Exercices : Ondes électromagnétiques

Exercice 1 Polarisation circulaire

1. Montrer qu'une onde plane progressive monochromatique (OPPM) de polarisation circulaire peut s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de polarisation rectiligne.
2. Montrer qu'une onde plane progressive monochromatique de polarisation rectiligne peut s'écrire comme la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de polarisation circulaire.
3. Calculer le vecteur de Poynting associé à une (OPPM) de polarisation circulaire.

Exercice 2 Polarisation rotatoire

Dans le matériau étudié ici, une OPPM polarisée avec une polarisation circulaire gauche se propage avec une vitesse de phase $v^+ = c/n^+$ tandis qu'une OPPM polarisée avec une polarisation circulaire droite se propage avec une vitesse de phase $v^- = c/n^-$. On envisage en $z = 0$ une onde polarisée rectilignement suivant l'axe Ox telle que en O,

$$E = E_0 cos(\omega t)\vec{u}_x$$

et se propageant dans le sens des z croissants. Décrire sa polarisation en $z = L$. On posera $n^+ = n_0 + \delta n$ et $n^- = n_0 - \delta n$. Quelle est la propriété ainsi décrite ?

Exercice 3 Portée d'un émetteur radio

Un émetteur radio, de puissance P émet à peu près uniformément dans un angle solide Ω. Cela signifie qu'à une distance r de l'émetteur, une surface $r^2\Omega$ est couverte.
Jusqu'à quelle distance un récepteur peut-il détecter le signal s'il n'est sensible qu'à des flux énergétiques supérieurs à I_0 ?
A.N. avec P= 10 W, $\Omega = \pi$ stéradians et I_0=5.10^{-9} W.m^{-2}.

Exercice 4 Réflexion oblique sur un dioptre, incidence de Brewster

On considère une onde électromagnétique plane monochromatique arrivant sous une incidence i_1 sur une dioptre plan d'équation $x = 0$ séparant un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2. Le champ électrique est polarisé dans le plan d'incidence, on note $\vec{k}_i$ son vecteur d'onde et $\vec{u}_i$ le vecteur unitaire dans la direction du champ électrique.

$$\vec{E}_i = E_0 \exp\Big(i(\omega t - \vec{k}_i.\vec{r})\Big)\vec{u}_i$$

Filtre antireflet . La réflexion sur un diélectrique (ici, l'eau) produit une polarisation perpendiculaire au plan d'incidence (totale à l'incidence de Brewster). Un filtre polarisant peut donc servir de filtre anti-reflet (c'est le principe des lunettes de glacier ou de pêcheur). L'image de gauche est prise sans polariseur, l'image de droite à travers un polariseur vertical.

1. Représenter sur un schéma le dioptre ainsi que $\vec{E}_i$ et $\vec{k}_i$.
2. Calculer le champ magnétique correspondant.
   On note r le coefficient de réflexion en amplitude et t le coefficient de transmission en amplitude, de sorte que l'onde réfléchie s'écrit :
   $$\vec{E}_r = rE_0 \exp\Big(i(\omega t - \vec{k}_r.\vec{r})\Big)\vec{u}_r$$
   et l'onde transmise :
   $$\vec{E}_t = tE_0 \exp\Big(i(\omega t - \vec{k}_t.\vec{r})\Big)\vec{u}_t$$
3. Calculer les champs magnétiques correspondants et représenter tous ces champs sur le schéma. En écrivant la condition aux limites en $x = 0$ pour la composante tangentielle de $\vec{E}$ et pour la composante tangentielle de $\vec{B}$ (on admet qu'elle sont continues toutes les deux) et en utilisant les lois de Descartes calculer les coefficients r et t.
4. En déduire l'angle d'incidence de Brewster pour lequel $r = 0$. L'onde réfléchie est alors totalement polarisée avec une polarisation perpendiculaire au plan d'incidence.

Exercice 5 Effet Messner dans un supraconducteur

Comme le conducteur normal, le supraconducteur est supposé, dans un modèle simpliste être constitué d'un réseau fixe dont certains atomes sont ionisés, ce qui conduit à un "fluide" d'électrons de conduction. Contrairement au cas du conducteur, il ne s'ajoute ici aux forces électromagnétiques aucune force de type "frottement fluide", ce fluide étant parfait (au sens non visqueux). Moyennant certaines approximations, on montre alors que le courant dans le supraconducteur suit l'équation de London :

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\vec{A}$$

où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur ($\vec{B} = r\vec{o}t\vec{A}$).

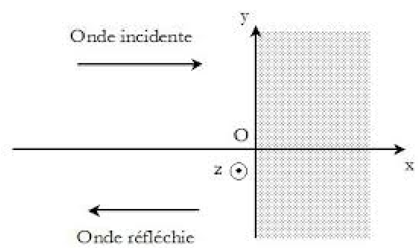
1. Quelle est l'unité de λ ?
2. En négligeant le courant de déplacement devant le courant de conduction, trouver l'équation différentielle satisfaite par $\vec{B}$ dans le supraconducteur. Un champ uniforme peut-il régner à l'intérieur d'un matériau supraconducteur ?
3. Un matériau supraconducteur occupe tout le demi-espace $x>0$. Le champ magnétique statique dans le vide extérieur n'a de composante tangentielle que suivant Oz ($B_y = 0$) sur le plan $x = 0$. Le module du champ sur la frontière est B_0 et les composantes de $\vec{B}$ dans le vide sont indépendantes de y et z. Le problème étant traité à l'échelle microscopique, le champ est pris continu à la frontière. Donner la solution détaillée de l'équation vérifiée par $\vec{B}$ dans le supraconducteur.
4. Proposer une interprétation de λ. Pour l'aluminium (supraconducteur en dessous de 0,01K), $\lambda = 1{,}6.10^{-8}$ m. Calculer le rapport $B(x)/B_0$ pour $x = 0{,}1$ μm. Conclusion.
5. Déduire du champ magnétique, la densité de courant à l'intérieur du supraconducteur et montrer qu'il s'exerce une force magnétique par unité de surface à caractériser par sa direction et la pression correspondante. Ce résultat dépend-il de la forme explicite de $B(x)$? Exprimer la pression en fonction de la densité de courant surfacique.

Exercice 6 Réflexion d'une onde sur un métal parfait, pression de radiation

Une OPPM de polarisation rectiligne se propage dans le vide dans la direction (Ox) dans le sens des x croissants :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \vec{e}_y \exp j(\omega t - kx)$$

où on supposera E_0 réel et positif. En $x = 0$, elle arrive sur la surface plane d'un miroir métallique parfaitement conducteur (on admet que dans un tel conducteur, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont nuls) et donne naissance à une onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants :



$$\underline{\vec{E}}_r = E_0 r \vec{e}_y \exp j(\omega t + kx)$$

1. Déterminer le champ électromagnétique résultant de l'onde incidente et de l'onde réfléchie dans le demi-espace $x < 0$. Caractériser brièvement l'onde résultante. Calculer la valeur moyenne de son vecteur de Poynting.

   Le champ électromagnétique exerce sur une surface dS du miroir une force $d\vec{F}$ dont l'expression est, en notation réelle :
$$d\vec{F} = \frac{1}{2}(\sigma \vec{E} + \vec{j}_S \wedge \vec{B}) dS$$
   Proposer une explication de la présence du facteur 1/2 .
2. En déduire que l'onde exerce une pression P sur le miroir dont on calculera la valeur moyenne $< P >$ en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie $< u_i >$ de l'onde incidente puis en fonction de la densité volumique moyenne d'énergie totale $< u_{totale} >$ au voisinage immédiat du plan. P est appelée pression de radiation.
3. Retrouver ce résultat en faisant un raisonnement en terme de photon. On rappelle qu'un photon de fréquence ν a une énergie $h\nu$ et une quantité de mouvement $h\nu/c$.
4. Calculer $< P >$ pour une onde incidente fournie par un laser de puissance moyenne 3mW dont la section droite est de 0,4 mm^2.
5. La Terre se situe à la distance d= $1{,}5.10^{11}$ m du Soleil, définissant ainsi l'unité astronomique (1UA= $1{,}5.10^{11}$ m). La puissance surfacique moyenne du rayonnement solaire reçu au niveau de la Terre (en

haut de l'atmosphère) est donnée par la constante solaire A_0=1,36.10^3 W.m^{-2}. Evaluer la pression de radiation ressentie au niveau de la Terre. Commenter.

Exercice 7 Réflexion oblique d'une OPPM

A. Le champ électrique est parallèle au plan du conducteur

Une onde électromagnétique, plane, progressive, de pulsation ω se propage dans le vide. Le champ électrique relativement à un repère orthonormé (0, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$) s'écrit

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k\cos\alpha x - k\sin\alpha y)\vec{u}_z$$

1. (a) Quel est le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde ? L'exprimer en fonction de ω, c et $\vec{u}$ vecteur unitaire dans le sens de la propagation de l'onde.
   (b) Calculer le champ magnétique $\vec{B}_i$ associé à $\vec{E}_i$ (en notant $\vec{u}'$ le vecteur tel que $\vec{u}' = \vec{u} \wedge \vec{u}_z$). Représenter sur un schéma les trois vecteurs $\vec{k}$, $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.
   (c) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $< \vec{R} >$. Quelle est l'intensité I de l'onde, définie comme la puissance surfacique moyenne à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation ?

   L'onde se propage dans la région des x négatifs. En $x = 0$ est placé un miroir métallique parfait (M) (c'est-à-dire de conductivité quasi-infinie). $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ sont les champs réfléchis. L'onde se réfléchit suivant les lois de Descartes.
2. Quelles sont les relations vérifiées par les champs dans le plan $x = 0$?Déterminer et représenter sur un même schéma les vecteurs $\vec{k}_r$, $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ ainsi que $\vec{k}$, $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.
3. Déterminer la densité superficielle de charge $\sigma(y,t)$ et de courant $\vec{j}_s(y,t)$ dans le plan $x = 0$.
4. On considère un élément dS de la surface du miroir.
   (a) Calculer les forces électrique $d\vec{f}_e$ et magnétique $d\vec{f}_m$ agissant sur dS. Quel est leur sens ?
   (b) Donner la pression électromagnétique P_{em} puis sa moyenne temporelle $< P_{em} >$.

B. Le champ magnétique est parallèle au plan du conducteur

L'onde incidente est déterminée cette fois par son champ magnétique

$$\vec{B}'_i = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - k\cos\alpha x - k\sin\alpha y)\vec{u}_z$$

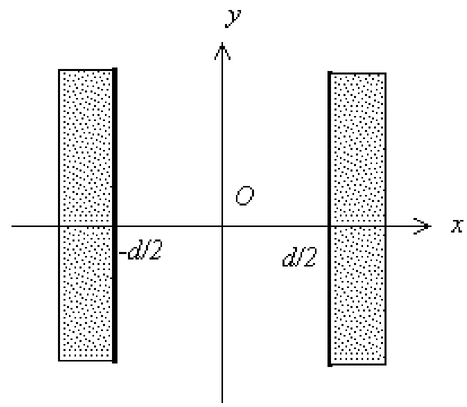
1. Déterminer le champ $\vec{E}'_i$ associé.
2. En déduire les champs $\vec{E}'_r$ et $\vec{B}'_r$ de l'onde réfléchie par le même miroir qu'en A et représenter sur un même schéma l'ensemble des vecteurs.
3. Déterminer la densité superficielle de charge $\sigma'(y,t)$ et de courant $\vec{j}'_s(y,t)$ dans le plan $x = 0$.
4. En déduire les expressions des forces électrique $d\vec{f}'_e$ et magnétique $d\vec{f}'_m$ agissant sur un élément dS du miroir. Quel est leur sens ? La pression électromagnétique P'_{em} diffère-t-elle de P_{em} obtenue en A4.b) ? Indiquer brièvement ce qui se passe dans les deux cas si $\alpha = \pi/2$.

C. Interprétation corpusculaire

1. Rappeler les expressions de l'énergie $\mathcal{E}$ et de la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un photon associé à une onde de pulsation ω se propageant dans la direction $\vec{u}$. L'appliquer aux ondes ($\vec{E}_i$, $\vec{B}_i$) et ($\vec{E}'_i$, $\vec{B}'_i$) des questions A et B. Conclusion.
2. Quelle est la quantité de mouvement $d\vec{p}$ transférée au miroir par un photon qui subit, avec l'incidence α, un choc élastique sur le miroir fixe.

3. Quel est le nombre de photons d^2N qui pendant l'intervalle de temps dt se réfléchissent avec l'incidence α sur une surface dS du miroir sachant que la puissance surfacique incidente ou intensité est I.
4. En déduire la pression électromagnétique moyenne définie de façon corpusculaire.

Exercice 8 Propagation entre deux plans conducteurs



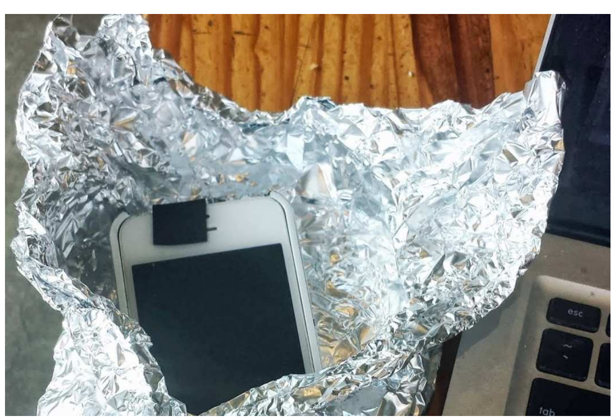
On s'intéresse à la propagation entre deux plans conducteurs parfaits parallèles d'équation $x = d/2$ et $x = -d/2$. On cherche une solution des équations de propagation dont le champ magnétique est sous la forme :

$$\vec{B} = f(x)\exp i(\omega t - kz)\vec{u}_y$$

1. Montrer que la compatibilité de cette solution avec les équations de Maxwell et les conditions aux limites imposent une quantification et une relation de dispersion à déterminer.
2. Tracer les graphes donnant ω en fonction de k, la vitesse de groupe et la vitesse de phase en fonction de ω.
3. En considérant le flux moyen d'énergie transporté par l'onde dans sa direction de propagation, définir et calculer la vitesse de propagation de l'énergie associée.
4. Les modes étudiés ici sont dits transverses magnétiques (modes TM) : le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation. Parmi ceux-ci, est-il possible de trouver une solution correspondant à un mode transverse électrique et magnétique (mode TEM). Caractériser la propagation d'une telle onde dans le guide constitué par les deux plans conducteurs.

Exercice 9 Téléphone dans une feuille de papier d'aluminium

On propose dans ce problème de répondre à la question suivante : est-il possible de bloquer les ondes d'un téléphone portable à l'aide d'une simple feuille de papier d'aluminium ?



Le conducteur métallique occupe le demi-espace $z > 0$. On considère une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω arrivant depuis l'air en incidence normale sur le métal, son champ électrique étant , en notation complexe :

$$\vec{\underline{E}}_i(z,t) = E_0 \exp i(\omega t - k_0 z)\vec{e}_x$$

1. Que vaut k_0 ? Comment s'écrit le champ magnétique associé ?
   L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie dans l'air et à une onde transmise dans le métal, dont les champs électriques en notations complexe ont pour expressions respectives :

$$\underline{\vec{E}}_r(z,t) = \underline{r}E_0 \exp i(\omega t + k_0 z)\vec{e}_x$$

$$\underline{\vec{E}}_t(z,t) = \underline{t}E_0 \exp i(\omega t - \underline{k}z)\vec{e}_x$$

2. On rappele la relation de dispersion dans le métal : $k^2 = -j\omega\mu_0\gamma_0$. En déduire $\underline{k}$. On l'exprimera en fonction de $\delta = \sqrt{2/(\mu_0\gamma_0\omega)}$.
   On admet que les champs électriques et magnétiques sont continus à la traversée de l'interface air-métal.
3. Déterminer les coefficients de réflexion $\underline{r}$ et de transmission $\underline{t}$.
4. Définir puis exprimer le coefficient de réflexion en puissance R en fonction des seuls paramètres ω, c et δ. On rappelle que la valeur moyenne du vecteur de Poynting peut s'obtenir simplement à partir des amplitudes complexes des champs :

$$< \vec{\Pi} >= \frac{1}{2\mu_0}\mathcal{R}e(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*)$$

5. Utiliser la conservation de l'énergie électromagnétique à proximité immédiate de l'interface air-métal pour en déduire très simplement le coefficient de transmission en puissance T.
6. Que se passe-t-il dans le cas limite où δ tend vers zéro ? Indiquer le déphasage subi par l'onde lors de la réflexion sur le métal.
7. Un rouleau de papier aluminium de 30 m vendu dans le commerce fait un rayon intérieur de 2,0 cm et un rayon extérieur de 2,5 cm. En France la téléphonie mobile 4G utilise des bandes de fréquence situées aux alentours de 0,8 GHz, 1,8 GHz et 2,6 GHz. A partir de ces données, répondre à la question soulevée en début d'énoncé en estimant la fraction des ondes qui peuvent traverser une feuille d'aluminium. On donne la conductivité de l'aluminium γ_0 =3,8.10^7 S.m^{-1}.

Exercice 10 Dispersion dans le plasma interstellaire

Le plasma interstellaire est constitué par des électrons (charge e, masse m) en nombre n par unité de volume et par des ions positifs (charge + e masse M) supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes planes progressives monochromatiques :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - kz))$$

et

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 \exp(i(\omega t - kz))$$

1. Montrer à partir des équations de Maxwell que de telles solutions supposent que la densité de courant $\underline{\vec{j}}$ soit elle-même une OPPM du type :

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\vec{j}}_0 \exp(i(\omega t - kz))$$

   Exprimer $\underline{\vec{j}}_0$ en fonction de $\underline{\vec{E}}_0$, $\underline{\vec{B}}_0$, $\vec{k}$ et ω .
2. Quelle hypothèse permet d'en déduire que $\underline{\vec{j}}_0$ est orthogonal à $\vec{k}$?
3. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction du champ électrique, de ω et de $\vec{k}$. Quelle est la structure de cette onde ?

4. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{E}$ sont colinéaires et déterminer la conductivité $\underline{\gamma}$ du plasma.
5. Ecrire l'équation du mouvement de l'électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable. En déduire une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$. Commentaire.
6. Donner la relation de dispersion en introduisant la constante $K = \sqrt{\mu_0 n e^2/m}$.
7. Calculer en fonction de k et K les vitesses de phase et de groupe des ondes électromagnétiques dans le plasma. Quelle relation vérifient-elles ?
8. Deux trains d'onde de longueurs d'onde respectives λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L. En supposant $K^2\lambda_1^2 \ll 1$ et $K^2\lambda_2^2 \ll 1$, montrer que le terme principal dans la différence $dt = t_2 - t_1$ des temps de réception des deux trains d'onde est donné par :

$$\delta t = \frac{LK^2}{8\pi^2 c}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

9. Des mesures de dispersion à partir des signaux émis par le pulsar du crabe conduisent à une limite supérieure égale à $2{,}8.10^4 \mathrm{m}^{-3}$ pour la densité volumique d'électrons n dans le plasma interstellaire. Quelle serait dans ces conditions la limite supérieure dt pour des longueurs d'onde $\lambda_1 = 0{,}4\ \mu$m et $\lambda_2 = 0{,}8\ \mu$m de signaux émis par une étoiles située à $L = 10^3$ années lumière ?

Exercice 11 Influence de l'ionosphère sur les transmissions GPS

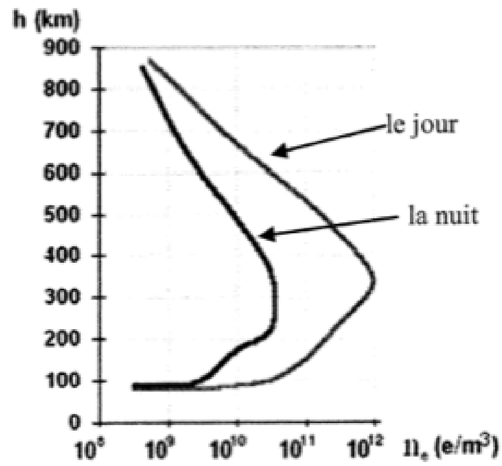
On désire étudier l'influence de l'ionosphère sur les ondes électromagnétiques utilisées pour la localisation par satellite (GPS) et les moyens de s'en affranchir.

1. A la lecture des documents et en utilisant vos connaissances sur la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma, expliquer qualitativement le problème que pose la traversée de l'ionosphère par des signaux GPS.
2. On note n le nombre d'électrons par unité de volume, on néglige le déplacement des ions. Justifier ce dernier point. Rappeler la relation de dispersion (cf exercice précédent)
3. Calculer le fréquence de coupure typique de l'ionosphère en plein jour et en pleine nuit. Expliquer pourquoi la transmission radio en AM (vers 100 kHz) ne nécessite qu'un émetteur national alors que la transmission en FM (émission autour de 100 MHz) nécessite des antennes régionales.
4. Calculer le retard des signaux du à la traversée d'une longueur L de l'ionosphère (comparé à la propagation dans le vide) en fonction de la fréquence.
5. Estimer la longueur L de l'ionosphère que doivent traverser les ondes provenant d'un satellite situé à l'horizon. On rappelle que le rayon de la Terre vaut environ 6400km.
6. Estimer dans le cas le plus défavorable l'erreur induite par la traversée de l'ionosphère sur l'estimation de la distance entre le satellite et l'appareil GPS. Est-ce une erreur systématique qui peut-être enlevée de façon automatisée ?
7. Expliquer en quoi l'utilisation simultanée de deux bandes L1 et L2 permet de résoudre ce problème.

   Afin de mieux prendre en compte l'effet de l'ionosphère sur les ondes radio, le projet SPECTRE, développé par le ministère français de la recherche, l'Agence Spatiale Européenne et le Centre National d'Etudes Spatiales, mis en service depuis 2004, propose une cartographie en temps réel du TEC (Total Electron Content) au dessus de l'Europe. Le TEC est par définition le nombre total d'électrons libres présents dans une colonne verticale d'ionosphère de 1 m^2 de section.

DOCUMENT n°1 : l'ionosphère

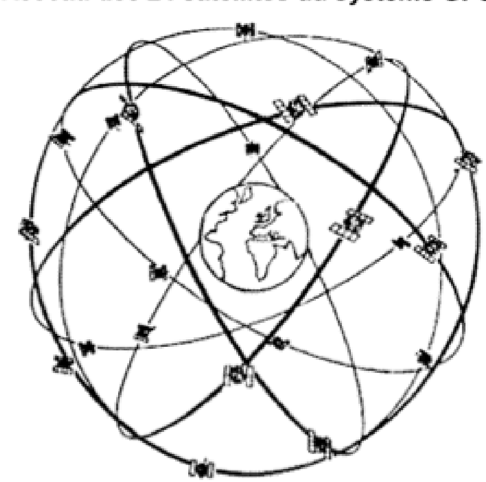
L'ionosphère forme la partie haute de l'atmosphère. Elle se situe entre 100 km et 1000 km d'altitude environ. Sous l'effet du rayonnement solaire, l'ionosphère forme ce que l'on appelle un « plasma », c'est-à-dire qu'elle est partiellement ionisée (d'où son nom). La densité volumique des électrons libres de se déplacer au sein de l'ionosphère fluctue énormément, et cela suivant de nombreux facteurs, comme par exemple la position du soleil dans le ciel, l'activité solaire ou encore la température. Sur le graphe ci-contre est représentée la densité typique d'électrons libres en fonction de l'altitude en plein jour et en pleine nuit.



DOCUMENT n°2 : le système de localisation GPS

La localisation par GPS (*global positioning system*) a été développée par l'armée américaine au début des années 70. Disponible depuis déjà de nombreuses années pour le domaine civil, elle s'appuie sur la présence de 24 satellites en orbite autour de la Terre à environ 20 000 km d'altitude. La localisation de l'appareil GPS est déduite de la mesure des temps de trajet d'ondes électromagnétiques émises par quatre satellites et reçues par l'appareil. Il faut bien au minimum quatre mesures pour déterminer d'une part les trois coordonnées de l'appareil GPS que sont sa latitude, sa longitude et son altitude et d'autre part pour synchroniser l'horloge de l'appareil qui est beaucoup moins précise que les horloges atomiques contenues dans les différents satellites.

Réseau des 24 satellites du système GPS



Les transmissions GPS s'effectuent par modulation de phase numérique sur deux bandes de fréquence :
- la bande L1 de fréquence centrale f_1 = 1575,42 MHz
- la bande L2 de fréquence centrale f_2 = 1227,60 MHz.

8. En prenant en compte la dépendance de n suivant l'altitude, adapter la formule de la question 4 et montrer que dans le cas où le satellite est à la verticale de l'appareil GPS, le retard ionosphérique dépend directement du TEC.

Exercice 12 Onde longitudinale dans un plasma

On étudie la propagation dans un plasma d'une onde électromagnétique plane se propageant dans la direction $\overrightarrow{u}_x$ à la pulsation de plasma ω_P.

1. On rappelle la relation entre j et E dans un plasma :

$$\overrightarrow{j} = \frac{ne^2}{im\omega}\overrightarrow{E}$$

Ecrire l'équation de conservation de la charge en régime sinusoïdal forcé et en déduire que à $\omega = \omega_P$ la densité de charge peut ne pas être nulle.

2. Ecrire les équations de Maxwell dans le plasma. A l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère et de celle de Maxwell-flux, montrer que le champ magnétique est nul.
3. En déduire que $\overrightarrow{E}$ est longitudinal.

Exercice 13 Propagation dans l'ionosphère, influence du champ magnétique terrestre

Un plasma est plongé dans un champ magnétique statique $\overrightarrow{B}_0$; une onde électromagnétique plane de polarisation rectiligne se propage dans ce plasma dans une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{B}_0$.

1. L'équation de dispersion du plasma est-elle modifiée lorsque le champ électrique a une polarisation parallèle (resp. perpendiculaire) à la direction du champ magnétique $\overrightarrow{B}_0$?

Dans le cas où cette théorie est modifiée, on montre que la relation de dispersion s'écrit alors :

$$k^2c^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_P^2)^2 - \omega_C^2\omega^2}{\omega^2 - \omega_P^2 - \omega_C^2}$$

où $\omega_C = \frac{eB_0}{m}$ est la pulsation cyclotron et ω_P la pulsation de plasma.

2. Tracer l'allure de la fonction $k^2c^2 = f(\omega^2)$. En déduire pour quelles pulsations des ondes peuvent réellement se propager dans le milieu.
3. On envoie verticalement selon (Ox) une onde sur l'ionosphère dont la densité électronique n est supposée uniforme. Lorsque l'émission de l'onde est telle que la direction du champ électrique est parallèle à celle du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B}_0$, il y a écho (réflexion) pour une longueur d'onde supérieure à λ_0=42,70 m. Lorsque les directions du champ électrique et du champ magnétique terrestre sont perpendiculaires, l'écho se produit pour une longueur d'onde supérieure à λ_0'=38,90m.

Déduire de ces mesures le nombre n d'électrons par unité de volume du plasma ainsi que la valeur du champ magnétique B_0 qui y règne.

Le champ magnétique terrsetre décroît en fonction de l'altitude suivant la loi :

$$B_0(x) = B_0(0)\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

Justifier cette loi. Au sol $B_0(0)$=47000nT et R=6360 km. Calculer l'altitude de la couche réfléchissante. Quel peut être l'intérêt de cette propriété ?

Exercice 14 Propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu isolant dilué

On se propose d'étudier le modèle simplifié suivant de propagation d'une onde dans un milieu neutre dilué. On note n_0 le nombre d'électrons par unité de volume et on suppose que seul le mouvement des électrons est à prendre en compte. Sous l'action du champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u}_x$ d'une onde électromagnétique, les électrons ont un mouvement qui lui est colinéaire et que l'on peut caractériser par l'équation différentielle :

$$m_e \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt} - eE$$

où x est le déplacement de l'électron, k et f des constantes du modèle. On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}; \quad \tau = \frac{m_e}{f}; \quad \omega_P^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}$$

Une onde plane monochromatique de pulsation ω, de polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u}_x$, se propage selon z dans ce milieu ; son champ électrique s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0 \exp(i(\omega t - kz))\overrightarrow{u}_x$$

1. Comparer l'équation différentielle à celle du modèle du plasma vu en cours. Quels sont les termes supplémentaires ? A quelles propriétés physiques correspondent-ils ?
2. On cherche une solution sous la forme :

   $$\underline{x}(z,t) = \underline{x}_0 \exp(i(\omega t - kz))$$

   Exprimer $\underline{x}_0$. En déduire, en notation complexe la densité volumique de courant due au mouvement des électrons. Montrer que la densité volumique de charge est nulle.
3. A partir des équations de Maxwell, établir une équation aux dérivées partielles liant $\overrightarrow{E}$ et la densité volumique de courant.
4. En déduire la relation de dispersion du milieu. Quel phénomène traduit le fait que k est complexe ?
5. Dans cette question, on suppose que f=0 et que $\omega_0 \gg \omega$. L'indice du milieu pour la pulsation ω est défini par la relation $v_\phi = c/n$ où v_ϕ est la vitesse de phase.
   Montrer que le modèle permet de retrouver la loi de Cauchy :

   $$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

   où λ est la longueur d'onde dans le vide d'une onde de pulsation ω et A et B des constantes caractéristiques du milieu. Exprimer A et B en fonction de ω_0, ω_P et c.

Exercice 15 Vaporisation d'une cible par un laser

Dans une expérience de fusion nucléaire par confinement inertiel, une cible reçoit un rayon laser Mégajoule de longueur d'onde dans le vide λ=1μm ; en absorbant l'énergie de ce rayonnement, la cible se vaporise en un plasma de densité particulaire en électrons n. Expliquer pourquoi n ne peut pas dépasser une valeur maximale n_{max} que l'on calculera.

Exercice 16 Cavité électromagnétique

On étudie les ondes électromagnétiques pouvant exister dans un parallélépipède rectangle creux formé d'un

métal que l'on considérera comme parfait. L'étude de l'équilibre de ce rayonnement avec les parois de la cavité permet ensuite de retrouver la loi de Planck du rayonnement d'équilibre thermique.
On considère l'espace vide entre les parois de conducteur parfait situées en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ et $z = d$. On recherche les modes possibles du champ électromagnétique dans cette cavité.

1. Retrouver, à l'aide des équations de Maxwell, l'équation que doit satisfaire le champ électrique dans le vide ainsi que celle vérifiée par le champ magnétique.
2. Retrouver de même à partir des équations de Maxwell les conditions aux limites que doivent satisfaire les champs au voisinage du conducteur parfait.

   On cherche une solution à ces équations sous la forme :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} = \ & E_1(x,y,z)\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_x \\ & E_2(x,y,z)\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_y \\ & E_3(x,y,z)\cos(\omega t)\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

3. Trouver à l'aide d'une équation de Maxwell une relation entre les fonctions E_1, E_2 et E_3.
4. Quelle équation est satisfaite par chacune de ces trois fonctions ?
5. En cherchant une solution à variables séparables sous la forme $E_i(x,y,z) = f_i(x)g_i(y)h_i(z)$ montrer que :

$$E_1(x,y,z) = f_1(x)\sin\left(\frac{m_1\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n_1\pi}{d}z\right)$$

   avec n_1 et m_1 des entiers naturels.
   Donner de même les expressions de E_2 et de E_3.
6. En reprenant le résultat du 3. justifier qu'on a :

$$f_1(x) = E_{0x}\cos\left(\frac{l\pi}{a}\right)$$

7. En déduire finalement qu'on a :

$$\begin{aligned}E_1(x,y,z) &= E_{0x}\cos\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{d}z\right) \\ E_2(x,y,z) &= E_{0y}\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{d}z\right) \\ E_3(x,y,z) &= E_{0z}\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{n\pi}{d}z\right)\end{aligned}$$

8. Quelles sont les fréquences ν possibles des modes dans cette cavité ? Pour la suite on pourra admettre que

$$\nu = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2}}$$

9. On note

$$\overrightarrow{k} = \frac{l\pi}{a}\overrightarrow{u}_x + \frac{m\pi}{b}\overrightarrow{u}_y + \frac{n\pi}{d}\overrightarrow{u}_z$$

   Montrer que pour chaque (n,l,m) on a deux modes orthogonaux possibles.

10. Pour des longueurs d'onde très petites devant les dimensions de la cavité, de très nombreux modes ont des fréquences très voisines. On définit alors la densité de modes $N(\nu)$ de telle sorte que le nombre de modes de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ est :

$$dN = N(\nu)d\nu$$

Montrer que

$$N(\nu) = V\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

où V est le volume de la cavité.

11. Montrer que ces modes sont orthogonaux, c'est à dire que pour deux modes 1 et 2 différents on a :

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^d \overrightarrow{E}_1.\overrightarrow{E}_2 dxdydz = 0$$

Chacun de ces modes est un degré de liberté du champ électromagnétique de la cavité. On supposera que le champ peut être en équilibre thermodynamique avec un thermostat de température T (les parois de la cavité) et que l'on peut alors lui appliquer le principe d'équipartition de l'énergie. On attribue l'énergie k_BT à chaque mode ($\frac{1}{2}k_BT$ pour la composante électrique de l'énergie électromagnétique et $\frac{1}{2}k_BT$ pour la composante magnétique).

12. Calculer dans cette hypothèse la densité spectrale d'énergie électromagnétique contenue dans la cavité $U(\nu, T)$. La densité spectrale d'énergie est définie de telle sorte que l'énergie du champ contenue dans les modes de fréquence comprise entre ν et $\nu + d\nu$ soit $U(\nu, T)d\nu$.

13. En déduire que dans cette approche classique la densité spectrale d'énergie électromagnétique diverge à haute fréquence. Comment a-t-on nommé historiquement ce problème ?

Exercice 17 Approche statistique

On sait en fait que le champ électromagnétique doit être considéré comme constitué de photons. Plus précisément nous allons admettre que le champ électromagnétique qui règne dans la cavité est déterminé par le nombre de photons de chacun des modes et que si un mode de fréquence ν contient p photons, l'énergie contenue dans ce mode sera $ph\nu$ où h est la constante de Planck.

14. On admet que la probabilité de trouver p photons dans un mode de fréquence ν est proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp\left(-\frac{ph\nu}{k_BT}\right)$. Calculer cette probabilité et en déduire que l'énergie moyenne du mode de fréquence ν est donnée par :

$$< \mathcal{E}(\nu) >= \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_BT}\right) - 1}$$

On pourra utiliser la fonction dite fonction de partition

$$Z(\beta) = \sum_{p=0}^{\infty} \exp(-p\beta h\nu)$$

15. Calculer la densité spectrale d'énergie $U(\nu, T)$. On définit la densité spectrale volumique d'énergie électromagnétique par $u_\nu(\nu, T) = U(\nu, T)/V$.
Comment s'appelle la loi ainsi obtenue ?

16. On définit la densité volumique d'énegie électromagnétique par $u(T) = \int_0^\infty u_\nu(\nu, T) d\nu$. Pourquoi est-ce raisonnable ? Calculer cette densité d'énegie électromagnétique.
    On donne :
$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Exercice 18 Cavité réelle, coefficient de qualité Q

On délimite une cavité avec deux plans métalliques parallèles coincidant avec les plans z=0 et z=L. On prend pour expression du champ magnétique dans la cavité :

$$\overrightarrow{B}_{cavit\acute{e}} = B_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \overrightarrow{u}_y$$

avec $\omega = \frac{\pi c}{L}$.

Dans le demi-espace $x > L$ occupé par le métal de conductivité γ :

$$\overrightarrow{B}_{m\acute{e}tal} = -B_0 \cos\left(\omega t - \frac{z - L}{\delta}\right) \exp\left(-\frac{z - L}{\delta}\right) \overrightarrow{u}_y$$

avec

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$$

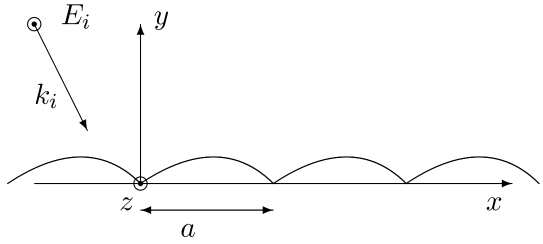
1. On donne : L = 3 cm, γ=$2.10^7 \Omega^{-1}.m^{-1}$, ϵ_0=8,85.10^{-12}F.m^{-1}. Calculer la fréquence et vérifier que dans le métal le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction. Comparer aussi δ et L.
2. Exprimer l'énergie électromagnétique moyenne $< U_{em} >$ contenue dans la cavité en fonction de B_0, L et S la surface des conducteurs en regard.
3. Exprimer la puissance volumique moyenne dissipée par effet Joule dans le conducteur en un point d'abscisse $z > L$ en fonction de B_0, γ, δ et z. En déduire la puissance moyenne $< P_{Joule} >$ dissipée par effet Joule dans tout le volume du conducteur $z > L$, en fonction de B_0, γ, δ et S.
4. On définit le facteur de qualité Q de la cavité par :
$$Q = 2\pi \frac{\textit{énergie emmagasinée}}{\textit{énergie dissipée en une période}}$$
   Exprimer le facteur de qualité de la cavité en fonction de L et δ puis en fonction de γ et de la longueur d'onde λ associée à la fréquence propre de la cavité.

Exercice 19 Réflexion sur une surface périodique

On considère une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement $\overrightarrow{E}_i = E_0 exp(j(\omega t - \overrightarrow{k}_i.\overrightarrow{r}))\overrightarrow{u}_z$ avec E_0 une constante réelle. Elle tombe sur la surface d'un conducteur parfait définie par son équation $y = f(x)$, f étant une fonction périodique de période a. On cherche l'onde réfléchie sous la forme : $\overrightarrow{E}_r = E_r(x, y, z) exp(j\omega t)\overrightarrow{u}_z$

1. Montrer que $E_r(x, y, z)$ est indépendant de z.
2. On cherche $E_r(x, y)$ sous la forme $E_r(x, y) = E_r exp(-j(\alpha x + \beta y))$. Montrer que α ne peut prendre que certaines valeurs quantifiées par un entier p. On pourra pour cela écrire une relation de passage en x et en $x + a$.
3. Quelle est la direction de l'onde réfléchie ? Commenter.

4. Quelle est la valeur de β_p associée à α_p ?
5. Expliciter $E_r(x, y)$ sous sa forme la plus générale.



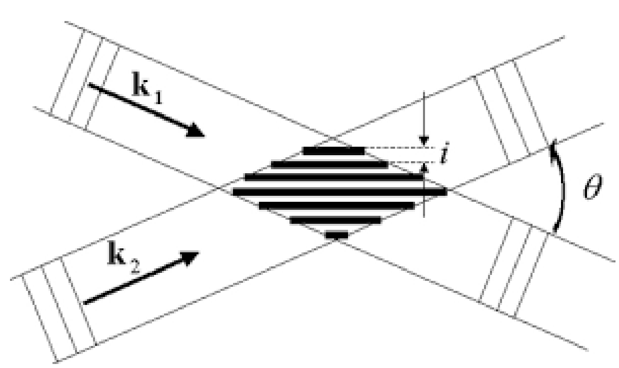
Exercice 20 Effet de peau, bilan énergétique

On admet ici que le champ électrique dans un milieu conducteur ohmique occupant le demi-espace $z > 0$ peut s'écrire en régime harmonique sous la forme :

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \exp(-z/\delta)\cos(\omega t - z/\delta)\vec{u}_x$$

1. Donner alors l'expression de la densité de courant $\vec{j}$. Calculer $\vec{B}$ en tout point du métal.
2. Calculer le vecteur de Poynting et la puissance moyenne qui traverse une surface S orientée selon les z croissants.
3. Calculer la puissance volumique moyenne cédée par le champ électromagnétique au métal (c'est à dire la puissance volumique dissipée par effet Joule). Faire un bilan énergétique entre z et $z + dz$.
4. On considère que l'épaisseur de peau δ est faible. Au delà de quelques δ le courant volumique, le champ électrique et le champ magnétique sont nuls. Dans le modèle du conducteur parfait δ =0 et on assimile alors les courants volumiques à un courant surfacique $\vec{j}_s$. Calculer $\vec{j}_s$.

Exercice 21 Superposition d'ondes planes



Deux ondes planes progressives monochromatiques de pulsation ω se propagent dans le vide. Leurs champs électriques, de même amplitudes, sont polarisés dans la direction (Oz) et leurs vecteurs d'onde $\vec{k}_1$et $\vec{k}_2$ ont

des directions symétriques par rapport à l'axe Ox.
L'angle entre les directions des vecteurs d'onde est noté θ. Les ondes sont en phase au point O.

1. Déterminer le champ électrique de l'onde résultante. Montrer qu'il s'agit d'une onde progressive. Donner son vecteur d'onde. Est-ce une onde plane ?
2. Exprimer les champs magnétiques de chacune des deux OPPM. En déduire le champ magnétique résultant.
3. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique w en tout point et sa valeur moyenne au cours du temps. Calculer de même le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

Exercice 22 Portée d'un talkie walkie

On peut lire sur une notice de talkie-walkie les informations suivantes :

SPECIFICATIONS :

Le talkie walkie dispose de 8 différents canaux.
Puissance maximale : 0,5 W en transmission (ERP : Effective Radiative Power)
Portée : jusqu'à 5km sans obstacle ni interférences
Portée effective :
La portée dépend des conditions extérieures, elle ne peut naturellement être garantie précisément. Ce n'est qu'une valeur indicative.
En conditions extérieures dégagées et sans obstacles (plaines et champs) : 5km
En intérieur ou en ville : 500m

Table 1 – Table des fréquences (Channel Frequency Table) :

Channel	Frequency (MHz)	Channel	Frequency
1	446,00625	5	446,05625
2	446,01875	6	446,06875
3	446,03125	7	446,08125
4	446,04375	8	446,09375

1. Sachant qu'un talkie walkie fonctionne avec trois piles LR03, estimer son autonomie maximale en fonctionnement en utilisant des piles rechargeables (de tension 1,2 V) de 800 mA.h. Quels sont les principes de l'émission de signaux par modulation de fréquence ?

   On rappelle la règle de Carlson : le spectre d'un signal modulé en fréquence a une largeur de l'ordre de $\Delta f + 2f_m$, où Δf désigne la largeur de l'intervalle de fréquence prise par la valeur instantanée du signal modulé et f_m la fréquence maximale du signal modulant.

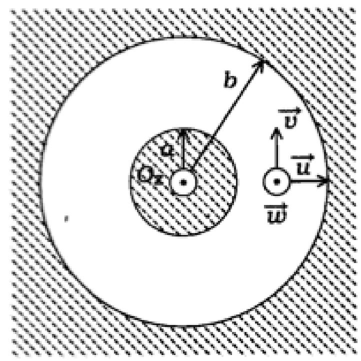
2. Indiquer en le justifiant l'inégalité que doit vérifier l'écart fréquentiel entre les canaux et la largeur spectrale de la voix. Est-ce vérifié dans le cas présent ?
3. D'après les données fournies, dans ce document et en supposant que le talkie walkie émet de façon isotrope, estimer la valeur de l'amplitude minimale du champ électrique d'un signal détectable par un talkie walkie.

Exercice 23 câble coaxial

Un câble coaxial de longueur infinie (rayon intérieur a et rayon extérieur b) est parcouru (dans l'espace entre ses deux armatures parfaitement conductrices) par une onde électromagnétique dont le champ électrique, en notation complexe et en coordonnées cylindriques est de la forme :

$$\vec{E} = E(r)\exp(i(\omega t - kz))\vec{u}$$

Calculer $E(r)$. On notera $E_1 = E(r = a^+)$.
Déterminer le champ $\vec{B}_0(r)$.
A quelle vitesse l'onde se propage-t-elle ?



Exercice 24 cavité microondes

Un four à microondes est une cavité parallélépipédique de dimensions a selon x, b selon y et c selon z, avec $a > b > c$ est taillée dans un métal supposé parfait. Le champ électromagnétique est créé par un magnétron qui génère des ondes de fréquence f= 2,45 GHz (cette fréquence est un bon compromis entre la pénétration du champ dans les aliments et sa dissipation sous forme thermique). On cherche des solutions aux équations de Maxwell sous la forme :

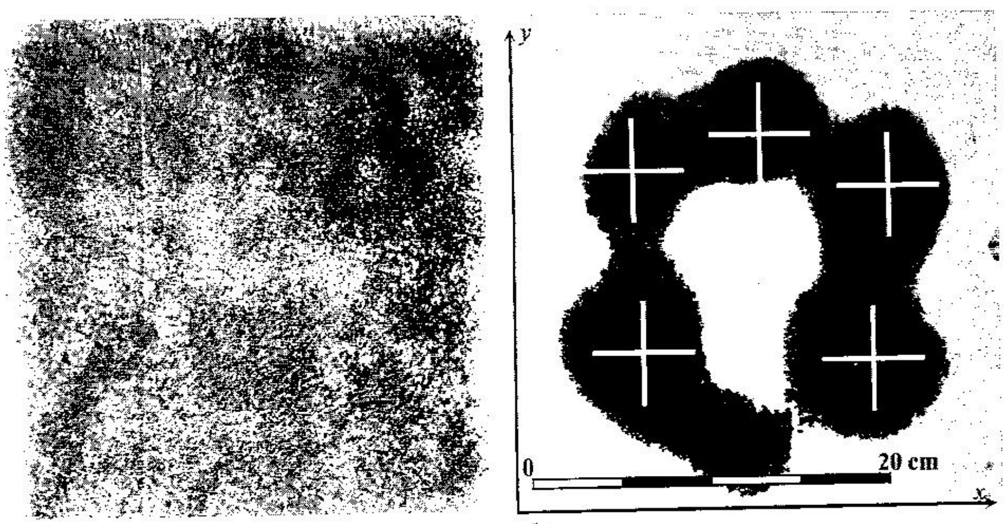
$$\vec{E} = E_0 \sin(n\pi x/a)\sin(m\pi y/b)\cos(\omega t)\vec{e}_z$$

La composante tangentielle du champ électrique s'annule sur les parois, ainsi que la composante normale du champ magnétique.

1. Que peut-on en déduire sur les paramètres n et m ? Déterminer la distance entre deux ventres consécutifs de champ électrique selon x et selon y.
2. Etablir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ électrique dans la cavité.
3. En déduire une condition sur la fréquence pour que le champ soit effectivement solution du problème.

   On considèrera un four à microondes de dimensions intérieures 30cmx30cm (largeur et profondeur). Afin de sonder le champ électromagnétique dans le four, on répartit uniformément sur une plaque de fins copeaux de chocolat qui vont servir de détecteur de champ électrique ! On analyse alors les effets du champ après quelques secondes de cuisson à pleine puissances.
4. Interpréter le cliché expérimental. Sachant que l'interaction du champ électromagnétique avec la matière se fait essentiellement par l'intermédiaire du champ électrique, à quoi correspondent les zones fondues ? Qu'utilise-t-on en pratique pour que le chauffage des aliments soit uniforme ?

a) Le détecteur de champ électrique est réparti uniformément sur une plaque.
b) Après quelques secondes de cuisson, le chocolat a fondu par endroit… On a retiré le chocolat qui n'a pas été affecté par le champ et on a repéré la position des zones fondues.



a) *b)*

© Benoît Dépret

5. Mesurer la distance moyenne entre les zones fondues selon x et selon y.
6. En déduire la vitesse de la lumière.

Exercice 25 A propos du débit d'absorption spécifique

Le développement de la téléphonie et des systèmes de communication sans fil (WiFi et Bluetooth par exemple) impose une large exposition à des champs électromagnétiques de fréquences et puissances variées. L'influence de ces rayonnements sur le corps humain et la santé n'est pas parfaitement connue et l'on invoque souvent le principe de précaution visant à minimiser l'exposition des plus jeunes et de femme enceintes. L'analyse des caractéristiques des systèmes d'émission d'ondes électromagnétiques actuels permet d'en savoir plus sur l'effet potentiel sur le corps humain.

La puissance moyenne d'émission d'un téléphone portable dépend de son mode de fonctionnement. Les téléphones de type GSM émettent des signaux par impulsions alors que les téléphones de type UMTS émettent de façon continue. La puissance moyenne d'un téléphone GSM est estimée à un huitième de sa puissance maximale affichée.
Le tableau suivant regroupe les caractéristiques de quelques types de téléphones.

Table 2 – caractéristiques de quelques types de téléphones

Téléphone	GSM 900	GSM 1800	GSM 2100
Fréquence du signal (MHz)	900	1800	2100
Puissance maximale (W)	2	1	0,125
Fonctionnement	à impulsions	à impulsions	continu

1. Comparer les puissances moyenne des différents téléphones.
   Pour communiquer, un téléphone portable reçoit et émet es signaux électromagnétiques avec une station relais. On supposera dans toute la suite que les émissions d'ondes se font de façon isotrope.
2. Comparer la puissance surfacique moyenne reçue à 100m d'une antenne relais de puissance moyenne 100 W avec celle reçue à 10 cm d'un téléphone portable de type UMTS 2100. Commenter.

   Des normes européennes limitent en fait la valeur maximale du champ électrique autorisé dans les lieux de vie. Celles-ci sont regroupées dans le tableau suivant en fonction de la fréquence.

Table 3 – champ électrique maximal

Fréquence du signal (MHz)	900	1800	2100
Champ électrique maximal ($V.m^{-1}$)	41	56	61

   On considère un téléphone émettant en continu la puissance moyenne P de façon isotrope.
3. En assimilant localement la structure de l'onde à celle d'une onde plane progressive et harmonique, montrer que l'amplitude du champ électrique de l'onde reçue à la distance d de l'émetteur peut se mettre sous la forme :
$$E_0 = K\frac{\sqrt{P}}{d}$$
   où K est une constante que l'on déterminera. Calculer K numériquement en précisant son unité.
4. A quelle distance minimale du téléphone faudrait-il se placer pour respecter les normes européennes ? Déterminer de même la distance minimale à laquelle il faudrait se placer de l'antenne émettrice de puissance 100 W. Ces normes sont-elles difficiles à respecter ?
   En fait les normes européennes sont basées sur des valeurs d'exposition temporaires aux champs électromagnétiques, d'une durée inférieure à 6 minutes, permettant à l'organisme de se rétablir, alors que les systèmes de télécommunication actuels imposent une exposition prolongée à ces rayonnements. Certains pays, comme l'Allemagne, adoptent ainsi des valeurs de précaution en fonction de l'impact sur l'organisme (toutes les fréquences confondues)
5. Déterminer les nouvelles distances minimales auxquelles il faut se placer d'une antenne relais ou d'un téléphone portable pour éviter tout impact fort sur l'organisme suite à une exposition prolongée au rayonnement. Commenter.

Table 4 – impact sur l'organisme

Impact sur l'organisme	aucun	faible	fort	très fort
Champ électrique maximal (V.m^{-1})	<0,006	0,006 à 0,06	0,06 à 0,6	>0,6

Un émetteur WiFi^{TM} domestique émet en continu un signal de puissance typique 50 mW à une fréquence de 2450 MHz (ou 5200 MHz selon la bande utilisée). Une oreillette Bluetooth© fonctionne également à 2450 MHz avec une puissance de 2,5 mW pour une portée de 20 m environ.

6. Evaluer l'impact sur l'organisme d'un émetteur WiFi^{TM} placé dans une chambre ou dans une école. Comparer au cas de l'oreillette et du téléphone portable.

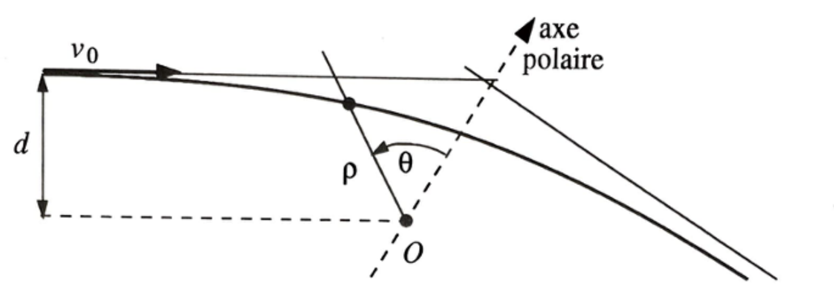
Exercice 26 Oscillations de plasma

Un plasma gazeux, globalement neutre, comprend, placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge $-e$ susceptibles de se déplacer. Soient n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène, et $\xi(z,t)$ un petit déplacement d'ensemble suivant l'axe Oz des électrons situés en z quand le plasma est au repos. L'agitation thermique et le poids sont négligés.

1. En raisonnant sur une tranche comprise entre z et $z+dz$ quand le plasma est au repos, donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement en supposant $|\partial\xi/\partial z| \ll 1$, et en déduire la densité de charge totale ρ du plasma.
2. Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}$ et que sous l'action de ce champ les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m}$.

AN : Calculer $f_p = \omega_p/2\pi$ pour $n = 10^6$ cm^{-3} (ionosphère) et $n = 10^{15}$ cm^{-3} (décharge dans un gaz à forte densité)

Exercice 27 Rayonnement par diffusion Rutherford



Un électron de vitesse au loin v_0 et de paramètre d'impact d est dévié par un proton supposé fixe en O. Les lois de la mécanique permettent de déterminer le paramètre q et l'excentrité ε de la trajectoire hyperbolique :

$$\rho = \frac{q}{1+\varepsilon\cos\theta} \quad \text{avec } q = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \frac{d^2}{\delta} \quad \text{et } \varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{v_0}{c}\right)^4 \frac{d^2}{\delta^2} \quad \text{où} \quad \delta = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}.$$

δ est la distance de l'électron au proton pour laquelle son énergie électrostatique est égale à son énergie de masse mc^2. Le cas $v_0/c = 10^{-2}$ (soit $v_0 = 3\times10^6$ m s^{-1}) et $d/\delta = 10^4$ (soit $d = 2.8\times10^{-11}$ m) donne lieu à une déviation importante ; l'excentrité vaut $\varepsilon = \sqrt{2}$, et les asymptotes ($r=\infty$) sont données par les angles polaires $\theta_M = \pm 3\pi/4$ ($\cos\theta_M = -1/\varepsilon$).

Au cours de la diffusion, l'ensemble électron/proton constitue un dipôle rayonnant, mais qui en première approximation ne modifie pas le mouvement de l'électron.
Le champ électromagnétique rayonné en un point P éloigné par un dipôle d'origine O et de moment dipolaire $\vec{p}$ variable a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc}\vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}}(t - r/c) \quad ; \quad \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_r$$

1. Établir l'expression de la puissance $P(R,t)$ rayonnée à travers une sphère de rayon R suffisamment grand en fonction de μ_0, c et $\ddot{\vec{p}}(t - R/c)$.
2. Définir $\vec{p}$, puis exprimer $\ddot{\vec{p}}$ en fonction de ρ et des paramètres du système et en déduire l'expression de la puissance pour l'électron diffusé :
$$P(R,t) = \frac{2}{3}\frac{mc^3\delta^3}{\rho^4}$$
où ρ est pris à l'instant $t - R/c$.

L'expression de $P(R,t)$ comme celle des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, n'est valable que si R est très supérieur à l'extension spatiale du dipôle.

3. Expliquer pourquoi, dès que R est très supérieur à d, l'énergie totale E_r rayonnée au cours du mouvement peut s'approcher par l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} P(R,t)dt$$
4. Exprimer le rapport K de l'énergie totale rayonnée sur l'énergie cinétique initiale de l'électron en fonction de δ/d, c/v_0 et de l'intégrale définie :
$$I = \int_{-\theta_M}^{\theta_M} (1 + \varepsilon\cos\theta)^2 d\theta$$
5. Calculer l'intégrale I et donner la valeur numérique de K. Commentaire

---

Exercice 28 Polarisation d'une onde et spin du photon
Une onde électromagnétique a pour champ électrique en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(kz - \omega t)(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)$$

1. Quel est son état de polarisation ?

Cette onde interagit avec un atome dont le noyau est supposé fixe. Si $\vec{r}$ représente l'écart de l'électron (masse m, charge $-e$) envisagé par rapport à la situation sans champ, la force de rappel exercée sur lui par le cœur (noyau + autres électrons) est $-m\omega_0^2\vec{r}$. Par ailleurs cet électron perturbé est soumis à une force de frottement $-m\dot{\vec{r}}/\tau$.

2. Interpréter ω_0 et τ.
3. Déterminer le coefficient complexe α tel que $\underline{\vec{r}} = \alpha\underline{\vec{E}}$ en régime forcé de pulsation ω.
4. Calculer la puissance moyenne $< P >$ cédée par l'onde à l'atome (l'exprimer à l'aide de $Im(\alpha)$).
5. Calculer le moment moyen $< \vec{\mathcal{M}} >$ de la force qu'exerce l'onde sur l'atome (l'exprimer à l'aide de $Im(\alpha)$).
6. En considérant l'absorption de l'onde par l'atome du point de vue corpusculaire, déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du photon incident absorbé. Commentaire.

Exercice 29 Etude d'un faisceau gaussien

Les OPPM homogènes, de champ électrique $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ polarisé rectilignement sont des solutions classiques des équations de Maxwell. Elles sont dites homogènes car leur amplitude de champ E_0 (et donc leur intensité lumineuse) est constante dans un plan d'onde $z =$ Cste, ce qui suppose que l'onde ait une extension transversale infinie ; ceci n'est pas conforme aux observations courantes (d'optique géométrique par exemple) qui font état de faisceaux de rayons.

Des OPPM inhomogènes dont la polarisation est toujours supposée rectiligne sont caractérisées par un champ électrique

$$\underline{\vec{E}} = E(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$$

ce qui permet de faire correspondre à ces faisceaux une extension transversale limitée.

Le présent exercice décrit un profil purement gaussien correspondant à un faisceau lumineux à sa sortie ($z = 0$) d'un laser et étudie l'évolution de ce profil au cours de la propagation.

La recherche de solutions particulières des équations de Maxwell sous la forme ci-dessus concerne des ondes sinusoïdales de pulsation ω, se propageant suivant Oz^+ et dont l'amplitude $E(x, y, z)$ du champ, a priori complexe, est une fonction lentement variable de x, y, et z à l'échelle de la longueur d'onde, c'est-à-dire en particulier

$$|\frac{\partial E}{\partial x}|, |\frac{\partial E}{\partial y}|, |\frac{\partial E}{\partial z}| \ll k|E| \quad \text{et} \quad |\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}| \ll k|\frac{\partial E}{\partial z}| \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

1. Rappeler l'équation de propagation du champ électrique $\underline{\vec{E}}$, et montrer que l'équation différentielle de l'amplitude $E(x, y, z)$ se met sous la forme approchée :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

2. On cherche des solutions à symétrie cylindrique de la forme :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{a(z)} \exp\big(-ir^2/2b(z)\big) \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

où $a(z)$ et $b(z)$ sont deux fonctions complexes de z.

   (a) Obtenir un système de deux équations différentielles du premier ordre portant sur les fonctions $a(z)$ et $b(z)$. Montrer que le rapport $a(z)/b(z)$ est constant.

   (b) On admet qu'à la gorge du faisceau, dans le plan $z = 0$, l'amplitude du champ électrique a une dépendance transversale gaussienne :

$$E(r, 0) = A_0 \exp\big(-r^2/w_0^2\big)$$

   où A_0 et w_0 sont des paramètres réels.
   Utiliser cette condition aux limites pour résoudre les équations obtenues à la question précédente et montrer que :

$$a(z) = \frac{z + iq_0}{iqA_0} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{z + iq_0}{k} \quad \text{avec} \quad q_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

   (c) Montrer que le carré du module se met sous la forme :

$$|E(r, z)|^2 = A^2(z) \exp\big(-2r^2/w^2(z)\big)$$

   exprimer $w(z)$ et $A(z)$ en fonction de w_0, A_0, q_0 et z
   Tracer, pour z donné, $|E|^2$ en fonction de r pour deux valeurs de z. Commentaire.

3. Déterminer à l'aide des approximations du début de l'énoncé, la composante prépondérante $\underline{\vec{B}}$ du champ magnétique de l'onde.
4. (a) Quelle est dans ces conditions la valeur moyenne temporelle $< \vec{R} >$ du vecteur de Poynting en fonction de $|E|^2$? Quelle est sa direction réelle ?
   (b) En déduire la puissance électromagnétique $P(r, z)$ qui traverse un disque de rayon r, d'axe Oz et situé dans le plan de cote z, en l'exprimant en fonction de $w(z)$, $A(z)$ et r.
   (c) Quelle est la limite $P_t(z)$ de $P(r, z)$ lorsque r tend vers l'infini. Comment la fonction $P_t(z)$ dépend-elle de z ? Commenter.
   Tracer, pour z donné, $P(r, z)$ en fonction de r pour deux valeurs de z.
5. (a) Exprimer en fonction de $w(z)$, le « rayon » $r_a(z)$ du faisceau défini par :

$$P(r_a(z), z) = P_t(z)(1 - 1/e)$$

   (b) Tracer la fonction $w(z)$. Quelle est la relation entre l'angle de divergence asymptotique du faisceau et son diamètre minimal ? Comparer à la diffraction à l'infini d'une ouverture circulaire.
6. Application
   Un laser à impulsions émet une puissance $P_0 = 0.5\,\text{MW}$ constante pendant un intervalle de temps $\Delta t = 10\,\text{ns}$. La longueur d'onde est $\lambda = 633\,\text{nm}$.
   Déterminer le « rayon » w_D du pinceau laser lorsqu'il arrive sur la Lune sachant que $w_0 = 1.5\,\text{cm}$ et que la distance Terre-Lune est $D = 380\,000\,\text{km}$.
   Sur la surface de la Lune est disposé un catadioptre de surface circulaire de rayon $r_1 = 1\,\text{m}$, constitué de petites surfaces réfléchissantes renvoyant la lumière dans la direction incidente avec un pouvoir réflecteur égal à 1. Quelle puissance P_1 reçoit-il ?
   En admettant que l'ouverture du pinceau réfléchi est la même que celle du pinceau incident et que la répartition des photons y est homogène, déterminer la puissance P_2 reçue par un détecteur terrestre en forme de disque de rayon $r_2 = 0{,}5$ m.
   Quel est le but de cette expérience ?

Exercice 5 Electromagnétisme et changement de référentiel

Il s'agit de chercher les relations entre un événement (x', y', z', t') vu par un observateur dans un référentiel (R') et ce même événement (x, y, z, t) vu par un autre observateur dans un référentiel (R) en traduisant les deux postulats de la relativité restreinte :

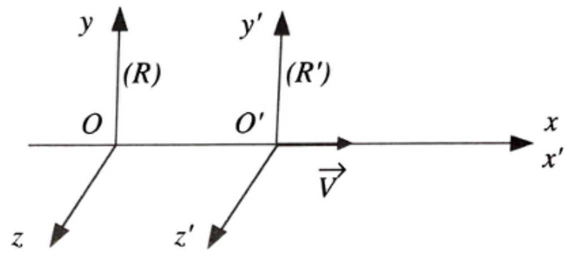
(I) principe de relativité : L'expression des lois physiques est la même dans tous les référentiels galiléens.

(II) invariance de c : La lumière se propage avec la même vitesse c dans tous les référentiels galiléens.

Il faut également inclure le principe d'inertie et rappeler la définition d'un référentiel galiléen à savoir : une particule isolée y possède un mouvement rectiligne uniforme (MRU), or un MRU reste un MRU dans un changement de référentiels galiléens. Et dans un espace-temps à quatre dimensions, un MRU ($\overrightarrow{OM} = \vec{v}t$) est représenté par une droite. Or les transformations conservant une droite sont les transformations affines

Si de plus les événements (0,0,0,0) coïncident dans les deux référentiels (ce qu'il est toujours possible de réaliser par homogénéité de l'espace et synchronisation des horloges) et que le mouvement relatif des référentiels est pris le long de leur axe commun $Ox = O'x'$ (ce qu'il est toujours possible de réaliser par isotropie de l'espace), alors la transformation est sous la forme :

$$\begin{cases} x' &= a_1 x + a_2 t \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= a_3 x + a_4 t \end{cases}$$



(R') est en translation de vitesse V par rapport à (R), avec $t = t' = 0$ lorsque O et O' coïncident. Quelle relation (1) cela impose-t-il entre les constantes a_1 et a_2 ?

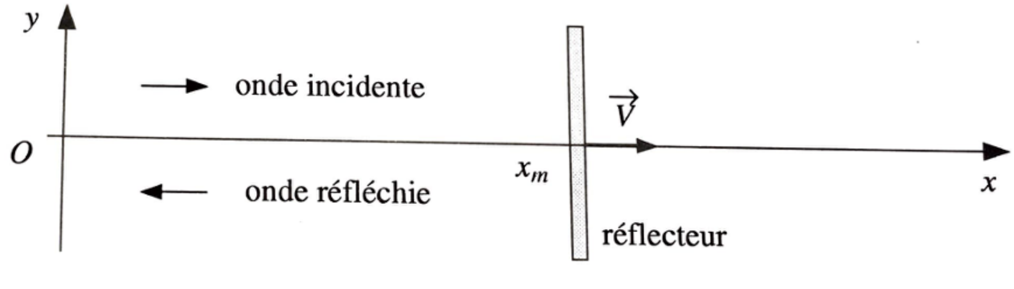
Vers la fin du siècle dernier, donc bien avant la relativité restreinte d'Einstein de 1905, Lorentz a recherché les transformations laissant invariantes les équations de l'électromagnétisme énoncé par Maxwell vers 1864. Dans le vide, les équations de Maxwell aboutissent à la notion de propagation d'ondes par l'opérateur d'Alembertien

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

1. Exprimer les opérateurs de dérivation première $\frac{\partial}{\partial x}$, ... $\frac{\partial}{\partial t}$ puis seconde $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, ... $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ en fonction des opérateurs de dérivation par rapport à x' ... t' et des constantes a_i (i de 1 à 4). En déduire l'expression de $\square$ en fonction des opérateurs primés.
2. Traduire le postulat (I) l'électromagnétisme sur l'opérateur d'Alembertien et y adjoindre le postulat (II).
   En déduire trois relations (2), (3) et (4) entre les constantes a_i.
3. Résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues, donner I'expression de chacune des constantes a_i en fonction de V, c et $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ et exprimer la transformation de Lorentz ($\mathscr{L}$).

Exercice 6 Effet Doppler sur un conducteur mobile
Un réflecteur métallique plan, parfaitement conducteur, dont la surface est perpendiculaire à l'axe Ox, est en translation rectiligne uniforme, parallèlement à l'axe Ox.
Si $\vec{V}$ est la vitesse du référentiel $\mathscr{R}'$ lié au réflecteur par rapport au référentiel $\mathscr{R}$ du laboratoire, l'abscisse à l'instant t de la surface réfléchissante est prise égale à :

$$x_m(t) = Vt$$



Une OPPM incidente de fréquence f_i arrive sur le plan métallique. On se propose de déterminer l'amplitude et la fréquence de l'OPPM réfléchie dans l'approximation non relativiste ($V/c \ll 1$).

1. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique dans $\mathscr{R}$, $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans $\mathscr{R}'$. Suivant un raisonnement effectué en induction électromagnétique, avec brio par Pierre, écrire l'expression de la force subie par une particule chargée en mouvement dans le référentiel $\mathscr{R}$ puis dans le référentiel $\mathscr{R}'$ et exprimer (dans l'approximation classique) $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ en fonction de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{V}$.

   Dans la suite, on ne se servira que de l'expression donnant $\vec{E}'$.
2. Le champ électrique de l'onde incidente a pour expression dans $\mathscr{R}$:

$$\vec{E}_i = E_0 \cos 2\pi f_i(t - x/c)\vec{u}_y$$

   Celui de l'onde réfléchie est cherché sous la forme :

$$\vec{E}_r = rE_0 \cos 2\pi f_r(t + x/c)\vec{u}_y$$

   En exprimant les conditions aux limites dans le référentiel $\mathscr{R}'$, déterminer au premier ordre en V/c le rapport des fréquences f_r/f_i ainsi que le coefficient de réflexion r.
3. Calculer, pour l'onde résultante, en un point d'abscisse fixe dans $\mathscr{R}$, en fonction de E_0 et au premier ordre en V/c :
   — le vecteur de Poynting $\vec{R}$ puis la norme de sa valeur moyenne.
   — la densité volumique d'énergie u, puis sa valeur moyenne $< u >$.
4. Par un bilan énergétique, déterminer le terme prépondérant de la pression de radiation P_{rad} qu'exerce l'onde électromagnétique sur le réflecteur. Exprimer P_{rad} en fonction de l'intensité I de l'onde incidente.