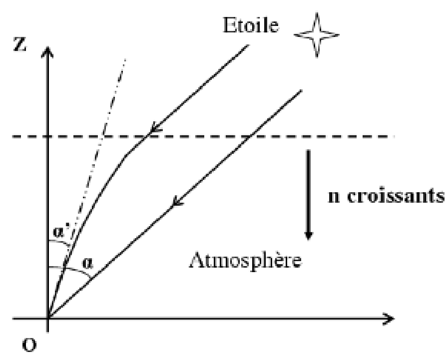
i. Représenter qualitativement sur un schéma les foyers imagées F_B' et F_R' correspondants à des radiations bleues et rouges.

ii. Quand on coupe le faisceau émergent avec un écran transverse, la section est minimale pour une position particulière de l'écran notée F_o'. Calculer le rayon ρ de la tache obtenue en F_o' en fonction de h et de K. ρ est appelé l'aberration chromatique transversale.

iii. Application numérique : on considère une loupe pour laquelle $V = 10\delta$, $h = 5$cm, $K = 1/60$. Calculer les aberrations chromatiques longitudinales et transversales.

---

10. **Distance zénithale apparente**
L'espace est orienté par l'axe vertical Oz ascendant, l'origine O étant choisie au niveau du sol. Au niveau du sol, sous la pression de $P_0 = 1{,}013.105$ Pa et à la température de $T_0 = 300$K, l'indice de l'air vaut $n_0 = 1{,}00029$. Cet indice est uniquement une fonction de z et décroît continûment jusqu'à la valeur $n = 1$ aux confins de l'atmosphère. Du point O, on repère la direction d'une étoile considérée comme un objet ponctuel à l'infini. Sans atmosphère, l'angle α (appelé distance zénithale) entre la direction de l'étoile et la verticale Oz en O serait directement mesuré. En présence d'atmosphère, la position apparente de l'étoile diffère de sa position réelle : on relève une distance zénithale apparente α' au lieu de α.



(a) Expliquer soigneusement l'existence de l'écart $\delta = \alpha - \alpha'$ à l'aide d'un schéma clair. Donner la relation existant entre n_0, α et α'.

(b) On pointe le centre de la Lune, situé à 385 000 km de la Terre, avec une distance zénithale apparente $\alpha' = 50°$.

i. Calculer δ. On donnera le résultat en minutes et secondes d'arc.

ii. Quelle erreur commet-on sur la position du centre de la Lune ?

(c) Sachant que δ est faible, donner une expression approchée de δ au premier ordre en fonction de n_0 et α.

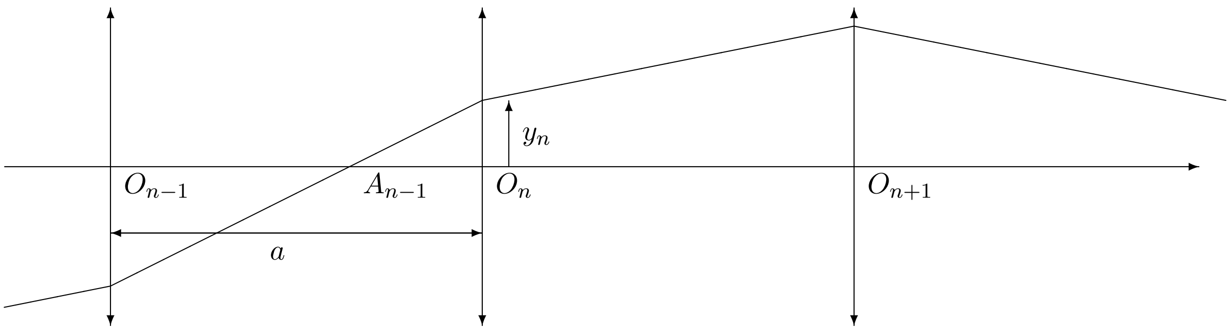
(d) L'indice de l'air vérifie le loi de Gladstone $n = 1 + k\rho$ où ρ est la masse volumique de l'air et k une constante positive. On suppose que le comportement de l'air est celui d'un gaz parfait.

i. On envisage de très faibles fluctuations relatives de la température T_0 et de la pression P_0 au sol. Exprimer la fluctuation relative correspondante $\mathrm{d}\delta/\delta$ en fonction de n_0, dT_0/T_0 et dP_0/P_0.

ii. Calculer la variation de position apparente du centre de la Lune si au sol la température T_0 baisse de 10K et la pression P_0 augmente de 3000 Pa.

---

11. **Stabilité d'une cavité optique**
On considère une infinité de lentilles minces convergentes de focale f' sur un même axe optique distantes de a les unes des autres. On note y_n la cote de l'intersection du rayon lumineux avec la la lentille n et α_n l'angle par rapport à l'axe optique que fait ce rayon après la traversée de cette même lentille. On note A_n le point d'intersection du rayon entre les lentilles n et $n + 1$ avec l'axe optique.



(a) Rappeler les conditions de Gauss. Trouver une relation entre α_n, y_n, y_{n+1} et a.

(b) Que représente A_{n+1} pour A_n ? Trouver une relation entre α_{n+1}, α_n, y_{n+1} et f.

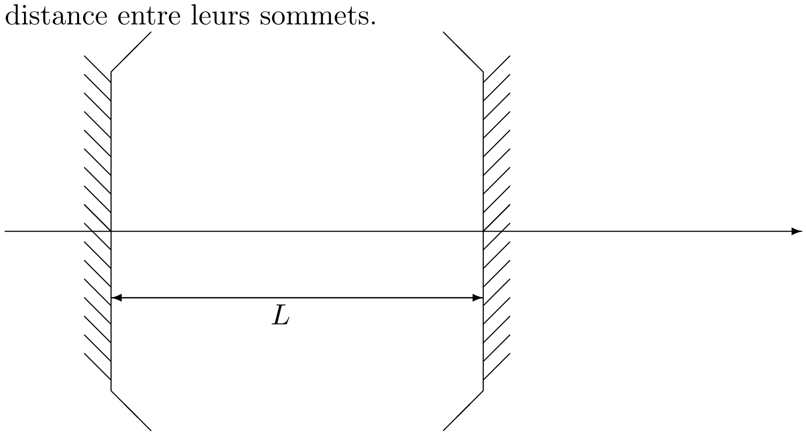
(c) Montrer que

$$y_{n+1} - 2gy_n + y_{n-1} = 0$$

où g est une constante à exprimer en fonction de a et f.
On cherche y_n sous la forme $y_n = Az^n$. Résoudre l'équation précedente en fonction des valeurs de g. On montrera que
— pour $g^2 > 1$ $y_n = A_1(g + \sqrt{g^2-1})^n + A_2(g - \sqrt{g^2-1})^n$
— pour $g^2 < 1$ $y_n = A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta)$
Donner la condition pour que les rayons restent dans les lentilles sans en sortir.

(d) On suppose $a \ll f$. On modélise alors un rayon lumineux dans une fibre optique à gradient d'indice. Déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux sous la forme $y = f(x)$.

(e) On s'intéresse à la cavité optique d'un LASER. On note R le rayon de courbure des miroirs et L la distance entre leurs sommets.



Montrer qu'en dépliant le faisceau lumineux, on se ramène au modèle précédent. Donner les relations entre les grandeurs relatives aux miroirs et celles relatives au lentilles. Conclure sur le fonctionnement de la cavité optique.