

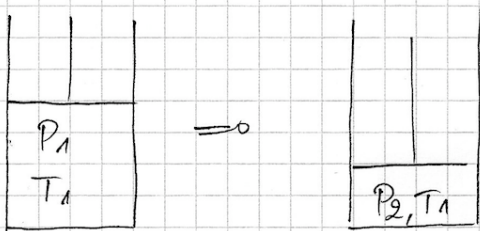
# Corrigé de quelques exercices de thermodynamique

MP\*, Henri IV

11 septembre 2022



Corrigé exercice 1 Transformation isotherme d'un gaz réel



$$\Delta U = Q + W$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T_1} \text{ car isotherme réversible } \Rightarrow Q = T_1 \Delta S$$

$$Q = T_1 (s_2 - s_1) m = -396 \text{ kJ}$$

$$\Delta H = m(h_2 - h_1) = 0 \quad \Delta U = \Delta H - \Delta(PV) = m[(h_2 - h_1) + \underbrace{P_1 v_1 - P_2 v_2}_{188 \text{ kJ.kg}^{-1}}] = -30 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow W = \Delta U - Q = 366 \text{ kJ}$$

Rq: Pour un GP, on avait  $\Delta U = 0$

ici  $\Delta U < 0$  car  $T_1 = c^te$  mais  $V \downarrow$ , les molécules se rapprochent  $e_{pij} \downarrow$



Corrigé exercice 2 Chauffage d'un gaz

Corrigé exercice 3 Point triple

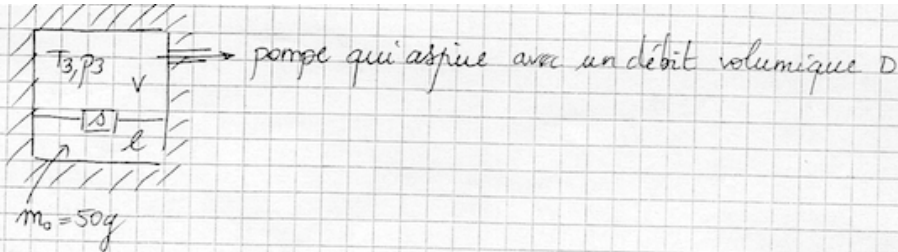


Diagram of a piston-cylinder system. The cylinder contains a substance at pressure  $p_3$  and temperature  $T_3$ . A piston of area  $S$  is pushed down by a weight  $\Delta S$ . A pump on the right aspirates the substance with a volumetric flow rate  $D$ . The initial mass is  $m_0 = 50g$ .

1. Phase diagram (P vs T) showing regions S (solid), L (liquid), and V (vapor). The triple point is at  $(T_3, p_3)$ . The process path is shown as a vertical line from  $(T_3, p_3)$  up to point C, then along the triple point line to point V, and finally along the sublimation curve to point S.

tant que les 3 phases coexistent  
 $\begin{cases} p = p_3 & \text{donc la vapeur aspirée doit} \\ T = T_3 & \text{être remplacée} \end{cases}$

\* du liquide se vaporise mais cela nécessite de la chaleur ; du liquide se solidifie de sorte que la chaleur totale nécessaire soit nulle.  
 Tant qu'il reste du liquide  $(p_3, T_3)$ .  
 Quand tout le liquide a disparu alors V+S coexistent,  $p$  diminue sur la courbe de sublimation.

2. 
$$\frac{dm_{l \rightarrow v}}{dt} l_{vap} + \frac{dm_{l \rightarrow s}}{dt} (-l_{fusion}) = 0$$

ou 
$$D = \frac{dm_{l \rightarrow v}}{dt} \times \frac{1}{\rho_{vap}} \quad \text{masse d'eau qui se solidifie/it. avec } \rho_{vap} = \frac{p_3^{11}}{R T_3} = 4,75 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$m_{\text{eau liquide}}(t) = m_0 - \left( \frac{dm_{l \rightarrow v}}{dt} + \frac{dm_{l \rightarrow s}}{dt} \right) t = m_0 - D \rho_{liq} \left( 1 + \frac{l_{vap}}{l_{fus}} \right) t$$

$$m(t) = 0 \text{ pour } t = \frac{m_0}{D \rho_{vap} \left( 1 + \frac{l_{vap}}{l_{fus}} \right)} = \frac{50 \cdot 10^{-3}}{0,1 \cdot 10^{-3} \times \frac{10^3}{4,75} \left( 1 + \frac{2,54}{0,335} \right)}$$

$t \approx 12250 \text{ s} \approx 3 \text{ h } 25 \text{ min}$

A ce moment, il ne reste plus dans le récipient que de l'eau solide et de la vapeur d'eau à  $T_3$  et  $p_3$ . Ensuite la vapeur aspirée n'est pas renouvelée  $p \downarrow$ .



Corrigé exercice 4 Vaporisation dans le vide

$m = 2g$   
eau  
liquide état initial

$T_0 = 290K$   
 $P_0 = 10^5 Pa$

$V_0 = 5L$   
 $T_1 = 350K$   
 $m$

état final

isotherme à  $T_1$

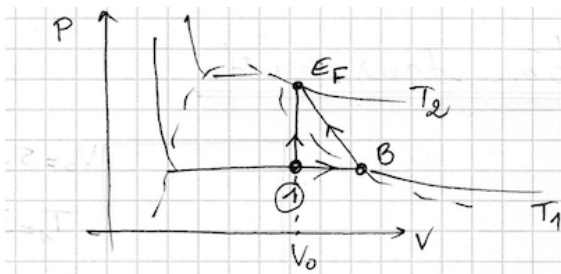
$T_1$

a-i- Dans l'état final soit l'eau est entièrement vaporisée ⊙, soit elle est en équilibre liquide-vapeur à la température  $T_1$  et à la pression  $P_s(T_1)$  dans le volume  $V_0$ . ⊗

- \* Si elle est entièrement vaporisée alors
 
$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P = P_x = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{V_0} = 0,64 \text{ bar} > P_s(T_1)$$
 $\Rightarrow$  impossible
- Donc l'eau est seulement partiellement vaporisée
- \* on néglige le volume de l'eau liquide. On détermine la masse de vapeur par =
 
$$\frac{m_v}{M} RT_1 = P_s(T_1) V_0 \Rightarrow x = \frac{m_v}{m} = \frac{P_s(T_1)}{P_x} = 72\%$$

$$m_v = 1,42g \text{ et } m_l = 0,58g$$





Comme précédé dans l'état final soit l'eau s'est entièrement vaporisée soit il y a toujours équilibre liquide-vapeur.

Supposons qu'elle est entièrement vaporisée alors

$$P_2 = \frac{m}{M} \frac{RT_2}{V_0} = 0,69 \text{ bar} < P_s(T_2) : \text{hyp. vraie}$$

On a ici aussi  $\Delta U = Q$  ↙ compression isotherme à  $T_1$  de la vapeur

$$\Delta H = \underbrace{(1-x)m l_{\text{vap}}(T_1)}_{\substack{\text{chgé d'état de} \\ \text{l'eau liquide} \\ \text{instant à } T_1 \text{ et } p_s(T_1)}} + \underbrace{0}_{\text{échauffé}} + \underbrace{m C_{P, \text{vap}}(T_2 - T_1)}_{\substack{\text{échauffé de} \\ \text{la vapeur de} \\ T_1 \text{ à } T_2 \text{ à} \\ P_2}}$$

$$\Delta PV = (P_2 - P_s(T_1)) V_0$$

$$\Delta U = Q = \Delta H - \Delta(PV)$$

$$= (1-x)m l_{\text{vap}}(T_1) + \frac{m}{M} (C_{V,m} + R)(T_2 - T_1) + (P_s(T_1) - P_2) V_0$$

$$Q = (1-x)m \left[ l_{\text{vap}}(T_1) - \frac{RT_1}{M} \right] + \frac{m}{M} C_{V,m} (T_2 - T_1)$$

$$Q = 1,29 \text{ kJ}$$

Pour passer de l'état initial à l'état final, le premier principe s'écrit ici :

$$\Delta U = Q$$

$$\text{ou } \Delta U = \Delta H - \Delta(PV)$$

$$\Delta U = \underbrace{m c_L (T_1 - T_0)}_{\substack{\text{l'eau liquide} \\ \text{passé de } T_0 \text{ à } T_1}} + \underbrace{x m l_{vap}}_{\substack{\Delta H \\ \text{vaporisation} \\ \text{à } T_1 \text{ et } P_s(T_1) \\ \text{de } x m \text{ g d'eau}}} - \underbrace{(P_s(T_1) V_0 - P_0 V_0 m)}_{\substack{\uparrow \\ \text{négligeable}}}$$

$$\Delta U = Q = m c_L (T_1 - T_0) + x m l_{vap} - P_s(T_1) V_0 = 3,54 \text{ kJ}$$

Bilan entropique :

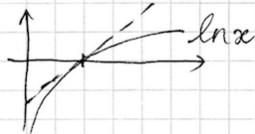
$$S_{ech} = \frac{Q}{T_1}$$

$$\Delta S = \underbrace{m c_L \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)}_{\substack{\uparrow \\ \text{échauffement} \\ \text{de l'eau} \\ \text{liquide}}} + \underbrace{x m \frac{l_{vap}}{T_1}}_{\text{chg. d'état}} = S_{ech} + S_{créé}$$

$$\text{d'où } S_{créé} = \Delta S - S_{ech}$$

$$S_{créé} = m c_L \left( \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \left(\frac{T_1 - T_0}{T_1}\right) \right) + \frac{P_s(T_1) V_0}{T_1} > 0$$

$\underbrace{\left( \ln x - \frac{x-1}{x} \right)}_{> 0} \text{ avec } x = \frac{T_0}{T_1} > 1$



$$S_{créé} = 0,80 \text{ J.K}^{-1}$$

### Corrigé exercice 5 Evolution isenthalpique

1. L'enthalpie est une fonction d'état extensive, la transformation est monobare et le récipient est calorifugé.

$$\Delta H = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

Dans l'état final :

ou bien seulement une partie du liquide est vaporisé, auquel cas la température finale est  $T_1$  la température d'équilibre liquide-vapeur sous la pression  $p_0$

ou bien tout est vaporisé

Dans la première hypothèse, on note  $x$  la fraction qui s'est vaporisée. La masse  $m_2$  de vapeur se refroidit de  $T_2$  à  $T_1$  pendant qu'une fraction de la masse  $m_1$  de liquide se vaporise. On a alors :

$$0 = x l_{vap} m_1 + m_2 [h_{vap}(T_1) - h_{vap}(T_2)]$$

$$x = \frac{m_2 [h_{vap}(T_1) - h_{vap}(T_2)]}{m_1 l_{vap}}$$

On en déduit que 185 g de liquide se vaporise pendant que 2 kg de vapeur refroidissent de 478K à 373 K. La seconde hypothèse conduirait à un résultat absurde.

2.  $\Delta S = S_F - S_I = (1-x)m_1 s_l(T_1) + xm_1 s_v(T_1) + m_2 s_v(T_1) - [m_1 s_l(T_1) + m_2 s_v(T_2)]$   
 $\Delta S = xm_1(s_v(T_1) - s_l(T_1)) + m_2(s_v(T_1) - s_v(T_2)) = 0,185(7,354 - 1,306) + 2(7,354 - 7,847) = 0,135 \text{ kJ/K}$   
 $> 0$  La transformation est irréversible.
3.  $S$  étant une fonction d'état extensive, on calcule la variation d'entropie de la masse  $m_2$  en supposant  $c_p$  constant sur l'intervalle de température considéré et celle de la masse  $m_1$  selon :

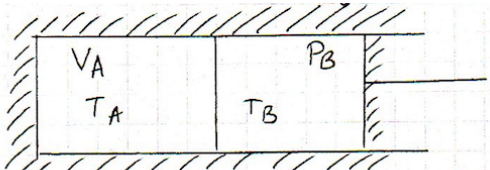
$$\Delta S_1 = xm_1 \frac{\ell_{vap}(T_1)}{T_1}$$

et

$$\Delta S_2 = m_2 c_p \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

Comme  $c_p = \left(\frac{\partial h_v}{\partial T}\right)_P \approx \frac{2884 - 2675}{478 - 373} = 1,99 \text{ J/K/kg}$ , on aboutit à  $\Delta S = 0,132 \text{ kJ/K}$

### Corrigé exercice 6 Equilibre entre deux gaz



Le système  $\{A+B\}$  est calorifugé

$$\Delta U_A = C_{VA}(T_f - T_{A_0}) = Q_A \quad (V = c^{\text{te}} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V)$$

$$\Delta H_B = C_{PB}(T_f - T_{B_0}) = Q_B \quad (\text{transf}^{\circ} \text{ isobare})$$

ou  $Q_A + Q_B = 0 \Rightarrow C_{VA}(T_f - T_{A_0}) + C_{PB}(T_f - T_{B_0}) = 0$

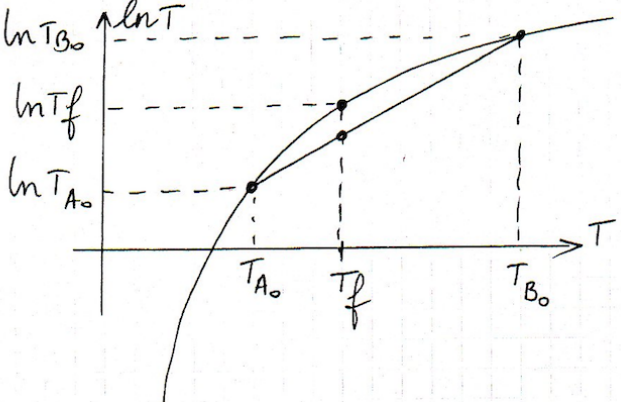
$$T_f = \frac{C_{VA} T_{A_0} + C_{PB} T_{B_0}}{C_{VA} + C_{PB}}$$

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = S_c > 0$$

$$= C_{VA} \ln\left(\frac{T_f}{T_{A_0}}\right) + C_{PB} \ln\left(\frac{T_f}{T_{B_0}}\right) > 0$$

$$= (C_{VA} + C_{PB}) \left[ \ln T_f - \frac{C_{VA} \ln T_{A_0} + C_{PB} \ln T_{B_0}}{C_{VA} + C_{PB}} \right]$$

ou  $\ln$  est concave donc  $\ln T_f >$  barycentrie de  $\ln T_{A_0}$  et  $\ln T_{B_0}$  avec les coeff.

$$\frac{C_{VA}}{C_{VA} + C_{PB}} \quad \text{et} \quad \frac{C_{PB}}{C_{PB} + C_{VA}}$$




Corrigé exercice 7 Cycle Diesel

$\eta = -\frac{W}{Q_c}$   
 or pour le cycle  $W + Q_c + Q_f = \Delta U = 0$   
 $\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$

$Q_c = \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B)$   
 $Q_f = \Delta U_{DA} = C_v(T_A - T_D)$

$\Rightarrow \eta = 1 + \frac{C_v(T_A - T_D)}{C_p(T_C - T_B)}$

or AB est une adiabatique réversible  $P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \Leftrightarrow T V^{\gamma-1} = c$   
 $\Rightarrow T_B = T_A a^{\gamma-1}$  où  $a = \frac{V_A}{V_B}$

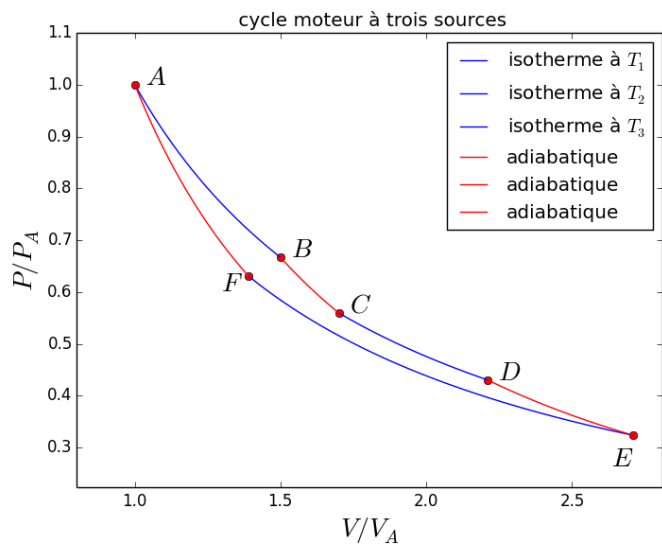
De même sur CD  $\Rightarrow T_C = T_D b^{\gamma-1}$  où  $b = \frac{V_D}{V_C}$

$B \rightarrow C$  est une isobare  $\Rightarrow \frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C} \Rightarrow T_B = T_C \frac{b}{a}$

$$\eta = 1 + \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\frac{b}{a} \times \frac{1}{a^{\gamma-1}} - \frac{1}{b^{\gamma-1}}}{1 - \frac{b}{a}} \right)$$

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{1}{b^\gamma} - \frac{1}{a^\gamma}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}$$

Corrigé exercice 8 oral de Centrale



1. Le gaz effectue un cycle réversible, les isothermes se font donc au contact de thermostats aux températures  $T_1, T_2$  (sources chaudes) et  $T_3$  (source froide).

2. Au cours du cycle on a :

$$0 = W + Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Le rendement est défini comme le rapport de la grandeur utile (ici le travail fourni par la gaz à l'extérieur) sur la grandeur coûteuse (ici le transfert thermique totale fourni au gaz lors des isothermes chaudes)

$$\eta = \frac{-W}{Q_1 + Q_2} = 1 + \frac{Q_3}{Q_1 + Q_2}$$

Sur une isotherme d'un gaz parfait, par exemple AB on a  $\Delta U = 0 = W_{AB} + Q_1$  or

$$W_{AB} = \int_A^B -pdV = -nRT_1 \int_A^B \frac{dV}{V} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nRT_1 \ln k_1$$

d'où

$$Q_1 = nRT_1 \ln k_1$$

Finalement

$$\eta = 1 + \frac{T_3 \ln k_3}{T_1 \ln k_1 + T_2 \ln k_2}$$

3. Le cycle étant réversible on a aussi

$$0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3}$$

soit

$$0 = \ln k_1 + \ln k_2 + \ln k_3$$

soit encore

$$k_1 k_2 k_3 = 1$$

avec  $k_1 > 1$ ,  $k_2 > 1$  et  $k_3 = \frac{1}{k_1 k_2} < 1$ .

$$\eta = 1 - \frac{T_3(\ln k_1 + \ln k_2)}{T_1 \ln k_1 + T_2 \ln k_2} = 1 - \frac{T_3(x + y)}{T_1 x + T_2 y}$$

où on a noté  $x = \ln k_1$  et  $y = \ln k_2$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = T_3 \frac{(T_1 - T_2)y}{(T_1 x + T_2 y)^2} > 0$$

De même

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} < 0$$

Le rendement est donc maximum pour  $x$  maximum et  $y$  minimum, ie lorsque  $k_2 = 1$  et donc que l'isotherme à  $T_2$  n'existe pas. Sur le graphe, en gardant un rapport volumétrique donné (ie  $V_E/V_A$  fixé), on voit que l'aire du cycle augmente si la portion BCD disparaît.

### Corrigé exercice 9 Oral des Mines

1. Le rendement du moteur est inférieur au rendement d'un moteur fonctionnant entre les sources, froide à  $T_1$  et, chaude à  $T_2$ , selon un cycle de Carnot, on a donc :

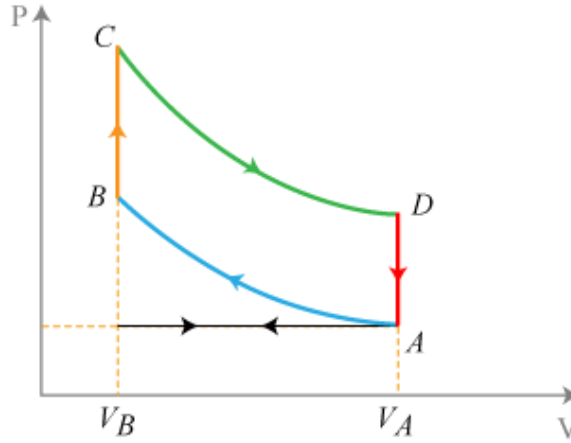
$$\eta = \frac{P_m}{P_{th}} < \eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

On a donc

$$P_{th} > \frac{P_m}{\eta_C}$$

A.N. :  $\eta_C = 0,88$ ,  $P_{th} > 5,3$  MW

2. Le cycle a l'allure suivante :



Sur les isochores, on calcule aisément les transferts thermiques reçus par le gaz :

$$\Delta U_{BC} = Q_C = C_V(T_C - T_B)$$

$$\Delta U_{DA} = Q_F = C_V(T_A - T_B)$$

or

$$\eta = \frac{-W}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{(T_A - T_B)}{(T_C - T_B)}$$

Les transformations AB et CD sont des adiabatiques réversibles d'un gaz parfait, on peut appliquer les lois de Laplace, ce qui conduit à

$$\eta = 1 - \frac{1}{a^{\gamma-1}}$$

où  $a$  est le rapport volumétrique  $a = v_A/v_B$

### Corrigé exercice 10 refroidissement d'un gaz parfait

1. On trouve en appliquant la loi de Laplace pour les transformations adiabatiques réversibles du gaz parfait :

$$T_N = T_0 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{N \frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Pour la suite, on note  $\alpha = \frac{P_1}{P_2}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$  et donc  $T_N = T_0 \alpha^N$ .

2. Le travail reçu par le gaz au cours de la compression isotherme réversible à la température  $T_k$  est :

$$W_k = nRT_k \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

et on a au cours de ces transformations  $\Delta U = Q + W = 0$ , soit

$$Q_k = -W_k$$

Lors des détentes adiabatiques réversibles  $\Delta U = W = C_V \Delta T = \frac{nR}{\gamma-1} (T_{k+1} - T_k)$ .  
Le transfert thermique total reçu au cours de ces transformations est donc :

$$Q_N = -nR \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \sum_{k=0}^{N-1} T_k = -nRT_0 \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k$$

$$Q_N = -nRT_0 \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right) \left( \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \right)$$

De même le travail total reçu au cours des  $N$  transformations est :

$$W_N = -Q_N + \frac{nR}{\gamma-1} \sum_{k=0}^{N-1} (T_{k+1} - T_k)$$



$$W_N = nRT_0(1 - \alpha^N) \left[ \frac{\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)}{1 - \alpha} - \frac{1}{\gamma - 1} \right]$$

Si la température finale est fixée et que le nombre d'opération  $N$  augmente alors  $\alpha \rightarrow \infty$ . On trouve

$$Q_N \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} -nR(T_0 - T_f) \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

et

$$W_N \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} nR(T_0 - T_f)$$

La transformation est alors tout simplement une isobare à la pression  $P_1$  et on a donc :

$$\Delta H = Q = C_p \Delta T = -nR \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_0 - T_f), \Delta U = Q + W = C_v (T_f - T_0) \text{ d'où } W = (C_v - C_p) \Delta T = nR(T_0 - T_f).$$

### Corrigé exercice 11 Détente d'un liquide dans le vide

1.  $V_C = \frac{mRT_0}{MP_0} = 17,2 \text{ L}$ .

On considère le système {tout ce qui est contenu dans le volume  $V$ }. Le premier principe s'écrit pour ce système :

$$\Delta U = W + Q = Q$$

car le volume est indéformable. Dans l'état initial on a de l'eau liquide à  $T_0$  et  $P_0$  et dans l'état final, la même quantité d'eau sous forme de vapeur à  $T_0$  et  $P_0$ . On a donc  $\Delta H = m(h_{vap}(T_0) - h_{liq}(T_0)) = m\ell_v(T_0)$ . Par ailleurs,  $\Delta U = \Delta H - \Delta(PV)$ , on a donc

$$\Delta U = Q = m\ell_v - P_0(V_C - V_{liq}) \approx m\ell_v - P_0V_C$$

A.N. :  $Q = 21,3 \text{ kJ}$ .

$$S_{ech} = Q/T_0 = 57,1 \text{ J/K}$$

$$\Delta S = m(s_{vap}(T_0) - s_{liq}(T_0)) = m \frac{\ell_v}{T_0}, \Delta S = 61,7 \text{ J/K}$$

On en déduit  $S_{cr} = \Delta S - S_{ech} = 4,7 \text{ J/K} > 0$ . La transformation est sans surprise irréversible.

2. Si  $V < V_C$  alors seulement une fraction du liquide se vaporise de telle sorte que dans l'état final on a un équilibre liquide-vapeur à la température  $T_0$  et à la pression  $P_0$ . La loi des gaz parfaits conduit à :

$$m_{vap} = \frac{MP_0V}{RT_0} = \frac{V}{V_C} m$$

3. Si  $V > V_C$  tout se vaporise et dans l'état final on a  $P < P_0$ .

$$P = \frac{mRT_0}{MV} = \frac{V_C}{V} P_0$$

### Corrigé exercice 12 Calorimétrie

Si on ne tient pas compte de la vaporisation d'une partie de l'eau, on estime la température de sortie du four de la masse de fer par :

$$\Delta H = 0 = m_{eau}c_{eau}(T_F - T_0) + C(T_F - T_0) + m_{Fe}c_p(T_F - T')$$

ce qui donne  $T' = 771 \text{ }^\circ\text{C}$ . Si on tient compte de la vaporisation d'une fraction  $x$  de l'eau :

$$\Delta H = 0 = xm_{eau}c_{eau}(T_{vap} - T_0) + xm_{eau}\ell_{vap} + (1 - x)m_{eau}c_{eau}(T_F - T_0) + C(T_F - T_0) + m_{Fe}(T_F - T)$$

$$x = \frac{m_{Fe}c_p(T - T')}{\ell_v + c_{eau}(T_{vap} - (T_F - T_0))}$$

Ceci conduit à  $x = 1,15\%$  de la masse d'eau initiale se vaporise soit  $80,4 \text{ g}$ .

### Corrigé exercice 13

1. La compression 1-2 est adiabatique réversible. On a donc :

$$pV^\gamma = cte$$

ie

$$p_1^{(1-\gamma)} T_1^\gamma = p_2^{(1-\gamma)} T_2^\gamma$$
$$T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 484K$$

2. Le premier principe pour un système ouvert en régime permanent s'écrit pour la transformation 1-2 adiabatique

$$\Delta h_{12} = w_{1 \rightarrow 2}$$

Comme l'air qui subit cette transformation est considéré comme un gaz parfait, on a

$$\Delta h_{12} = c_p(T_2 - T_1) = w_{1 \rightarrow 2}$$

soit  $w_{1 \rightarrow 2} = 198 \text{ kJ.kg}^{-1}$

3. Si je comprends bien l'énoncé, la puissance totale fournie par le gaz lors de la détente adiabatique 3-4 dans la turbine est utilisée pour la compression 1-2. On a alors

$$\Delta h_{34} = -w_{1 \rightarrow 2} = c_p(T_4 - T_3)$$

d'où

$$T_4 = T_3 - w_{1 \rightarrow 2}/c_p$$

ce qui donne  $T_4 = 1052 \text{ K}$ .

4. La transformation 3-4 est une détente adiabatique réversible d'un gaz parfait, on peut ici aussi appliquer la loi de Laplace

$$p_4 = p_3 \left( \frac{T_4}{T_3} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

soit  $p_4 = 3,36 \text{ bar}$ .

5. 4-5 est encore une fois une détente adiabatique réversible, on réutilise encore une fois la loi de Laplace :

$$T_5 = T_4 \left( \frac{P_5}{P_4} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} = 744K$$

6. Et enfin pour la tuyère, le premier principe en système ouvert en régime permanent s'écrit :

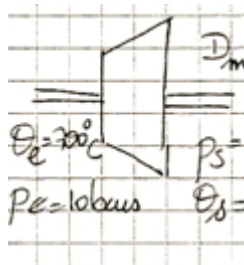
$$\Delta h_{45} + e_{c45} = 0$$

Or on néglige l'énergie cinétique en entrée de la tuyère, on a donc

$$c_5 = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)}$$

soit  $c_5 = 25 \text{ m.s}^{-1}$ .

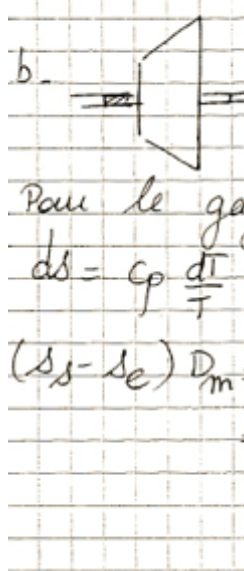
Corrigé exercice 14 Détente d'un gaz parfait dans une turbine



$$D_m = 15 \text{ kg/s} \quad a. \quad D_m (h_s - h_e) = \underset{\substack{\text{machine élec} \\ \rightarrow \text{turbine}}}{P}$$

$$G.P. \Rightarrow h_s - h_e = c_p (\theta_s - \theta_e)$$

$$\boxed{P_{\text{turbine}} = D_m c_p (\theta_e - \theta_s) = 6,3 \cdot 10^5 \text{ W} > 0}$$



$$D_m (s_s - s_e) = \sigma_c \quad \leftarrow \text{taux de création d'entropie}$$

$$dh = T ds + v dp \Rightarrow ds = \frac{dh}{T} - \frac{v}{T} dp$$

Pour le gaz parfait  $dh = c_p \frac{dT}{T}$  et  $\frac{v}{T} = \frac{R}{Mp} = \frac{r}{p}$  où  $r = \frac{R}{M}$

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{r dp}{p}$$

$$(s_s - s_e) D_m = D_m \left( c_p \ln \left( \frac{T_s}{T_e} \right) - r \ln \left( \frac{p_s}{p_e} \right) \right) \quad \text{ou } c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$$

$$= D_m r \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_s}{T_e} \right) - \ln \left( \frac{p_s}{p_e} \right) \right) \quad \gamma = 1,4$$

$$0,325 > 0 \quad \text{la détente dans la turbine est irréversible.}$$

c. si l'évolution était réversible,  $\sigma = 0 \Rightarrow s_e = s_s$

$$\Rightarrow \frac{T_s}{r} = T_e \left( \frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 504 \text{ K} = 231^\circ\text{C} < \theta_s$$

$$\eta = \frac{P_{\text{réelle}}}{P_{\text{réversible}}} \quad \text{ou } P_{\text{réversible}} = D_m c_p (T_{s,r} - T_e)$$

$$\eta = \frac{T_s - T_e}{T_{s,r} - T_e} = \frac{700 - 280}{700 - 231} = 30\%$$



Corrigé exercice 15 comparaison de différentes détente

détente de Joule-Thomson

$$h_s - h_e = 0$$

détente dans une turbine

$$h_s - h_e = w_{tu}$$

détente dans une tuyère

$$h_s - h_e + e_{cs} - e_{ce} = 0$$

\* détente de J.T. : nécessairement irréversible, dans une tuyère on peut envisager une détente réversible.

\* Dans la tuyère, l'énergie cinétique de sortie est importante et maximale si la détente est réversible : les molécules ont des vitesses orientées dans le même sens. Au contraire dans la détente de J.T. les collisions sur la paroi provoquent un écoulement "désorganisé".

Corrigé exercice 16 air conditionné

1) Bilan à l'échangeur :

$$D_m(h_3 - h_2) + D_m(h_6 - h_5) = 0 \Rightarrow T_3 - T_2 + T_6 - T_5 = 0$$

$$\boxed{T_2 - T_6 = \Delta T = T_3 - T_5} \Rightarrow T_3 = T_5 + \Delta T$$

Bilan au compresseur :

$$D_m(h_2 - h_1) = P_c = D_m c (T_2 - T_1) > 0$$

Bilan à la turbine :

$$D_m(h_4 - h_3) = P_t = D_m c (T_4 - T_3) < 0$$

$$D_m c_p (T_2 - T_1 + T_4 - T_3) = P_m > 0 \quad (\text{machine réceptrice})$$

ou compresseur adiabatique réversible  $\Rightarrow T_2 = \alpha T_1$

turbine  $\Rightarrow T_3 = \alpha T_4$

$$D_m c_p \left( (\alpha - 1) T_1 + \frac{T_3}{\alpha} - T_3 \right) = \underline{D_m c_p \left( (\alpha - 1) T_1 + (T_5 + \Delta T) \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) \right) = P_m}$$

2)  $T_6 = T_2 - \Delta T = \alpha T_1 - \Delta T$

3)  $P_{1-6} = D_m c_p (T_6 - T_1) \quad \phi_c = \frac{P_{1-6}}{P_m}$

$$\phi_c = \frac{D_m c_p (\alpha T_1 - \Delta T - T_1)}{D_m c_p \left[ (\alpha - 1) T_1 + (T_5 + \Delta T) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) \right]}$$

$$\phi_c = \frac{T_1 (\alpha - 1) - \Delta T}{(\alpha - 1) T_1 + (T_5 + \Delta T) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)}$$

Pour  $\alpha = 1,147$  on a  $\phi_c = 4,18$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1,616 \Rightarrow p_2 = 1,616 \text{ bar}$$

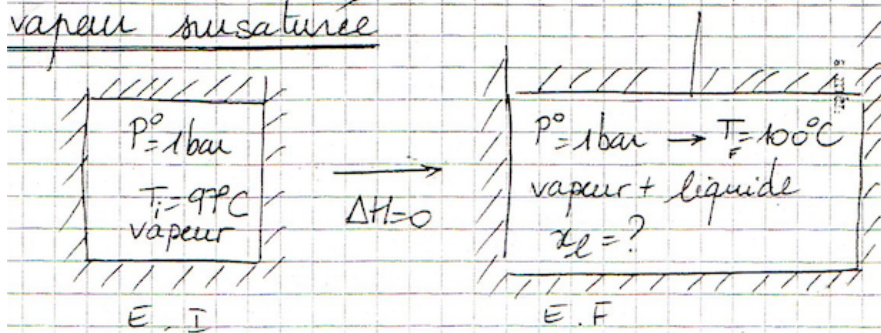
alors  $T_6 = \alpha T_1 - \Delta T = 316 \text{ K} > 300 \text{ K}$  l'air chaud

avec  $T_6 = 300 \text{ K}$ ,  $\alpha = \frac{T_6 + \Delta T}{T_1} = 1,092$  et  $\phi_c = 3,06$

on a une diminution sensible du coefficient d'effet qui reste toutefois  $> 1$  d'où l'intérêt de ce système par rapport à un chauffage électrique.

### Corrigé exercice 17 vapeur sursaturée

vapeur sursaturée



$$\Delta H = 0 = m c_{pV} (T_f - T_i) - x_l m l_{\text{vap}} \Rightarrow x_l = \frac{c_{pV} (T_f - T_i)}{l_{\text{vap}}}$$

$$\text{A.N. : } x_l = \frac{2,03 \cdot 10^3 \times 3}{2250 \cdot 10^3} = 0,27\%$$



Corrigé exercice 18 laminage du fréon

Laminage du fréon

a.  $h_2 = h_1 = x h_{v2} + (1-x) h_{l2} = 448 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

détente de Joule-Thomson

$$\Rightarrow x = \frac{h_{l1} - h_{l2}}{h_{v2} - h_{l2}} = \frac{448 - 387}{556 - 387}$$

$$x = 36,1\%$$

$$s_2 = x s_{v2} + (1-x) s_{l2} = 4,319 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \Rightarrow s_c = s_2 - s_1 = 33 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

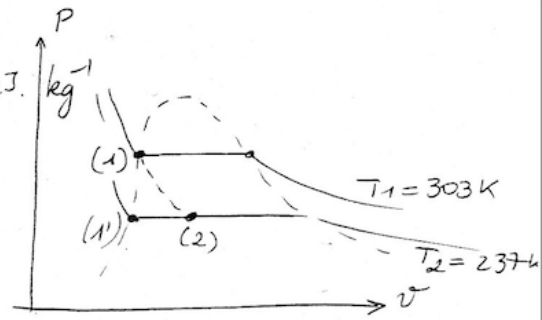
b.  $s_c = s_2 - s_{1'} + s_{1'} - s_1 = x \frac{h_{\text{vap}}(237)}{T_2} + c_p \ln\left(\frac{T_{1'}}{T_1}\right)$

$$s_c = x \left( \frac{h_{v2} - h_{l2}}{T_2} \right) + c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

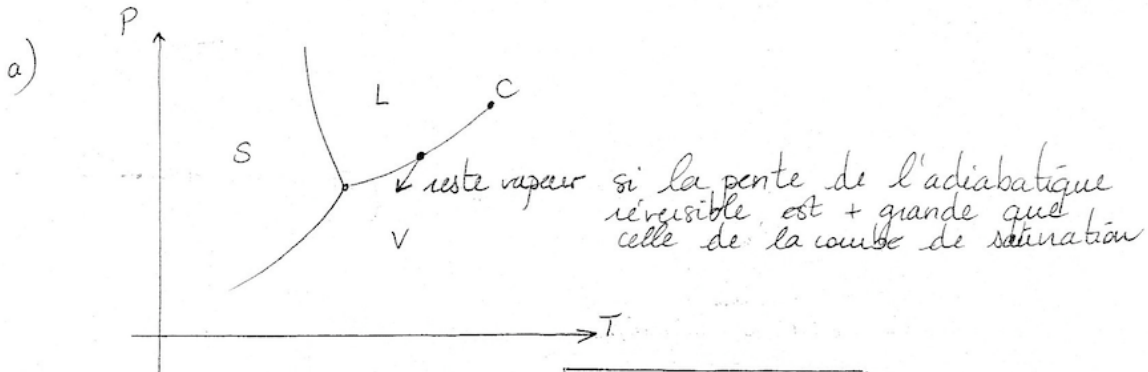
$$s_c = 29 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Remarque:  $h_{\text{vap}}(T_2) = h_{v2} - h_{l2}$

→ approximation  $s_{1'} - s_1 = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$  conduit à cette petite différence



Corrigé exercice 19 détente adiabatique de vapeur



Apparition de brouillard si  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S < \frac{dP_{\text{vap}}}{dT}$

or selon la relation de Clapeyron  $\frac{dP_{\text{vap}}}{dT} = \frac{lv_{\text{vap}}}{T(\sigma_v - \sigma_l)}$   
 ici, on suppose  $\sigma_v \gg \sigma_l$

$$\Rightarrow \frac{dP_{\text{vap}}}{dT} \approx \frac{lv_{\text{vap}}}{T\sigma_v} = \frac{A-BT}{T \frac{RT}{Mp}} = \frac{(A-BT)}{RT^2} Mp$$

et la vapeur étant supposée se comporter comme un G.P.

$PV^\gamma = c^{\text{te}} \Rightarrow P\left(\frac{1}{P}\right)^\gamma = c^{\text{te}} \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = c^{\text{te}} \Rightarrow (1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0$   
 le long de l'adiabatique réversible du gaz parfait  
 soit  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{T}$

La condition de formation du brouillard est donc :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{T} < \frac{(A-BT)}{RT^2} Mp \quad (\Rightarrow) \quad T < \frac{A}{\frac{\gamma}{\gamma-1} R + B} = T_c$$

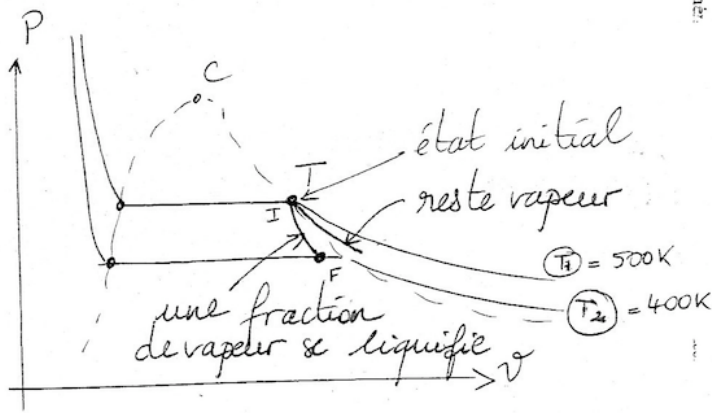
A.N. :  $T_c = 744K$

Si  $T < T_c$  : apparition de brouillard

b) formation de brouillard lorsqu'on débouche une bouteille de soda au dessus des ailes d'avion

c)  $\Delta S = 0 = m(s_F - s_I) = m(x_v s_{v2} + (1-x_v) s_{l2} - s_{v1})$   
 $= m(x_v (s_{v2} - s_{l2}) + s_{l2} - s_{v1}) = m(x_v \frac{lv_{\text{vap}}(T_2)}{T_2} + \underbrace{s_{l2} - s_{l1}}_{c_p \ln(\frac{T_2}{T_1})} + \underbrace{s_{l1} - s_{v1}}_{-lv_{\text{vap}}^T})$   
 $0 = x_v \frac{lv_{\text{vap}}(T_2)}{T_2} + c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{lv_{\text{vap}}(T_1)}{T_1}$



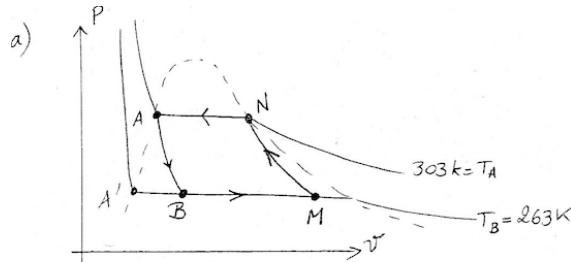


*Après avoir énoncé les données de l'exercice, il faut aller à la recherche de la relation de Clausius-Clapeyron pour l'équilibre liquide-vapeur. On peut alors écrire :*

$$\text{Finalement } x_{v_2} = \frac{\frac{lvap(T_1)}{T_1} + c_e \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\frac{lvap(T_2)}{T_2}} = \frac{\frac{A}{T_1} - B + c_e \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{\frac{A}{T_2} - B}$$

A.N.:  $x_{v_2} = 89\%$  soit  $x_{l_2} = 11\%$

Corrigé exercice 20 Réfrigérateur à fréon



b)  $A \rightarrow B$  : détente de Joule-Thomson  $\Rightarrow h_B = h_A$

ou  $h_B - h_A = 0 = c_p(T_B - T_A) + x_B \frac{h_{263}}{T_B} \Rightarrow x_B = \frac{c_p(T_A - T_B)}{h_{vap}(263)} = 24\%$

$$\Delta s_{AB} = s_B - s_A = s_B - s_{A'} + s_{A'} - s_A$$

$$= x_B \frac{h_{vap}(263)}{T_B} + c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 10,0 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

c)  $e = \frac{q_F}{w_u}$  où  $q_F = h_M - h_B = (x_M - x_B) h_{vap}(263)$

et

$$\begin{cases} h_B - h_A = 0 & : \text{détente de J.T.} \\ h_M - h_B = q_F & : \text{évaporateur (intérieur du réfrigérateur)} \\ h_N - h_M = w_u & : \text{compresseur} \\ h_A - h_N = q_c & : \text{condenseur (arrière du réfrigérateur)} \end{cases}$$

---

$0 = q_c + q_F + w_u \Rightarrow w_u = -q_c - q_F$  avec  $q_c = -h_{vap}(T_A)$

A.N.  $q_c = -139 \text{ kJ.kg}^{-1}$

$q_F = 118 \text{ kJ.kg}^{-1}$  ← machine réceptrice

$w_u = -q_c - q_F = +21 \text{ kJ.kg}^{-1}$  soit  $e = 5,6$

efficacité de Carnot correspondante :  $e_c = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 8,9 > e$

avec ici  $T_F = 268 \text{ K} > T_B$

$T_C = 298 \text{ K} < T_A$  } cause d'irréversibilité lors des T.T.

L'autre cause d'irréversibilité identifiée est la détente de J.T.

Corrigé exercice 21 pression de fusion

Corrigé exercice 22 condition de stabilité d'un équilibre thermodynamique

1. Evolution monotherme et monobare :

$$\begin{cases} \Delta U = Q - p_0 \Delta V \\ \Delta S \geq \frac{Q}{T_0} \end{cases} \Rightarrow \Delta U \leq T_0 \Delta S - p_0 \Delta V \Rightarrow \Delta(U + p_0 V - T_0 S) \leq 0$$

$G^* = U + p_0 V - T_0 S$  est un potentiel thermodynamique adapté pour une évolution monobare et monotherme :  $G^*$  diminue.

2.  $dG^* = dU + p_0 dV - T_0 ds$  or  $dU = T ds - p dV$

$$dG^* = (T - T_0) ds + (p_0 - p) dV \quad (1)$$

A l'équilibre  $G^*$  est minimum  $\Rightarrow T - T_0 = \left(\frac{\partial G^*}{\partial S}\right)_V = 0$   $T = T_0$

et  $p_0 - p = \left(\frac{\partial G^*}{\partial V}\right)_S = 0$   $p = p_0$

3. Considérons maintenant une évolution isotherme à  $T = T_0$  l'équilibre thermique étant réalisé dont seul le volume varie. L'état d'équilibre est décrit par les variables  $T$  et  $V$  avec  $T$  bloquée.

$$G^* = U + p_0 V - T S \Rightarrow dG^* = T ds - p dV + p_0 dV - T ds - S dT$$

$$dG^* = -S dT + (p_0 - p) dV$$

or retrouve  $\left(\frac{\partial G^*}{\partial V}\right)_T = 0 \Rightarrow p = p_0$

et  $G^*$  minimum  $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial G^*}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V} (p_0 - p)_T \geq 0 \Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \geq 0$

or  $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$

$$\Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T > 0$$

Remarque : (1) donne directement  $G^*$  minimum  $\Rightarrow \left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial V^2}\right)_S \geq 0 \Rightarrow$

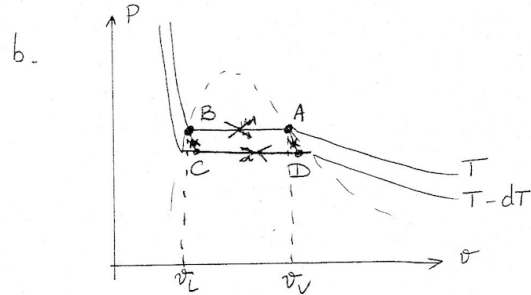
$$\frac{\partial}{\partial V} (p_0 - p)_S \geq 0 \Rightarrow -\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \geq 0 \Rightarrow \chi_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S \geq 0$$

Corrigé exercice 23 cycle de Carnot et relation de Clapeyron

a. cycle de Carnot = 2 adiabatiques réversibles + 2 isothermes (phases de T.T. réversible entre source et fluide).

Pour le moteur  $\eta_c = -\frac{W}{Q_c} = \frac{Q_c + Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$

avec  $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$  ie  $\frac{Q_f}{Q_c} = -\frac{T_f}{T_c} \Rightarrow \eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c}$



c.  $\eta = \frac{-W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$  avec  $-W = \text{aire du cycle} \approx (v_V - v_L) \times dP_{\text{sat}}$   
 et  $q_c = l_{\text{vap}}(T)$

soit  $\eta = \frac{(v_V - v_L) dP_{\text{sat}}}{l_{\text{vap}}(T)}$

or  $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \frac{T_c - T_f}{T_c} = \frac{dT}{T} = \frac{v_V - v_L}{l_{\text{vap}}(T)} dP_{\text{sat}}$

on retrouve  $\boxed{\frac{dP_{\text{sat}}}{dT} = \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T(v_V - v_L)}}$



Corrigé exercice 24 surfusion et croissance cristalline

a. système évoluant à  $\textcircled{T}$  et  $\textcircled{P}$

$$\Delta U = Q + W \text{ avec } W = -p\Delta V = -\Delta(pV)$$

$$\Delta S \geq \frac{Q}{T} \Rightarrow Q \leq T\Delta S$$

$$\Delta U \leq T\Delta S - \Delta(pV) \Rightarrow \Delta(U + pV - TS) \leq 0 \quad (\Rightarrow) \Delta G \leq 0$$

avec  $G$  : enthalpie libre

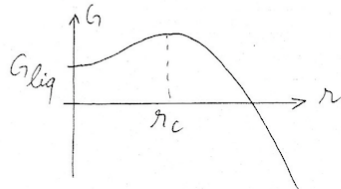
b. surfusion à  $\textcircled{T}$  et  $\textcircled{P}$  donnés  $\mu_S < \mu_L \Rightarrow \mu_L - \mu_S > 0$

$$c. G(r) = \left[ \mu_S \frac{4}{3}\pi r^3 + \mu_L \left( V - \frac{4}{3}\pi r^3 \right) \right] \frac{\rho}{M} + 4\pi r^2 A$$

$$G(r) = \underbrace{\mu_L \frac{V\rho}{M}}_{\text{enthalpie libre si tout est liquide}} + \frac{\rho}{M} \times \frac{4}{3}\pi r^3 (\mu_S - \mu_L) + 4\pi r^2 A$$

$$d. \frac{dG}{dr} = -\frac{\rho}{M} 4\pi r^2 (\mu_L - \mu_S) + 8\pi r A = 4\pi r \left( 2A - \frac{\rho}{M} (\mu_L - \mu_S) r \right)$$

$$\frac{dG}{dr} = 0 \text{ pour } \begin{cases} r = r_c = \frac{2A}{(\mu_L - \mu_S)} \frac{M}{\rho} \\ r = 0 \end{cases}$$

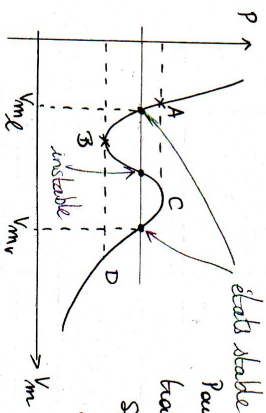


e. si  $r > r_c$   $G$  diminue si  $r \nearrow$  = tout se solidifie  
 si  $r < r_c$   $r \searrow$  = le solide disparaît

Remarque: \*  $r_c \nearrow$  si  $A \nearrow$  avec  $r_c = 0$  si  $A = 0$

\* lorsque  $T \rightarrow T_{\text{fus}}$   $\mu_L - \mu_S \rightarrow 0$   $r_c \rightarrow \infty$  = impossible de former le solide à  $T_{\text{fus}}$ .

équilibre liquide vapeur pour un fluide de Van der Waals



Pour  $P_0 < P < P_c$ , il existe trois valeurs possibles pour  $V_m$ . Seuls sont stables les états pour lesquels  $X_T > 0$ .

Sur les arcs AB et CD  $(\frac{\partial P}{\partial V_m}) < 0 \Rightarrow X_T > 0$  : les états correspondants sont stables.  
 Sur l'arc BC  $(\frac{\partial P}{\partial V_m}) > 0 \Rightarrow X_T < 0$  : état instable.

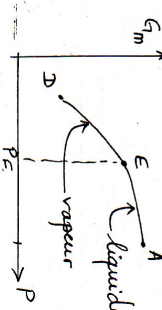
Ainsi à une pression  $P$  donnée  $P_0 < P < P_c$  peuvent exister deux états stables, l'un correspondant à une phase liquide ( $V_m$  faible), l'autre à une phase vapeur ( $V_m$  élevé).

$$dG = VdP - SdT \Rightarrow \left(\frac{\partial G_m}{\partial P}\right)_T = V_m$$

→ arc AB  $V_m < V_{mv}$  arc CD  $\Rightarrow$  la pente de l'arc AB < pente de l'arc CD.

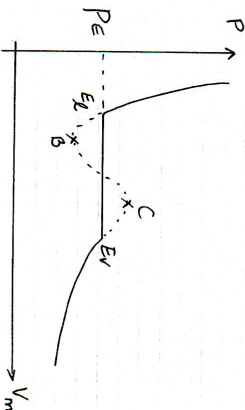
Par ailleurs  $V_m \downarrow \Rightarrow P \uparrow$ , la pente des courbes  $G_m(P)$  diminue.

L'arc instable rejoint l'arc AB en B et l'arc CD en C.  
 cf cours : état le plus stable = celui de plus faible  $G_m$ .



4

Le point E correspond à l'équilibre entre les deux phases à cette pression. Le volume molaire peut prendre toute valeur entre  $V_m^l$  et  $V_m^v$ .  
 L'isotherme réelle (correspondant aux états d'équilibre stable) est donc la suivante :



5

Sur une isotherme  $dG = VdP$  soit  $dG_m = V_m dP$

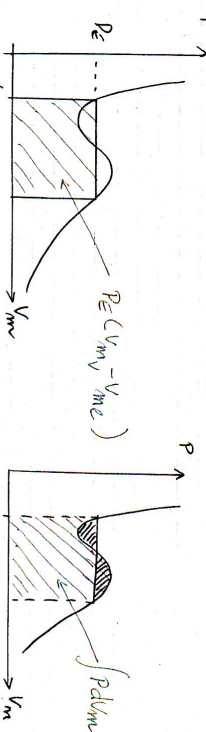
$$a \quad G_m(E_v) = G_m(E_l)$$

$$G_m(E_v) - G_m(E_l) = \int_{V_m^l}^{V_m^v} V_m dP = 0$$

$E_l$ : le long de l'isotherme

$$0 = \int_{V_m^l}^{V_m^v} P dV_m = \int_{E_l}^{E_v} P dV_m - \int_{E_l}^{E_v} P dV_m = \left[ P V_m \right]_{E_l}^{E_v} - \int_{E_l}^{E_v} P dV_m$$

$$\Rightarrow \int_{E_l}^{E_v} P dV_m - P_c (V_m^v - V_m^l) = \int_{E_l}^{E_v} P dV_m$$



L'égalité de ces aires implique l'égalité des aires.  
 Arc  $E_l B$  correspond à un état liquide à une pression inférieure à la pression de vaporisation.

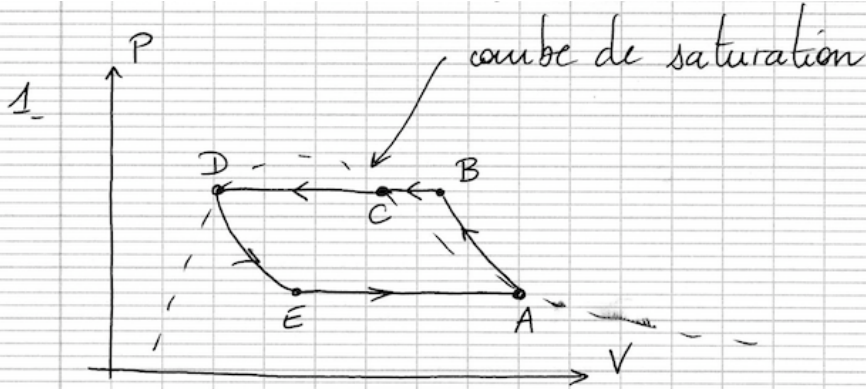
le liquide est dit surchauffé - cet état métastable est utilisé dans les chambres à bulles.

L'ac c<sub>év</sub> correspond à des états où la vapeur est sous une pression supérieure à la pression de liquéfaction : on dit qu'elle est sur saturée. Cet état métastable est utilisé dans les chambres à brouillard

**Corrigé exercice 26** Importance des différents termes

On évalue numériquement les différents termes du premier principe des systèmes ouverts :

$\Delta h = c_p \Delta T \approx 2 \cdot 10^4 \text{ J.kg}^{-1}$ ,  $e_C = v^2/2 \approx 50 \text{ J.kg}^{-1}$  et  $\Delta e_C \approx 0$ ,  $\Delta e_p = g \Delta z \approx 10 \text{ J.kg}^{-1}$ . Conclusion : on peut parfaitement négliger les variations d'énergie cinétique et potentielle dans ce cas.



$$\text{TT avec la source chaude} = BC + CD$$

$$h_D - h_B = q_C = -1325 \text{ kJ/kg} < 0$$

$$\text{TT avec la source froide} = EA$$

$$h_A - h_E = h_A - h_D = q_F = 1137 \text{ kJ/kg} > 0$$

2. Travail utile fourni par le compresseur : AB

$$h_B - h_A = w_u = 188 \text{ kJ/mol} > 0$$

$$\eta = \frac{q_F}{w_u} = \frac{1137}{188} = 6,0$$

= avec 1 kW on peut extraire 6 kW de la source froide.

3. On a  $h_B - h_D = h_g(T_c) + c_p(T_B - T_c)$

$$\Rightarrow \boxed{h_g(T_c) = h_B - h_D - c_p(T_B - T_c)}$$

4. On a  $h_E = h_D = x_E h_{\text{vap}}(T_A) + (1 - x_E) h_{\text{liq}}(T_A)$

$$h_E = h_D = x_E \underbrace{(h_{\text{vap}}(T_A) - h_{\text{liq}}(T_A))}_{h_{\text{vap}}(T_A)} + h_{\text{liq}}(T_A)$$



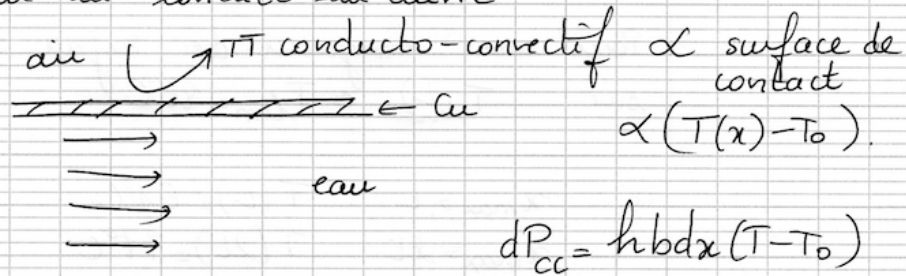
$$a \quad h_{\text{liq}}(T_A) = h_A - l_{\text{vap}}(T_A)$$

$$\text{d'au} \quad x_E = \frac{l_{\text{vap}}(T_A) - (h_A - h_0)}{l_{\text{vap}}(T_A)} = 1 - \frac{h_A - h_0}{l_{\text{vap}}(T_A)}$$

$$\text{A.N. : } \underline{x_E = 0,12}$$

$$5. \text{ On a } \mathcal{D}_m q_F = P_F \Rightarrow \mathcal{D}_m = \frac{P_F}{q_F} = 4,40 \text{ kg/h} = 1,22 \text{ g/s}$$

1. \* Pertes par conducto-convection avec l'air extérieur au contact du cuivre



\* Pertes par rayonnement

le tuyau à  $T(x)$  rayonne;  $\sigma b dx T(x)^4 = dP_{ray \text{ émis}}$   
 si il rayonne comme un corps noir  
 il reçoit égal<sup>t</sup> le ray<sup>t</sup> de corps noir de l'air à la température  $T_0 = dP_{ray \text{ reçu}} = \sigma b dx T_0^4$

$$dP_{ray} = \sigma b dx (T(x)^4 - T_0^4)$$

que l'on peut linéariser si  $|T(x) - T_0| \ll T_0$  (enK)

$$dP_{ray} = \sigma b dx T_0^3 \times 4(T(x) - T_0)$$

$$dP_{perdes} = \alpha b (T(x) - T_0) dx$$



Et pour l'eau liquide  $h = h(T)$   
d'où  $h(x+dx) - h(x) = c_p [T(x+dx) - T(x)]$

$$\rho_m c_p [T(x+dx) - T(x)] = Eb dx - \alpha b (T - T_0) dx$$

On pose  $\theta = T - T_0$

$$\rho_m c_p \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = Eb - \alpha b \theta$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{L} = \frac{Eb}{\rho_m c_p} \quad \text{où } L = \frac{\rho_m c_p}{\alpha b}}$$

$$3. \quad \theta(x) = \frac{EbL}{\rho_m c_p} + A \exp\left(-\frac{x}{L}\right) = \frac{E}{\alpha} + A \exp\left(-\frac{x}{L}\right)$$

$$\text{et } \theta(x=0) = T_1 - T_0 = \frac{E}{\alpha} + A$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{E}{\alpha} + \left(T_1 - T_0 - \frac{E}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{x}{L}\right)$$

$$\boxed{T(x) = T_0 + \frac{E}{\alpha} + \left(T_1 - T_0 - \frac{E}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{x}{L}\right)}$$

Il suffit d'avoir une longueur de l'ordre de quelques  $L$  pour atteindre la température maximale.

Sous une vitre on profite de l'effet de serre et on a alors  $T_0 > T_{\text{air exterieur}}$

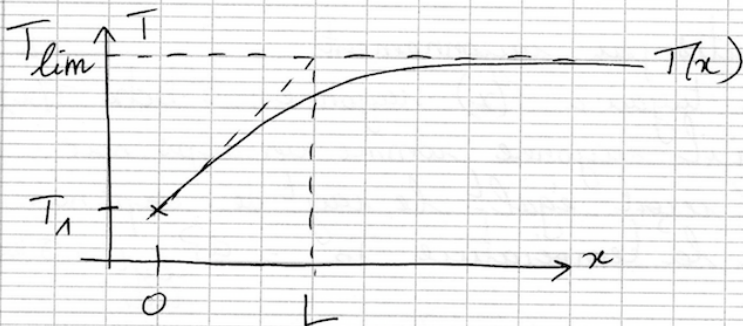


4. Si  $D_m \rightarrow 0$  alors en régime permanent on aura  $T = T_{lim} = T_0 + \frac{E}{\alpha}$  dans tout le tuyau

$$\Rightarrow \alpha = \frac{E}{T_{lim} - T_0} = 22 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \Rightarrow L = 66 \text{ m}$$

Pour une longueur de tuyau  $\Rightarrow L$  on aura bien sur  $T_{sortie} \approx T_{lim} = 86^\circ\text{C}$

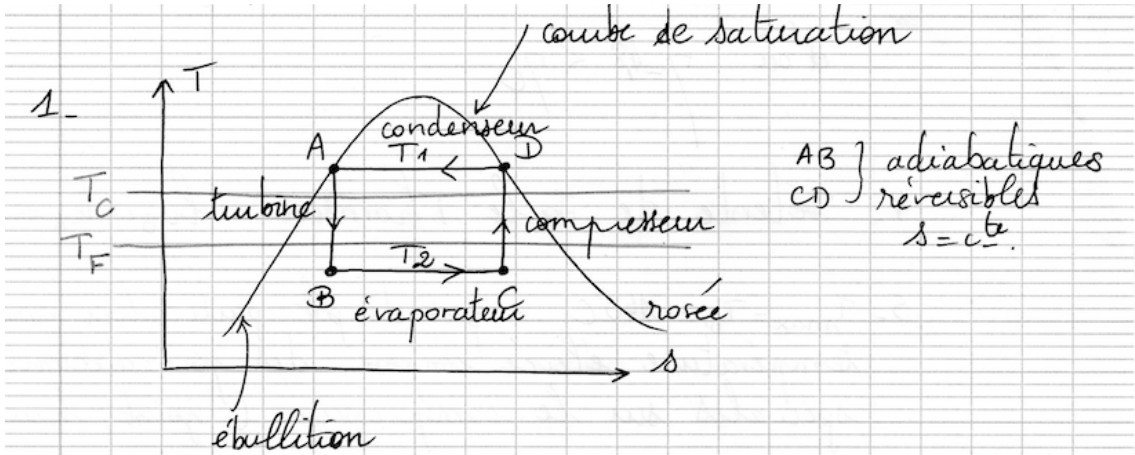
si  $x_{max} = L$   $T(L) = 61^\circ\text{C}$   
 $x_{max} = 2L$   $T(2L) = 77^\circ\text{C}$



5. Si on suppose que  $\alpha$  est inchangé dans ces nouvelles conditions, on aura  $T_{lim} = 34^\circ\text{C}$   
 $T(L) = 25^\circ\text{C}$

Le chauffe-eau solaire conserve un intérêt puisqu'il chauffe l'eau de  $8^\circ\text{C}$  à  $25^\circ\text{C}$ . Il faut lui adjoindre un dispositif de chauffage auxiliaire pour obtenir de l'eau chaude.





2. Si  $T_c = 30^\circ\text{C} < T_1 = 40^\circ\text{C}$  : les TT se font du fluide vers la source chaude :  $q_c < 0$   
 $T_F = -5^\circ\text{C} > T_2 = -20^\circ\text{C}$  : TT de la source froide vers le fluide :  $q_f > 0$   
 Les TT ne sont pas réversibles dans ces conditions et on n'a donc pas vraiment un cycle de Carnot : il faudrait que  $T_F = T_2$  et  $T_c = T_1$  pour que les TT puissent être réversibles.

3. On lit  $P_1 = 15 \text{ bar}$  ( $\frac{\ln P_1 - \ln 10}{0,8 \text{ cm}} = \frac{\ln 20 - \ln 10}{1,1 \text{ cm}}$ )  
 $P_2 = 1,9 \text{ bar}$

A → B détente adiabatique :  $h_B - h_A = w_{uT} < 0$   
 réversible :  $s_B - s_A = 0$

B → C évaporation  $h_C - h_B = q_2 > 0$   
 $s_C - s_B > \frac{q_2}{T_F}$

C → D compression adiabatique  $h_D - h_C = w_{uC} > 0$   
 réversible :  $s_D - s_C = 0$

$$D \rightarrow A \text{ condenseur} \quad \begin{aligned} h_A - h_D &= q_1 < 0 \\ s_A - s_D &> \frac{q_1}{T_C} \end{aligned}$$

sur le cycle, on a bien sûr

$$\begin{cases} h_B - h_A + h_C - h_B + h_D - h_C + h_A - h_D = 0 = \underbrace{w_{uT} + w_{uC}}_{w_u} + q_1 + q_2 \\ \text{et } s_B - s_A + s_C - s_B + s_D - s_C + s_A - s_D = 0 > \frac{q_2}{T_F} + \frac{q_1}{T_C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_u + q_1 + q_2 = 0 \\ \frac{q_1}{T_C} + \frac{q_2}{T_F} < 0 \end{cases}$$

$$\eta = \frac{q_2}{w_u} = \frac{q_2}{-q_1 - q_2} = \frac{-1}{1 + \frac{q_1}{q_2}}$$

$$\text{or } \frac{q_1}{T_C} + \frac{q_2}{T_F} < 0 \Rightarrow 1 + \frac{q_1}{q_2} < -\frac{T_C}{T_F} + 1 < 0$$

$$\text{d'où } 0 < \frac{-1}{1 + \frac{q_1}{q_2}} < \frac{-1}{1 - \frac{T_C}{T_F}} \quad \Delta T_F \text{ en K}$$

$$0 < \eta < \frac{T_F}{T_C - T_F} = \eta_C = 7,2$$

Si on prenait  $T_1 = T_C$  et  $T_2 = T_F$  on pourrait espérer 7,2 fois plus de chaleur que le travail que l'on doit fournir. Mais évidemment, les T.T. seraient infiniment lents et la puissance de ce frigo serait nulle!  
On peut lire sur le cycle:

$$\begin{aligned} w_{uC} &= (1480 - 1250) \text{ kJ/kg} = 230 \text{ kJ/kg} \\ -w_{uT} &= 380 - 340 = 40 \text{ kJ/mol} \\ w_u &= w_{uC} + w_{uT} = 190 \text{ kJ/mol} \end{aligned}$$



et  $q_2 = 1250 - 340 = 910 \text{ kJ/kg}$

d'où  $\gamma = 4,8 < 7$

4. Détente de Joule-Thomson  $h_{B'} - h_A = 0$

5.  $T_{\max} = T_{D'} = 140^\circ\text{C}$  = pas de pb particulier mais cette température élevée impose des précautions spéciales sur le compresseur (joint, huile...)

6. Sur la portion B'C' de l'évaporateur

$$\dot{Q}_m (h_{C'} - h_{B'}) = P_2 \Rightarrow \dot{Q}_m = \frac{P_2}{h_{C'} - h_{B'}}$$

A.N. : On lit  $h_{C'} = 1430 \text{ kJ/kg}$   
 $h_{B'} = h_A = 380 \text{ kJ/kg}$

$$\Rightarrow \dot{Q}_m = 0,95 \text{ g/s} = 3,4 \text{ kg/h}$$

$w_{u_c} = h_{D'} - h_{C'}$  - on lit  $h_{D'} = 1750 \text{ kJ/kg}$

$\dot{Q}_m (h_{D'} - h_{C'}) = P_{u_c} = \text{puissance effective reçue}$   
 $= 305 \text{ W}$  par le fluide

et  $P_{u_c} = \eta P_{elec} \Rightarrow P_{elec} = 340 \text{ W}$

débit volumique aspiré dans le compresseur =

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_m &= \rho_{C'} \dot{Q}_v \\ \text{on lit } \rho_{C'} &= 0,62 \text{ m}^3/\text{kg} \\ &= \frac{1}{\rho_{C'}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \dot{Q}_v &= 0,59 \text{ L.s}^{-1} \\ &= 2,1 \text{ m}^3/\text{h} \end{aligned}$$



Pour la partie condenseur, on a  
 $\dot{P}_{th1} = \dot{Q}_m (h_A - h_{D1}) < 0$

La puissance absorbée par la source chaude est  $-\dot{P}_{th1} = 1,3 \text{ kW}$  ( $= 1 \text{ kW} + 0,3 \text{ kW}$ )

↑  
 mesurée à  
 la source  
 froide

↖  
 fourni par  
 le moteur

efficacité:  $\eta = \frac{\dot{P}_{th2}}{P_{elec}} = \frac{10^3}{340} = 2,9 < 4,8 < \eta_c$

