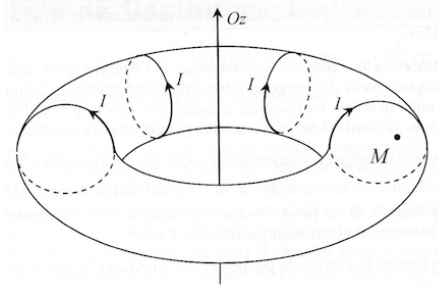


## Exercices de magnétostatique

### Exercice 1 Champ magnétique dans un Tokamak

Un Tokamak est une chambre torique de confinement magnétique destinée à contrôler un plasma pour étudier la possibilité de production d'énergie par fusion nucléaire. (définition Wikipedia).

Le champ magnétique principal, est créé par une série de bobines supraconductrices constituant un solénoïde en forme de tore. On note  $N$  le nombre total de spires, chacune d'elle étant parcourue par un courant d'intensité  $I$ . On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elle forment une distribution continue de courant.



1. Que peut-on déduire des symétries et des invariances sur la dépendance et la direction du champ magnétique en un point quelconque de l'espace ?
2. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur du tokamak. Est-il uniforme ? Que vaut le champ magnétique à l'extérieur ?

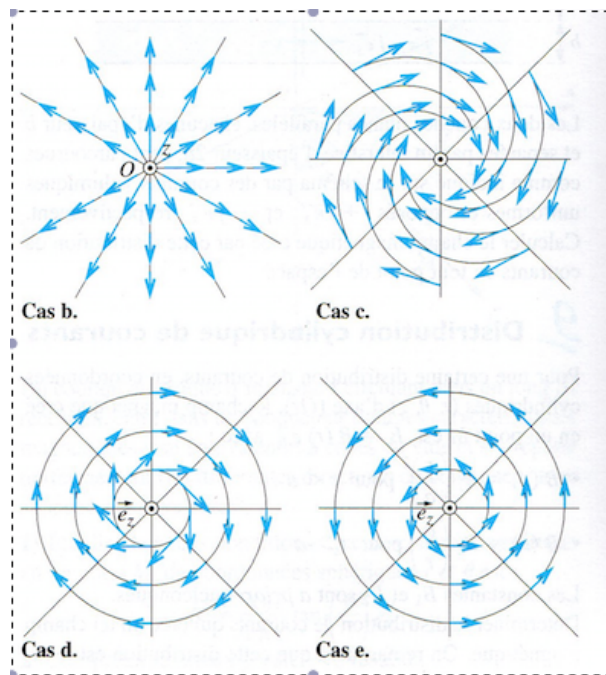
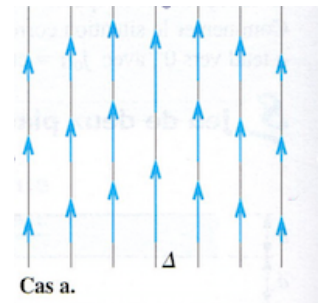
Le Tokamak JET (Joint European Torus) peut produire au centre du tore, là où est confiné le plasma, un champ magnétique de 4 Tesla. Le rayon intérieur du Tokamak vaut 0,9 m et le rayon extérieur 3 m.

3. Calculer le courant total  $NI$  qui doit circuler dans les bobines. Commentaire ?



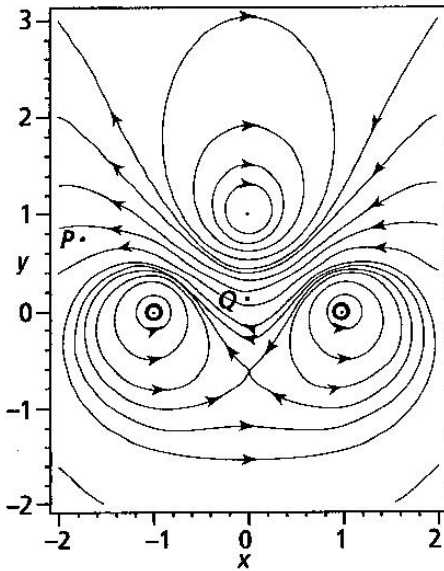
## Exercice 2 Lignes de champ

Préciser si les configurations proposées peuvent être celles d'un champ magnétostatique. On supposera que les lignes de champ sont invariantes par translations selon un axe perpendiculaire au plan de figure. Les flèches représentent le champ de vecteur et leur longueur est proportionnelle à la norme du champ.

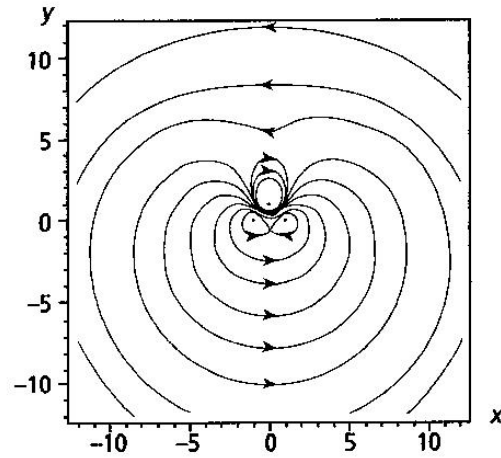


## Exercice 3 Lecture d'une carte de champ

On représente la carte du champ magnétique créé par trois fils rectilignes infinis parallèles, parcourus par des courants d'intensité  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .



A plus grande distance :



Déterminer la position des trois fils.

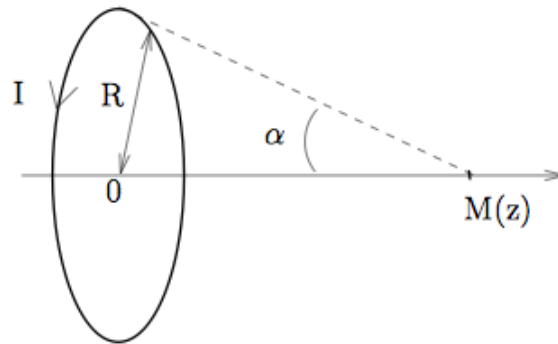
Y-a-t-il un point de champ nul ?

Donner des informations sur les courants  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

Le champ magnétique au point  $P$  vaut 0,2 T. Evaluer sa valeur au point  $Q$ .

#### Exercice 4 Spire

On cherche à étudier le champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon  $R$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  en un point  $M$  de l'axe de spire situé à une distance  $z$  de  $O$ , centre de la spire.



1. Prévoir la direction du champ magnétique en  $M$  ainsi que la parité de  $B_0(z)$ .  
On peut montrer que le champ magnétique est donné par :

$$B_0(\alpha) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2R}$$

2. Tracer l'allure du champ magnétique sur l'axe en fonction de  $z$ . La parité correspond-elle à celle prévue ?
3. Montrer que l'expression fournie est en accord avec celle du champ créé par un dipôle magnétique sur son axe. On rappelle que le champ créé par un dipôle magnétique  $\mathcal{M}$  est donné en coordonnées sphériques par :

$$B_r = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} 2 \cos \theta$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \sin \theta$$

4. On s'intéresse maintenant au champ magnétique en un point  $M$  au voisinage de l'axe. Etudier les symétries et invariances et en déduire la direction et la parité dans les variables  $r$  et  $z$  des composantes du champ magnétique en ce point. Montrer à partir de la conservation du flux à travers un petit cylindre centré sur l'axe que pour  $r$  assez petit, la composante radiale du champ s'écrit :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_0(z)}{dz}$$

Le signe de  $B_r(r, z)$  était-il prévisible ? Esquisser et orienter les lignes de champ magnétique.

### Exercice 5 Bobines de Helmholtz

On dispose deux spires identiques à celle de l'exercice précédent sur le même axe en  $z = \pm d/2$ . Elles sont parcourues par le même courant d'intensité  $I$ , dans le même sens. A l'aide d'arguments graphiques nécessitant un minimum de calculs, déterminer la distance  $d$ , à exprimer en fonction de  $R$ , à laquelle il faut placer les spires pour obtenir le champ magnétique le plus uniforme possible dans le voisinage du centre  $O$ . Prévoir alors sans calcul de quel ordre est le premier terme non nul dans le développement de Taylor de  $B_t(z) - B_t(0)$  pour  $z$  petit si  $B_t$  est le champ magnétique total sur l'axe.

### Exercice 6 Distributions cylindriques de courant

Deux cylindres infiniment longs, de même rayon  $R$  d'axes parallèles de vecteur directeur  $\vec{u}_z$  et de centres  $O_1$  et  $O_2$  distants de  $2d$  ( $d < R$ ) sont parcourus respectivement par des courants volumiques uniformes :

$$\vec{j}_1 = j\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_2 = -j\vec{u}_z$$

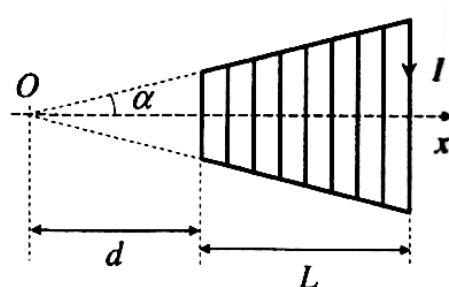
Déterminer le champ magnétique dans la région commune aux deux cylindres (donc vide de courant).

### Exercice 7 Bobine tronconique

Une bobine tronconique d'angle  $\alpha$  est constituée de  $n$  spires jointives par unité de longueur. Sa longueur est  $L$  et elle est placée à une distance  $d$  du point de concours  $O$ . Déterminer le champ magnétique qu'elle crée en  $O$  lorsqu'elle est parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

On rappelle l'expression du champ magnétique en un point de l'axe d'une spire circulaire de rayon  $a$  parcourue par un courant d'intensité  $I$  à partir duquel elle est vue sous un angle  $2\alpha$  :

$$\vec{B}(\alpha) = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2a} \vec{u}_z$$



### Exercice 8 Mesure du champ magnétique terrestre

Une boussole assimilable à un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\vec{\mathcal{M}}$  est libre de tourner autour de l'axe  $\Delta = Oz$ . On note  $J$  son moment d'inertie par rapport à  $\Delta$ .

Elle est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ . On néglige tout frottement.

1. Rappeler l'expression de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ magnétique. En déduire les positions d'équilibre et étudier graphiquement leur stabilité.

2. On écarte la boussole de sa position d'équilibre stable d'un angle faible  $\theta_0$ , sans vitesse initiale. Déterminer l'équation différentielle du mouvement et résoudre en utilisant les conditions initiales.
  3. Tracer l'allure du portrait de phase.
  4. Retrouver l'équation différentielle du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.
  5. Comment évaluer le champ  $B$  ?
- 

### Exercice 9 Moment magnétique terrestre

A l'aide des informations suivantes tirées de Wikipedia

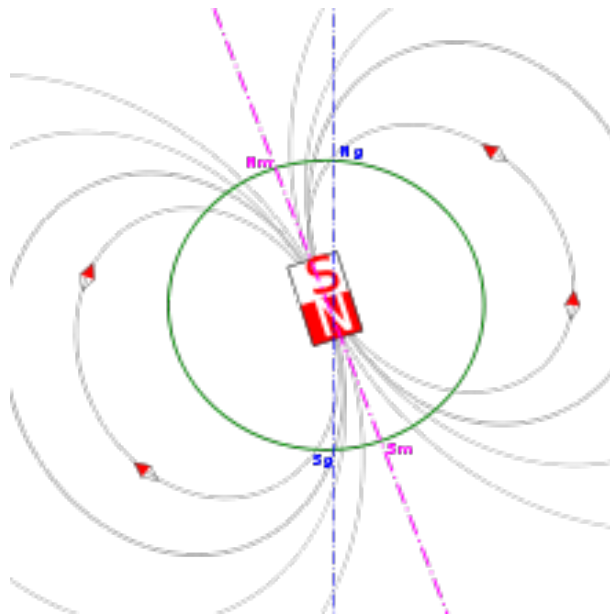
[http:// fr.wikipedia.org/wiki/Champ magnétique terrestre](http://fr.wikipedia.org/wiki/Champ_magnétique_terrestre), estimer le moment magnétique de la Terre.

*Le champ magnétique de la Terre est engendré par les mouvements du noyau métallique liquide des couches profondes de la Terre.*

*Le champ magnétique terrestre peut être comparé, en première approximation, à celui d'un aimant droit (ou d'un dipôle magnétique).*

*En un point donné du champ magnétique terrestre, le vecteur champ magnétique possède une composante verticale  $B_v$  (dirigée vers le centre de la Terre) et une composante horizontale  $B_0$ . Aux pôles magnétiques, la composante horizontale a une valeur nulle. L'angle formé par  $B$  et  $B_0$  est appelé "inclinaison". Il augmente lorsque l'on se rapproche des pôles en tendant vers  $90^\circ$ .*

*La valeur de l'induction magnétique est exprimée en teslas (nom de l'unité dans le Système International d'unités), en l'honneur de Nikola Tesla. Actuellement, elle est de l'ordre de  $47 \mu\text{T}$  au centre de la France.*



### Exercice 10 Champ magnétique terrestre

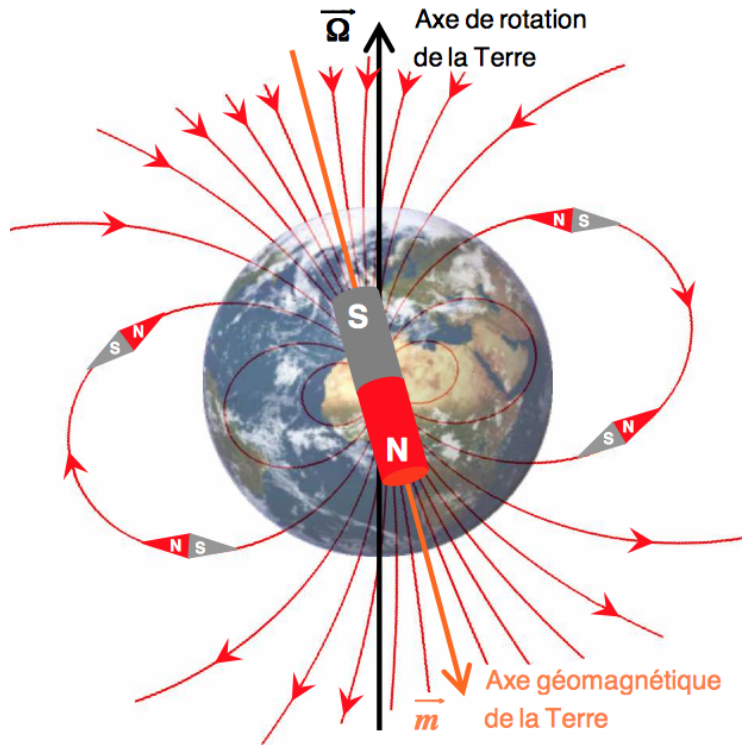
Le magnétisme terrestre est assimilé à celui d'un aimant géant situé au centre de la Terre (le noyau interne solide).

1. On note  $\mathcal{M}$  le moment magnétique de l'aimant terrestre ; quel est l'ordre de grandeur du champ magnétique  $B_T$  créé par ce dipôle à la surface de la Terre de rayon  $R_T$  ?  
A.N. : Estimer  $\mathcal{M}$  sachant que  $R_T \approx 6400 \text{ km}$  et  $B_T \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  (composante totale du champ).

2. En déduire le nombre  $N$  d'atomes de la matière "aimantée" constituant le noyau terrestre sachant que chaque atome concerné porte un moment magnétique de l'ordre du magnéton de Bohr :

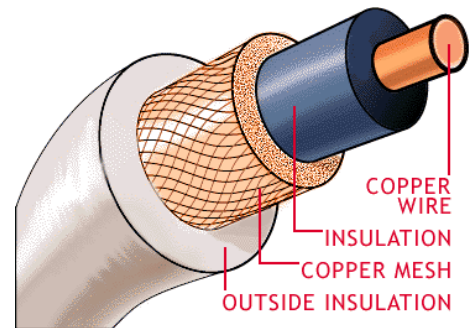
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \approx 10^{-23} \text{ A.m}^2$$

3. En prenant des valeurs moyennes pour la masse molaire (mélange de fer et de nickel)  $M \approx 57 \text{ g.mol}^{-1}$  et la masse volumique  $\rho \approx 8 \text{ kg.L}^{-1}$ , estimer le volume  $V$  concerné par la matière aimantée.
4. En déduire le rayon  $R$  du noyau terrestre interne supposé sphérique ; commenter le résultat et critiquer le modèle.



### Exercice 11 Câble coaxial

Un câble coaxial de longueur infinie comporte un conducteur interne défini en coordonnées cylindriques par  $0 \leq r < a$  et un conducteur externe défini par  $b < r < c$ . Un courant d'intensité  $I$  circule dans un sens dans le conducteur interne et dans le sens opposé dans le conducteur externe.



1. En supposant la densité de courant uniforme, déterminer le champ magnétique dans tout l'espace.
2. Tracer la courbe donnant l'intensité du champ en fonction de la distance à l'axe.

---

**Exercice 12** striction magnétique

Dans une région décrite en coordonnées cylindriques par  $r < a$ , un fluide conducteur est parcouru par des courants de densité  $\vec{j} = j\vec{u}_z$ .

1. En considérant l'extension du système très grande dans la direction  $z$ , décrire la structure géométrique des forces exercées par le champ magnétique propre du fluide sur lui-même et qualifier l'action de ces forces.
  2. En évoquant le phénomène précédent et de lois élémentaires de physique, proposer une explication du fait qu'une colonne d'air légèrement conducteur de plusieurs centaines de mètres de rayon reliant un nuage au sol peut en quelques millisecondes se transformer en une fine colonne de gaz fortement ionisé et très chaud qui émet de la lumière (théorie élémentaire des éclairs).
- 

**Exercice 13** Modélisation d'un courant volumique par un courant surfacique

On considère la distribution de courant :  $\vec{j}=0$  pour  $z > 0$  et  $\vec{j} = j_0 \exp(z/a)\vec{u}_x$  pour  $z < 0$ . Calculer le champ magnétique en tout point. Quelle densité surfacique de courant permet de modéliser cette distribution volumique en une distribution surfacique ?

---

**Exercice 14** champ magnétique créé par un électroaimant

Un électroaimant est modélisé par un solénoïde infini constitué de  $N = 1000$  couches de spires circulaires jointives de section carrée de côté  $a = 0,1$  mm parcourues par un courant  $I$ . L'épaisseur est donc de  $Na = 100\text{mm} = 10$  cm. Le rayon des spires est de  $R \approx 1\text{m}$ . Les spires ont une conductivité électrique  $\gamma = 10^8$  S.m<sup>-1</sup>.

1. Calculer le champ magnétique  $B$  à l'intérieur du solénoïde.
  2. Pour évacuer la puissance dégagée par effet Joule, on fait couler de l'eau à température  $T_e = 20^\circ\text{C}$ . La puissance évacuée par unité de surface en contact avec l'eau est de la forme  $h(T - T_e)$  avec  $h = 50$  W.K<sup>-1</sup>.m<sup>-2</sup> et  $T$  est la température des fils. On suppose que l'eau circule au sein même du bobinage et que toutes les faces des spires sont en contact avec l'eau. La viabilité du système suppose  $T < 100^\circ\text{C}$  afin d'éviter l'ébullition de l'eau au contact des spires. Calculer le champ  $B$  maximum que l'on peut produire avec cet électroaimant.
- 

**Exercice 15** production de champs magnétiques intenses

Les champs magnétiques produits par des aimants ne peuvent pas dépasser des valeurs de 2 ou 3 teslas. De façon en quelques sorte banale, les champs magnétiques permanents les plus intenses obtenues dans les années 1990 (de l'ordre de 40 teslas), sont produits dans des solénoïdes mais, pour des raisons que nous allons analyser, dans des solénoïdes spécialement résistants mécaniquement, entourés de solides enceintes de protection et maintenus à très basse température.

1. En coordonnées cylindriques, le solénoïde, supposé de grande longueur, est décrit comme l'espace  $a < r < a + e$  avec  $e \ll a$  parcouru par des courants de densité  $\vec{j} = j\vec{u}_\theta$ ,  $j$  étant une constante dont on calculera la valeur en fonction de l'intensité  $B_0$  du champ uniforme  $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$  dans la région  $r < a$ .
2. Décrire qualitativement la structure géométrique des forces exercées par le champ magnétique sur la matière du solénoïde et qualifier leurs effets prévisibles.
3. Déterminer  $B(r)$  dans la région  $a < r < a + e$  et en déduire la valeur en fonction de  $B_0$  de la pression  $p = dF/dS$  qui s'exerce sur le solénoïde. Calculer  $p$  en bars pour  $B_0 = 40\text{T}$  et conclure. Citer au

moins un autre phénomène qui peut rendre difficile l'obtention des champs magnétiques intenses.

---

**Exercice 16** champ propre d'un faisceau homocinétique

Un faisceau cylindrique d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$  est constitué de particules identiques de charge  $q$ , toutes animées de la même vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_z$  (faisceau homocinétique). Le faisceau transporte une intensité électrique  $I$  répartie uniformément sur sa section.

1. Déterminer les densités de charge et de courant qui décrivent cette distribution, assimilée à un cylindre illimité.
  2. Etablir à partir d'arguments de symétrie que le champ électrique intérieur au faisceau, exprimé en coordonnées cylindriques d'axe  $Oz$  est de la forme  $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$  et déterminer la fonction  $E(r)$  à partir des données.
  3. Etablir à partir d'arguments de symétrie que le champ magnétique intérieur au faisceau est de la forme  $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$  et déterminer  $B(r)$ .
  4. Exprimer la force subie par une particule intérieure au faisceau en fonction de  $q$ ,  $E$ , et  $\beta = v/c$ . Quel effet cette force tend-elle à avoir sur le faisceau ?
  5. Commenter l'affirmation selon laquelle le champ magnétique propre est négligeable pour un système de particules faiblement relativistes. Que peut-on dire pour des particules ultrarelativistes ?
- 

**Exercice 17** Moment magnétique orbital, moment magnétique de spin

En prenant dans le cadre du modèle classique de Bohr, un électron de charge  $-e$  et de masse  $m$  en orbite circulaire autour d'un noyau ponctuel fixe, montrer qu'entre le moment cinétique  $\vec{\sigma}$  de l'électron par rapport au noyau et le moment magnétique  $\vec{M}$  associé à son mouvement orbital existe la relation  $\vec{M} = \gamma\vec{\sigma}$  et donner l'expression du coefficient  $\gamma$  appelé rapport gyromagnétique.

En déduire que la quantification du moment cinétique,  $\sigma = n\hbar$  où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite, conduit à un moment magnétique élémentaire appelé magnéton de Bohr  $\mu_B$ ; donner son expression et sa valeur numérique, sachant que  $\hbar = h/2\pi$  et  $h = 6.62 \times 10^{-34}$  J s.

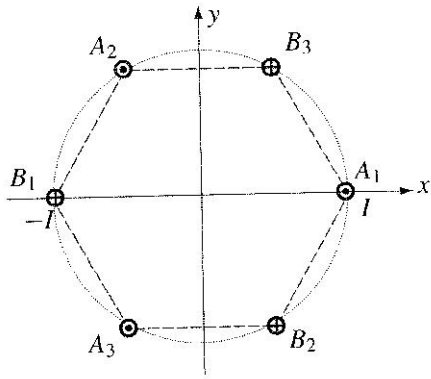
Quell est l'importance de la notion de dipôle magnétique au niveau macroscopique ? Au niveau macroscopique ?

---

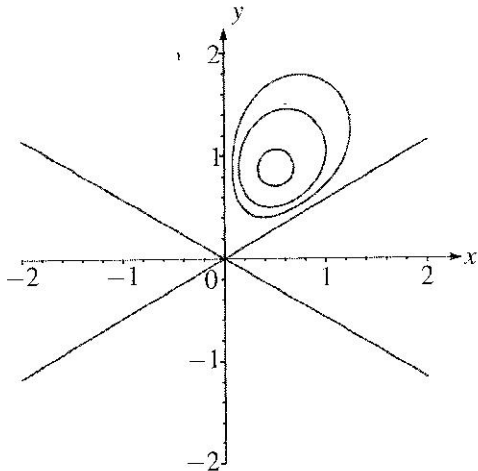
**Exercice 18** Confinement de neutrons

Les neutrons ne possédant pas de charge il est impossible de les piéger en courbant leur trajectoire dans des anneaux de stockage comme pour les électrons ou les protons, grâce à un champ magnétique uniforme. Leurs propriétés magnétiques (moment magnétique dipolaire) permettent cependant de confiner des neutrons très lents, dits "ultrafroids" grâce à un champ magnétique hexapolaire qui agit sur les neutrons par son gradient. Six fils infiniment longs, parallèles à l'axe  $Oz$  sont disposés de telle sorte que leurs traces dans le plan  $(Oxy)$  sont situées aux sommets d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon  $a$ . On note  $A_1$  et  $B_1$  (resp.  $A_2$  et  $B_2$  et  $A_3$  et  $B_3$ ) les fils diamétralement opposés et parcourus par des courants d'intensités  $I$  et  $-I$  opposées.  $A_1A_2A_3$  est un triangle équilatéral. Et on suppose que  $A_1$  est sur l'axe  $Ox$ .





1. Indiquer les propriétés de symétrie de cette distribution de courant et les conséquences sur le champ magnétique qu'elle crée dans tout l'espace.
2. On considère un point  $M$  du plan  $Oxy$ . On pose  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ . Etablir l'expression du champ magnétique créé par le fil  $A_1$  en fonction de  $I$ ,  $a$ ,  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  et  $\vec{r}$ . Pourquoi s'intéresse-t-on seulement aux points de ce plan ?
3. On repère  $M$  par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . On pose  $u = r/a$  et  $B_0 = \mu_0 I / (2\pi a)$ . Donner les composantes radiales  $B_{rA_1}$  et orthoradiales  $B_{\theta A_1}$  du champ magnétique créé en  $M$  par le seul fil  $A_1$ , en fonction de  $u = r/a$ ,  $B_0$  et  $\theta$ .
4. Par quelle transformation passe-t-on du champ créé par le fil  $A_1$  à celui créé par le fil  $B_1$  diamétralement opposé? En déduire la relation existant entre les composantes radiales et orthoradiales  $B_{rB_1}$  et  $B_{\theta B_1}$  du champ magnétique créé en  $M$  par le fil  $B_1$  et celles du champ créé par le fil  $A_1$ .
5. Relier de façon analogue les composantes du champ créé par l'ensemble des fils  $A_2B_2$  à celles du champ créé par l'ensemble  $A_1B_1$ . Procéder de même pour l'ensemble des fils  $A_3B_3$ .
6. Compléter la carte des lignes de champ en indiquant la trace des fils sur la figure, en orientant les lignes de champ tracées et en traçant autour des autres fils les lignes de champ orientées.



7. On examine le champ au voisinage du point  $O$ .
  - (a) Que vaut le champ en  $O$  ?
  - (b) Effectuer le développement limité à l'ordre 2 en  $u$  des expressions de  $B_{rA_1}$  et  $B_{\theta A_1}$ .
  - (c) En déduire le développement à l'ordre 2 en  $u$  des composantes  $B_{r1}$  et  $B_{\theta 1}$  du champ créé par l'ensemble  $A_1B_1$ .

(d) Montrer que le champ total se met sous la forme :

$$B_r = -CB_0u^2 \sin(3\theta)$$

$$B_\theta = -CB_0u^2 \cos(3\theta)$$

où  $C$  est une constante à déterminer.

(e) Calculer le module  $B(M)$  du champ magnétique total et préciser quelles sont dans le plan  $Oxy$  les lignes "isomodule" telles que  $B(M)=cte$ .

(f) On examine maintenant le champ à grande distance ( $a \ll r$ ). En procédant comme précédemment, établir que le terme principal du champ total est en  $F(\theta)/r^p$  où  $p$  est un entier supérieur ou égal à 4.

8. On admet qu'un neutron placé dans un champ magnétique oriente toujours son moment magnétique dans la direction du champ mais que son sens peut être de façon équiprobable parallèle ou antiparallèle au vecteur champ magnétique. On pose

$$\Omega = \sqrt{12B_0M/ma^2}$$

où  $m=1,67.10^{-27}$ kg est la masse du neutron et  $M=9,666.10^{-27}$ A.m<sup>2</sup> son moment magnétique.

(a) Quelle est la dimension de  $\Omega$  ?

(b) Exprimer en fonction de  $\Omega$ ,  $m$  et  $r$  l'énergie potentielle d'interaction entre le neutron et le champ magnétique. On distinguera le cas des neutrons parallèles de celui des neutrons anti-parallèles.

(c) Exprimer la force qui s'exerce sur les neutrons. En déduire qu'il est possible de confiner certains neutrons dans ce champ. Préciser lesquels.

9. On s'intéresse aux neutrons confinés.

(a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement d'un neutron dans le repère  $Oxyz$ .

(b) Déterminer ses coordonnées  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  si on suppose qu'à l'instant  $t=0$ , le neutron est en  $(x_0, 0, 0)$  avec la vitesse  $(0, U_0, V_0)$ .

(c) Représenter la trajectoire du neutron.

10. Soit  $U$  la projection du vecteur vitesse dans le plan  $Oxy$ . Montrer que si  $U > U_C$ , le neutron n'est pas confiné. Exprimer  $U_C$  en fonction de  $B_0$ ,  $M$  et  $m$ .

11. Calculer  $U_C$  pour  $B_0=0,5$  T. Calculer l'énergie cinétique critique  $E_C$  correspondante en eV. Justifier par un calcul numérique le qualificatif d'"ultrafroid" donné aux neutrons confinés.

12. On considère un faisceau de neutrons ralentis en équilibre thermique à la température  $T=300$ K. Evaluer la fraction de ces neutrons qui sont susceptibles d'être piégés dans le champ. On donne la loi de répartition en énergie cinétique  $E$  des neutrons :

$$dP(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}(k_B T)^{3/2}} \sqrt{E} \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right) dE$$

où  $dP(E)$  est la probabilité de trouver l'énergie cinétique entre  $E$  et  $E + dE$ .