

## Exercices d'Electrostatique

### 1 Calculs de champs électriques

#### Exercice 1 Cavité

1. Une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$  est chargée avec une densité volumique uniforme  $\rho$ . Elle comporte une cavité sphérique vide de charge de centre  $O'$  et de rayon  $b$ . Déterminer le champ électrique en tout point de la cavité.
2. On considère deux cylindres d'axes  $z$  et  $z'$  parallèles et distants de  $d$ . On les considère très longs  $h \gg d$ . Ils sont respectivement de rayon  $a$  et  $b$  avec  $a < b$  et  $d < (b - a)$  de sorte que le petit cylindre est entièrement à l'intérieur du gros. On suppose que l'espace à l'intérieur du gros cylindre contient une charge volumique  $\rho$  uniforme alors que l'intérieur du petit cylindre est vide de charge. Calculer le champ électrique à l'intérieur du cylindre vide de charge.

#### Exercice 2 Champ créé par un fil et un cylindre

Un fil infini, confondu avec l'axe  $Oz$  et uniformément chargé avec la densité linéique  $\lambda$ , est associé à un cylindre infini, d'axe  $Oz$  et de rayon  $R$ , uniformément chargé en surface avec la densité surfacique  $\sigma$  avec  $2\pi R\sigma = -\lambda$ .

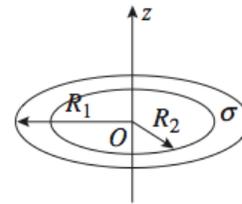
1. Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace.
2. Commenter le comportement du champ en  $r = R$ .

#### Exercice 3 Deux lames de charges opposées

La distribution de charges considérée comprend deux lames infinies dans les directions  $y$  et  $z$  de largeur  $e$  centrées aux abscisses  $a$  et  $-a$  avec  $a > e/2$  et de charge volumiques uniformes  $-\rho$  et  $\rho$ . Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace et en donner une représentation graphique.

#### Exercice 4 Interaction entre un anneau et une charge

Un disque évidé porte une charge surfacique  $\sigma$ .



1. Retrouver le champ électrique créé par un disque non évidé en tout point  $M(z)$  de l'axe  $Oz$ . En déduire celui créé par le disque évidé.
2. On suppose que l'on place une particule de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  en un point de l'axe  $Oz$  à la cote  $z_0$ . Quelle vitesse minimale  $v_0$  faut-il lui donner pour qu'elle atteigne le centre du disque ? (On néglige l'action de la pesanteur.)

#### Exercice 5 Réseau de fils infinis

On considère dans le plan  $(Oxy)$  un réseau de fils infinis régulièrement espacés d'équations :  $z = 0$  et  $x = pa$  avec  $p$  un entier relatif. Ils portent tous la même charge linéique uniforme  $\lambda$ .

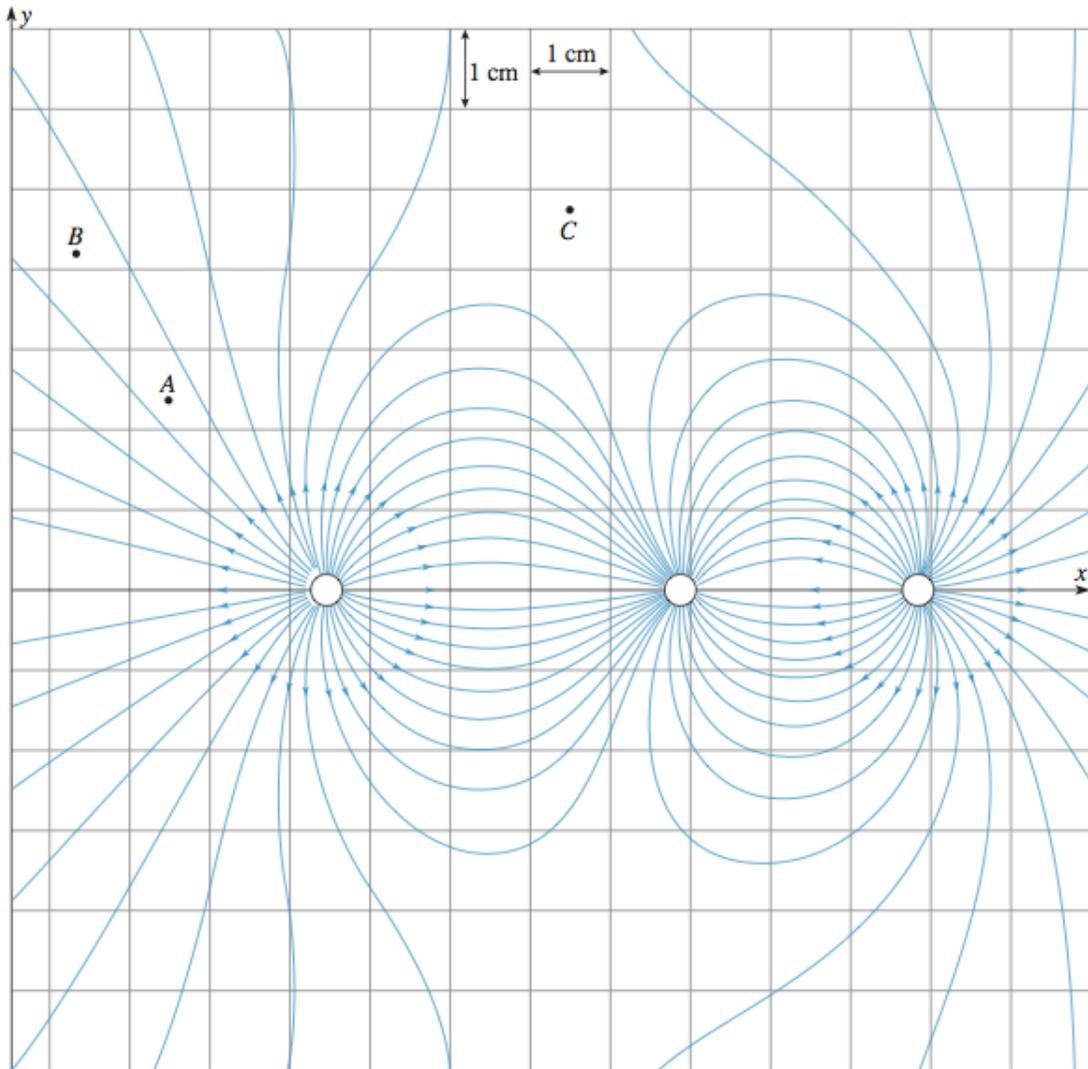
1. Déterminer les lignes de champs et les équipotentielles au voisinage d'un fil.
2. Déterminer les lignes de champs et les équipotentielles loin des fils.
3. Tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles dans le plan  $(xOz)$ .
4. Quelles propriétés vérifie  $V(x, y, z)$  ?
5. On cherche  $V$  sous la forme :

$$V(x, y, z) = F_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z) \cos\left(\frac{2\pi kx}{a}\right)$$

Montrer que  $F_k(z)$  est de la forme  $A_k \exp(-z/\delta_k)$ .

6. Calculer  $F_0(z)$ .

### Exercice 6 Lecture d'une carte de lignes de champ

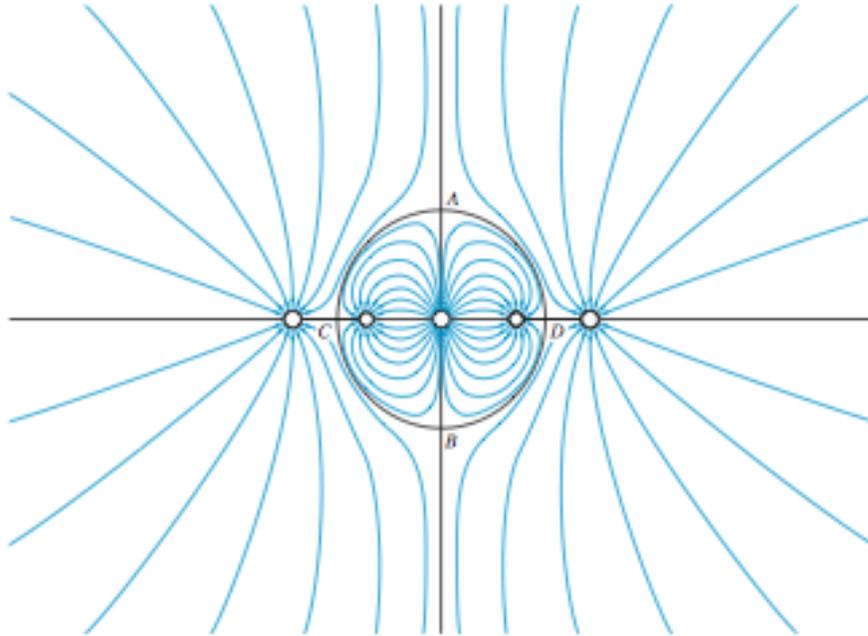


Le schéma représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.

1. Où sont les plans de symétrie de la distribution ?
2. Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?
3. Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?
4. La norme du champ en A est de  $100 \text{ V.m}^{-1}$ . Calculer une valeur approchée du champ en B.
5. Que peut-on dire du champ au voisinage de point C ?

### Exercice 7 Lecture d'une carte de lignes de champ (bis)

Le schéma suivant représente les lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles numérotées de 1 à 5, de la gauche vers la droite. Le champ est nul aux points A, B, C et D. Les lignes en traits épais issues de ces points sont également des lignes de champ.



1. Déterminer les signes des cinq charges et orienter les lignes de champ.
2. Trouver et justifier la position des points de champ nul.
3. Analyser la symétrie du problème. Quelles relations peut-on en déduire entre  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_4$  et  $q_5$  ?
4. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer la relation liant  $q_2$  et  $q_3$ .

### Exercice 8 Champ au voisinage du centre d'un cerceau uniformément chargé $\lambda$

Un cercle de rayon  $R$  et de centre  $O$  porte une charge linéique uniforme  $\lambda$ .

1. Que vaut le champ électrique au centre  $O$  ?
2. Tracer l'allure des lignes de champ et des équipotentielles.
3. Déterminer le champ  $\vec{E}$  en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$  perpendiculaire au plan du cercle.
4. Déterminer par une méthode au choix, le champ  $\vec{E}$  en un point  $M$  du plan du cercle, au voisinage de  $O$  à une distance  $r \ll R$ .

### Exercice 9 Champ et potentiel au voisinage d'un plan chargé ; pression électrostatique

Un conducteur occupe le demi-espace infini  $x > 0$ . Il est caractérisé par une densité volumique de charge

$$\rho(x) = \rho_0 \exp(-x/a)$$

Le demi-espace  $x < 0$  est vide de charge ( $\rho=0$ ). La surface de séparation est le plan  $yOz$  ;  $a$  est une distance très petite de l'ordre de la dizaine de nm.

1. Justifier la direction du champ  $\vec{E}$  en tout point de l'espace. De quelle(s) variable(s) dépend-il ? Déterminer son expression pour tout  $x > 0$  et  $x < 0$  en admettant que  $\vec{E} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . En déduire l'expression du potentiel  $V(x)$  en tout point de l'espace en fixant  $V(x=0) = 0$ .
2. Tracer avec soin les graphes de  $E(x)$  et de  $V(x)$ . Comment se déforment ces courbes lorsque  $a \rightarrow 0$  en supposant que le produit  $\rho_0 a$  reste constant ? Montrer que le système est alors équivalent à un modèle de répartition surfacique dans le plan  $x = 0$  avec une densité  $\sigma$  à définir.
3. Quelle est la force électrique  $d\vec{F}$  à laquelle est soumis un élément de volume  $d\tau$  du demi-espace  $x > 0$  ? En déduire la résultante des forces  $\vec{F}$  qui s'exerce sur un tube de section  $S$  et de hauteur infinie depuis  $x = 0$  jusqu'à  $x \rightarrow \infty$ . Quelle est sa direction et son sens ?
4. Définir une pression électrostatique et l'exprimer en fonction de  $\sigma$  puis en fonction de  $E(0^-)$  le champ au voisinage de la surface. Commenter.

### Exercice 10 Potentiel de Yukawa

On donne en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \vec{u}_r$$

A quelle distribution de charge ce champ correspond-il ?

Que peut-on dire de la charge totale de cette distribution ?

Que pourrait être cette distribution ?

### Exercice 11 Boule polarisée

Soient deux sphères de centres  $O_1$  et  $O_2$  très proches de même rayon  $R$ . On pose  $O_1 O_2 = e \ll R$  et on note  $O$  le milieu de  $O_1 O_2$ . Ces deux sphères sont uniformément chargées en volume avec la densité  $+\rho$  pour la sphère de centre  $O_2$  et  $-\rho$  pour celle de centre  $O_1$ .

1. Montrer que ce système est équivalent à une distribution de charges à la surface d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  avec une densité surfacique de charges  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  lorsque  $e$  tend vers 0 et  $\rho$  vers l'infini le produit  $\rho e$  restant fini et ayant pour limite  $\sigma_0$ .
2. Montrer que le champ créé est uniforme à l'intérieur et donner la valeur de  $\vec{E}_{int}$ .
3. Montrer que le champ créé à l'extérieur est celui d'un dipôle de moment dipolaire à déterminer.

## 2 Dipôle

### Exercice 12 Dipôle dans un champ uniforme

Soit un champ électrostatique uniforme  $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$ . On place en  $O$  un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = p \vec{u}_z$

1. Déterminer le potentiel en coordonnées sphériques.
2. Montrer qu'il existe une surface équipotentielle sphérique de centre  $O$ .
3. Représenter sans calcul l'allure des surfaces équipotentielles et les lignes de champ.

### Exercice 13 Disque de dipôles

Un disque de rayon  $R$  est tapissée de dipôles de sorte que la densité de moment dipolaires  $\vec{\mu} = \frac{d\vec{p}}{dS}$  soit uniforme. La direction de  $\vec{\mu}$  est normale au plan du disque selon  $\vec{u}_z$ .

1. Calculer le potentiel  $V$  et le champ  $\vec{E}$  sur l'axe  $(Oz)$  du disque pour  $z > 0$ .
2. Tracer les courbes représentant les variations de  $V$  et de  $\vec{E}$  en fonction de  $z$  pour  $z > 0$  et  $z < 0$ . Comment peut-on interpréter physiquement la discontinuité apparente de  $V$  en  $z = 0$  sachant qu'un plan infini chargé uniformément  $\sigma$  crée en champ  $\sigma/2\epsilon_0$ .

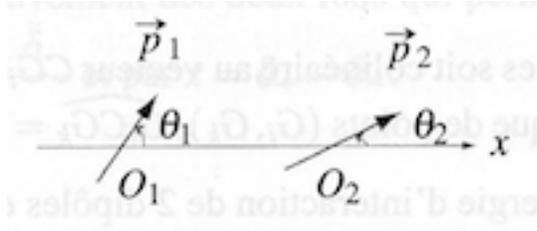
### Exercice 14 Interaction entre un dipôle et une charge ponctuelle

On place un dipôle électrostatique rigide  $\vec{p}$  en un point  $M$ , à proximité d'une charge ponctuelle  $q$  située en  $O$ .

1. Comment s'oriente le dipôle ?
2. Déterminer l'expression de la force subie par le dipôle, en supposant qu'il est orienté selon la direction trouvée à la question précédente. On rappelle qu'un dipôle rigide soumis à un champ électrostatique subit la force :  $\vec{F} = q \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$
3. Même question pour la charge  $q$ . Conclure.

### Exercice 15 Interaction entre deux dipôles

Deux dipôles de moment dipolaires  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , libres de tourner autour des points  $O_1$  et  $O_2$ . On suppose que les deux moments dipolaires ont même norme.



Quelles sont les positions d'équilibre ? Discuter de leur stabilité.

### Exercice 16 Cohésion d'une goutte liquide

Une goutte de liquide conducteur, seule dans l'espace, porte une charge électrique  $Q$ . On envisage la transformation de cette goutte en deux gouttes sphériques identiques, séparées d'une distance suffisante pour pouvoir négliger leur interaction.

1. Justifier que pour un corps conducteur la charge  $Q$  se répartit en surface à l'équilibre électrostatique.
2. En déduire l'énergie électrostatique de cette goutte.
3. Déterminer la variation d'énergie électrostatique lors de la scission de la goutte en deux plus petites gouttes.
4. Les effets de tension de surface doivent aussi être pris en compte. On note  $A$  l'énergie surfacique (tension de surface). Quelle est l'énergie nécessaire à la transformation envisagée ?
5. Quelle doit être la charge initiale pour que la scission soit spontanée ? Estimer cette valeur pour une goutte de la taille de votre choix.  
*Donnée : pour l'eau  $A = 75 \text{ mN/m}$*
6. Quelle valeur du champ électrique observerait-on alors, dans l'état initial, au voisinage de la goutte ?

### Exercice 17 Condensateur

Un condensateur cylindrique est constitué de deux cylindres coaxiaux de longueur  $h$ . Le cylindre intérieur, de rayon  $a$  porte une charge  $Q$  répartie uniformément sur sa surface et le cylindre extérieur, de rayon  $b$  porte la charge  $-Q$ , uniformément répartie sur sa surface également. Chaque cylindre forme une armature du condensateur. L'armature intérieure est au potentiel  $V_1$  et l'armature extérieure est au potentiel  $V_2$ . On néglige les effets de bord.

1. Déterminer le champ électrique en tout point  $M$  entre les armatures
2. En déduire la capacité du condensateur.
3. Etudier le cas limite où les armatures sont distantes de  $e = b - a \ll a$ .

### Exercice 18 Modèle de Thomson

On modélise un atome d'hydrogène par une charge  $+e$  uniformément répartie en volume dans une boule de rayon  $a$  et de centre  $O$  et une charge mobile ponctuelle  $-e$  dans la boule.

1. Exprimer le champ électrique ressenti par l'électron en  $M$ . Trouver les positions d'équilibre.
2. On ajoute un champ extérieur  $\vec{E}$  uniforme et permanent. Trouver les positions d'équilibre. Calculer le moment dipolaire de l'atome. On note  $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$ . Exprimer la polarisabilité  $\alpha$  et donner son unité.

## 3 Gravitation

### Exercice 19 Théorème de Gauss en gravitation

On modélise la Terre par une distribution de masse sphérique et homogène et on imagine qu'il est possible de creuser un tunnel selon l'axe des pôles.

1. On lâche au pôle Nord un point matériel de masse  $m$  sans vitesse initiale dans ce tunnel. Combien de temps faut-il pour que ce point matériel arrive au pôle Sud.
2. Même question si on creuse un tunnel qui traverse la Terre depuis Paris (point  $P$ ) jusqu'à un point situé de l'autre côté sur un axe passant par le projeté orthogonal de  $P$  sur l'axe de rotation de la Terre.
3. On lâche maintenant la balle d'un point sur l'équateur et on suppose qu'il y a devant elle un tunnel juste de la bonne forme pour ne pas la gêner dans son mouvement. Décrire sa trajectoire.

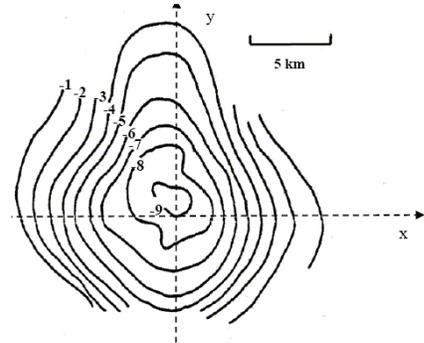
## Exercice 20 Anomalies du champ de pesanteur

Le champ gravitationnel terrestre peut parfois présenter certains écarts à une valeur de référence. Ces anomalies sont mesurées en milligal ( $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$ ). On définit l'anomalie de Bouguer du champ de pesanteur terrestre comme la grandeur :

$$\Delta g_B = (\vec{g}_{\text{mesure}} - \vec{g}_{\text{reference}}) \cdot \vec{u}_z$$

On considère une boule de sel, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , située à la distance  $d$  de la surface de la terre. Elle est de masse volumique  $\mu_1$  et est plongée dans un amas de sédiments de masse volumique  $\mu_2$ .

1. Calculer l'anomalie de Bouguer  $\Delta g_B$  créée par la présence de cette boule de sel.
2. Voici une allure de carte représentant les courbes iso-anomalies (en mGal) générées par la présence de cette boule de sel dans le désert mexicain. On donne par ailleurs la densité du sel ( $2200 \text{ kg/m}^3$ ) par rapport aux sédiments ( $2400 \text{ kg/m}^3$ ). A partir des mesures, proposer une méthode pour trouver  $d$ .
3. En déduire  $R$ .
4. Utilité pratique de ce genre de relevés ?



*Courbes de niveaux des anomalies de gravité mesurées au dessus d'un dôme de sel enterré (Texas)*

## Exercice 21 Le Mississippi coule-t-il vers la haut ?

La source du Mississippi est plus proche de 5 kilomètres du centre de la Terre que son embouchure. Le Mississippi coule-t-il vers le haut ? Qu'appelle-t-on le haut et le bas ?

Pour plus de détails voir l'adresse suivante :

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Mississippi.xml>

## Exercice 22 Champ de pesanteur au sommet d'une montagne

Au cours de son séjour au Pérou, Bouguer a effectué une série de mesures pendulaires, à trois altitudes différentes : au niveau de la mer, à Quito et à Pichincha (tableau ci-dessus).

Lieu	Altitude $h$	$\Delta g/g$ (mesure)	$g$ (m.s <sup>-2</sup> )	$\Delta g/g$ (calcul $=-2h/R$ )
Mer	0	0	9,779	0
Quito	1466 toises (2857 m)	-1/1331	9,772	-1/1116
Pichincha	2434 toises (4744 m)	-1/844,6	9,768	-1/672

Quel que soit le lieu où Bouguer effectue sa mesure, il utilise un pendule qui a toujours exactement la même longueur (36 pouces 7,019 lignes), calibrée grâce à une règle en fer mesurée très précisément une fois pour toute. Puis il compare les oscillations du pendule à celles d'une horloge qu'il règle sur le ciel par des observations journalières. Il ne juge donc pas des variations de la pesanteur par la différence dans la longueur du pendule mais par le nombre d'oscillations effectuées en 24 heures. La méthode revient au même mais il est beaucoup plus aisé de compter un nombre d'oscillations que d'avoir à déceler une variation de longueur de quelques centièmes de lignes (dixièmes de millimètres) !

Si la gravité suit la loi de Newton en  $1/r^2$ , la variation relative de la pesanteur (la variation de la force centrifuge avec l'altitude étant négligeable) est en "raison doublée des distances", soit  $\Delta g/g = -2h/R$  (où  $h$  est l'altitude et  $R$  le rayon de la Terre). En effet, si  $g$  est la pesanteur au niveau de la mer et  $g'$  la pesanteur à l'altitude  $h$ , montrer que la variation de pesanteur s'écrit :

$$\Delta g = g' - g \approx -\frac{2hg}{R}$$

Bouguer remarque que la diminution de la pesanteur déduite des mesures pendulaires réalisées à Quito et à Pichincha est bien réelle, importante, mais qu'elle ne suit pas exactement ce rapport, ce qui pose de sérieuses questions : "Mais pourquoi nos expériences nous donnent-elles donc constamment un rapport qui n'est pas tout à fait conforme ? Faut-il attribuer à quelque erreur de notre part cette différence ; ou serait-il vrai que dans le voisinage des grosses masses comme la Terre, la loi dont il s'agit ne fut observée que d'une manière imparfaite ?". Comment expliquer le désaccord entre les observations et la diminution théorique de la gravité ? Faut-il supposer que la loi est perturbée dans le voisinage de la Terre, comme l'a suggéré Huygens, qui écrivait en 1690 : "Je dis qu'il ne serait par étrange si la pesanteur, près de la surface de la Terre, ne suivait pas précisément, ainsi que dans les régions plus élevées, la diminution que font les différentes distances du centre ; parce qu'il se peut que le mouvement de la matière qui cause la pesanteur, soit (...) altéré dans la proximité de la Terre, comme il l'est apparemment au-dedans". Faut-il remettre en cause la loi de Newton ?

## Champ de pesanteur au sommet d'une montagne (suite)

Le tour de force de Bouguer est de montrer que ses observations, loin de remettre en cause l'attraction newtonienne, en apportent au contraire une nouvelle confirmation. Bouguer remarque que lorsqu'on détermine la diminution de la gravité en fonction de l'éloignement au centre de la Terre, on ne tient pas compte des masses situées entre le niveau de la mer et l'altitude des mesures. Or ces masses possèdent une capacité d'attraction qu'il faut considérer. Il expose : " Il y a donc deux diverses attentions à avoir, lorsqu'il s'agit des expériences que j'ai rapportées sur le pendule. Ces expériences ont été faites à une plus grande distance de la Terre : par conséquent la pesanteur a dû se trouver un peu plus petite. Mais d'un autre côté, le groupe de montagnes sur lequel est placé Quito et sur lequel est élevé Pichincha et tous les autres sommets auxquels il sert de plinthe, doit produire à peu près le même effet que si la Terre en cet endroit, était plus grosse ou d'un plus grand rayon. La pesanteur a donc dû augmenter".

Bouguer comprend que les masses représentées par les montagnes compensent en partie le plus grand éloignement au centre de la Terre. En termes modernes, nous dirions que Bouguer introduit deux corrections dans les mesures de l'intensité de la pesanteur : la correction à l'air libre (éloignement au centre de la Terre) et la correction de plateau (attraction des masses situées entre le niveau de la mer et le point de mesure). La première était déjà discutée avant lui, la deuxième est entièrement originale.

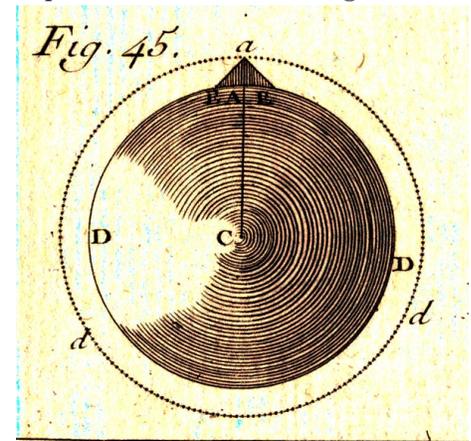


Figure de Bouguer illustrant son calcul de "correction de plateau"

On se propose de reprendre le calcul de Bouguer de la correction de plateau.

On représente une montagne comme un cône de révolution de hauteur  $h$ , de demi-angle d'ouverture  $\alpha$  et de masse volumique uniforme  $\rho$ . Soit  $\vec{g}_0 = -g_0\vec{e}_z$  le champ de pesanteur à l'altitude du sommet  $O$ , loin de la montagne, et  $\vec{g}_1 = -g_1\vec{e}_z$  le champ de pesanteur au sommet de la montagne. Calculer  $\Delta g = g_1 - g_0$ . Faire l'application numérique.

Données :  $\rho = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2}$ ,  $h = 1 \text{ km}$  et  $\alpha = 30^\circ$ .

