# Exercices de mécanique quantique

## Exercice 1 Classique ou quantique

1. Calculer la longueur d'onde de de Broglie pour :
   — un électron d'énergie cinétique égale à 10 eV
   — une personne de masse $m$=70kg se déplaçant à une vitesse de l'ordre de 1 m.s$^{-1}$
   Commenter les ordres de grandeurs obtenus.
2. A ce jour, les fullerènes $C_{60}$ sont les molécules les plus grosses pour lesquelles des phénomènes ondulatoires ont été observés. Dans les expériences correspondantes, les molécules ont une vitesse moyenne de 220 m.s$^{-1}$. Calculer la longueur d'onde de de Broglie de ces molécules. Comment se compare-t-elle aux dimensions de la molécule (de l'ordre du nanomètre) ?

## Exercice 2 Effet tunnel et radioactivité $\alpha$

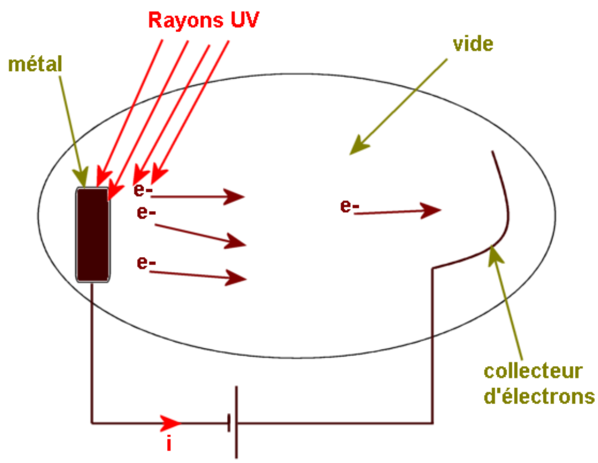
L'isotope radioactif $^{212}_{83}Bi$ du bismuth se désintègre en l'isotope $^{208}_{81}Tl$ du thallium en émettant une particule $\alpha$ ($^4_2He$) d'énergie $E$=6,0MeV. On rappelle, dans le domaine des faibles valeurs ($T \ll 1$) :

$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)})$$

Déterminer la distance $r_0$ entre le noyau de thallium et la particule $\alpha$ pour laquelle l'énergie $E$ est égale à l'énergie potentielle électrostatique. Evaluer numériquement cette distance.
Le rayon $R$ d'un noyau de nombre de masse $A$ est donné par la formule $R = R_0 A^{1/3}$ où $R_0$=1,2 fm. Déterminer la valeur numérique de $R$ pour $^{208}_{81}Tl$. En déduire la valeur $V_b$ du maximum de potentiel dans lequel évolue la particule $\alpha$ à l'extérieur du noyau. En choisissant comme valeur approchée de la barrière $V_0 = V_b/2$ évaluer la valeur numérique du coefficient de transmission $T$.
En déduire un ordre de grandeur de la durée de vie moyenne $\tau$ de l'isotope radioactif du bismuth.

## Exercice 3 Effet photoélectrique

Une cellule photoélectrique de cathode C est montée en série avec un générateur de tension continue G et un ampèremètre A. Les résistances de G et A sont négligeables et la tension fournie par G est réglable. On éclaire la cathode de la cellule avec une radiation monochromatique de longueur d'onde $\lambda$ dans le vide. G est branchée de telle manière que le courant dans A est nul lorsque la tension aux bornes de G est supérieure à une certaine tension $U_s$.




1. Indiquer sur un schéma les polarités des bornes de G.
2. Un photon d'énergie $\varepsilon$ arrivant sur la cathode C peut provoquer l'émission d'un électron d'énergie cinétique $E_c$. Écrire les relations qui existent entre :
   — $E_c$ et la tension $U_s$ ;
   — $\varepsilon$, $E_c$ et le travail d'extraction $W_0$ d'un électron de la cathode C.
3. Pour $\lambda$=$\lambda_1$ =0,4047$\mu$m, $U_s = U_1$ =1,18V et pour $\lambda$=$\lambda_2 = 0,\ 4358\mu$m, $U_s = U_2 =$ 0,96 V. Déterminer la valeur de la constante de Planck $h$, et la valeur de la longueur d'onde $\lambda_0$ correspondant au seuil photoélectrique de la cellule.

## Exercice 4 Le modèle de Bohr

Pour expliquer la stabilité de l'atome, Bohr imagina que les électrons devaient parcourir des trajectoires circulaires autour du noyau. Sur la première orbite, de rayon $a_0$, la quantité de mouvement de l'électron vérifie : $p = \hbar/a_0$.

1. Afin qu'on puisse parler de trajectoire au sens classique du terme, quelle limitation doit-on imposer aux indéterminations $\Delta r$ et $\Delta p$ pour l'orbite de Bohr considérée ?
2. Montrer que ces limitations sont incompatibles avec les inégalités de Heisenberg.
3. Que doit-on en déduire pour le modèle de Bohr ?

## Exercice 5 Gaz quantique ou classique

On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique.

1. Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium. Calculer la longueur d'onde de de Broglie correspondante et la comparer à la distance moyenne entre deux atomes.
2. On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle quand la longueur d'onde de de Broglie devient du même ordre de grandeur que la distance entre atomes. Expliquer pourquoi et dites si ce gaz vous semble relever de la mécanique quantique.

   Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome fournit un électron. L'ensemble de ces électrons constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de l'eV. La distance moyenne entre électrons est supposée égale à la distance moyenne entre atomes.

3. Reprendre les arguments développés pour le gaz hélium dans le cas du gaz d'électrons libres dans le métal. On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes : $M_{Cu}$=63 g.mol$^{-1}$ et $\mu_{Cu}$=8,9.10$^3$kg.m$^{-3}$.
4. La conduction de l'électricité dans un métal relève-t-elle de la mécanique quantique ?

## Exercice 6 Localisation initiale

On considère une particule libre qui à l'instant initial est localisée sur un intervalle de position $\Delta x$. Pourquoi cette localisation ne perdure pas ? Donner sa loi d'évolution temporelle.

## Exercice 7 Etalement du paquet d'onde

On considère une particule quantique libre de masse $m$.

1. Retrouver rapidement le relation de dispersion correspondante.
2. On considère un paquet d'ondes formé d'ondes planes progressives dont les vecteurs d'onde sont distribués autour d'une valeur moyenne $k_0$ avec une dispersion $\Delta k$ qui détermine l'extension spatiale initiale $\Delta x_0$ du paquet d'onde à l'instant initial. La pulsation correspondant à $k_0$ est notée $\omega_0$
   (a) Rappeler la définition de la vitesses de groupe $v_g$ et calculer son expression.
   (b) Montrer en utilisant la relation de dispersion qu'à la largeur $\Delta k$ correspond une dispersion de la vitesse de groupe $\Delta v_g$ autour de la valeur moyenne $v_{g0}$. Exprimer $\Delta v_g$ en fonction de $m$, $\hbar$ et $\Delta x_0$.
   (c) En déduire la largeur du paquet d'onde $\Delta x(t)$ après une durée $t$. Déterminer la durée $t_0$ au bout de laquelle la largeur du paquet d'onde a doublé.
3. Application numérique :
   Calculer $t_0$ pour :
   — un électron initialement confiné sur une largeur $\Delta x_0$ =10$^{-10}$m.
   — une gouttelette d'eau, de rayon égal à 10 $\mu$m et de masse $m$=4.10$^{-12}$kg
   Commenter les valeurs numériques obtenues.

## Exercice 8 Oscillateur harmonique quantique

On considère une particule quantique de masse $m$ soumise à une énergie potentielle de la forme :

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Dans un état stationnaire d'énergie $E$, on écrit la fonction d'onde sous la forme :

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\exp(-iEt/\hbar)$$

1. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans le cas considéré.
2. Pour l'état fondamental :
$$\varphi(x) = A\exp(-x^2/a^2)$$
   (a) Déterminer la constante $A$.
   (b) Représenter la densité de probabilité de présence. En déduire sans calcul la valeur moyenne $< x >$ de la position de la particule.
   (c) Déterminer l'expression de l'énergie $E$ et de $a$ en fonction de $\hbar$, $m$ et $\omega$.

   On donne
$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha u^2)du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

## Exercice 9 Effet tunnel

Un électron d'énergie 1eV se déplace selon l'axe $Ox$ et rencontre en $x$=0 une barrière de potentiel rectangulaire de hauteur $V_0 = 2$eV. Déterminer la largeur $a$ de la barrière pour laquelle la probabilité de transmission de l'électron est de $10^{-3}$.
On rappelle l'expression approchée du facteur de transmission dans le domaine des faibles valeurs ($T \ll 1$) :

$$T = \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2}\exp(-\frac{2a}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)})$$

Comparer la valeur de $a$ obtenue à la longueur d'onde de de Broglie de cet électron.

## Exercice 10 Etats stationnaires dans un puits infini

Une particule de masse $m$ se déplaçant selon $x$ est confinée entre 0 et $a$ dans un puits de potentiel infini. La particule est dans l'état stationnaire $n$.

1. Déterminer la probabilité $P_n(\alpha)$ de trouver la particule dans entre 0 et $\alpha a$ ou $0<\alpha<1$.
2. Commenter la dépendance en $n$ de $P_n(\alpha)$.

## Exercice 11 Accélération d'un faisceau de protons

On se propose d'étudier l'accélération d'un faisceau de protons ($m_pc^2 = 938$ MeV, $q = +e$) d'énergie cinétique $E_C$ =100 keV par une différence de potentiel $U_0 = 1$ MV. Le potentiel électrique $U(x)$ est donc tel que :
— $U(x) = U_0$ pour $x < 0$ (région 1) ;
— $U(x) = 0$ pour $x > 0$ (région 2) ;

1. Cette forme de potentiel a-t-elle un sens physique ? Comment le rendre plus réaliste ?
2. Quelles sont les énergies cinétiques et les longueurs d'onde associées des protons dans les deux régions ?
3. On veut montrer qu'une fraction des protons incidents est réfléchie lors du franchissement de la discontinuité du potentiel. Pour cela, on décrit les protons incidents par une fonction d'onde $\Psi_1(x,t)$ telle que :
$$\Psi_1(x,t) = \varphi_1(x)\exp(-i\omega t) = A_1 \exp(i(k_1 x - \omega t))$$
Vérifier que $\Psi_1(x,t)$ est solution de l'équation de Schrödinger dans la région 1 et en déduire l'expression de $k_1$.
4. On définit la densité de courant $j$ par :
$$j = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)$$
Vérifier que l'on peut identifier $j$ au nombre de protons envoyés par unité de temps et exprimer $A_1$ en fonction du courant $I$ de protons mesuré en ampère.
5. Quelle doit être l'expression de $\Psi_1'(x,t)$ de la fonction d'onde des protons réfléchis ? On notera $A_1'$ son amplitude.
6. On suppose qu'aucune particule ne provient de $x > 0$ dans la région 2. Donner, dans ces conditions l'expression $\Psi_2(x,t)$ de la fonction d'onde des protons dans la région 2. On notera $A_2$ son amplitude.
7. Déterminer les expressions de $A_1'$ et $A_2$ en fonction de $A_1$
8. On définit le coefficient de réflexion $R = |A_1'|^2 / |A_1|^2$ comme la fraction de particules réfléchies. Calculer $R$ et en déduire la fraction $T$ des particules transmises.
9. Exprimer $R$ et $T$ en fonction de $E_C$ et $U_0$. Application numérique.
10. Supposons maintenant que les protons sont accélérés en deux temps par un potentiel :
— $U(x) = U_0$ pour $x < 0$ (région 1) ;
— $U(x) = U_0/2$ pour $0 < x < a$
— $U(x) = 0$ pour $x > a$ (région 2) ;
Calculer le nouveau coefficient de réflexion et en déduire une méthode pour que les particules soient accélérées sans être réfléchies.

## Exercice 12 Combinaison linéaire d'états stationnaires dans un puits infini

On considère la superposition de deux états stationnaires d'une particule confinée dans un puits infini de largeur $a$ :

$$\Psi = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \exp\left(-i\frac{E_2 t}{\hbar}\right)$$

1. Donner une condition liant $A_1$ et $A_2$. Montrer que $A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ est solution.
2. Représenter la densité de probabilité de présence $\rho = |\Psi(x,t)|^2$ pour quelques valeurs du temps bien choisies.
3. Quelle est la période $T$ de l'évolution de la densité de probabilité ? Calculer l'écart-type $\Delta E$. Commenter la valeur de $\Delta E \times T$.

## Exercice 13 Oscillateur harmonique

Une particule de masse $m$ évolue dans un puits de potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. Elle se trouve dans l'état fondamental et a pour fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = A \exp(-x^2/a^2) \exp(-iE_0 t/\hbar)$$

avec $A = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$, $a^2 = 2\hbar/m\omega_0$ et $E_0 = \hbar\omega_0/2$.

1. Quel est l'intervalle accessible à la particule en mécanique classique ? Déterminer la probabilité $P$ de trouver la particule en dehors de la région classique lorsqu'elle se trouve dans l'état stationnaire de plus basse énergie. On donne
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty \exp(-u^2) du \approx 0,15$$
2. Donner l'allure de la fonction d'onde $\varphi_1(x)$ du premier état excité d'énergie $E_1 = 3\hbar\omega_0/2$.

   Une particule est préparée à l'instant $t = 0$ dans l'état décrit par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\varphi_0(x) + \varphi_1(x)]$. Donner l'expression de $\psi(x,t)$. Tracer qualitativement la densité de probabilité de présence associée à $\psi(x,t)$ à différents instants. Commenter.

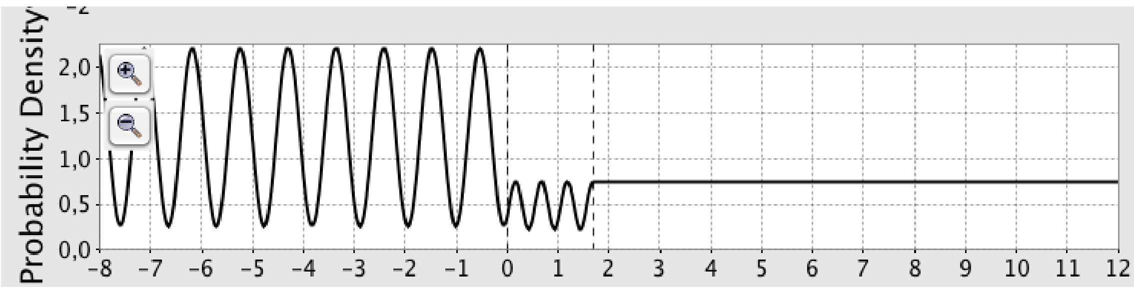
## Exercice 14 Puits infini tridimensionnel

On cherche à décrire les états stationnaires d'une particule confinée dans une puits de potentiel de dimensions $L_1$, $L_2$, $L_3$ selon $x$, $y$ et $z$. L'équation de Schrödinger tridimensionnelle indépendante du temps s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi + V\varphi = E\varphi$$

1. Montrer que $\varphi(x, y, z) = \varphi_{n1}(x)\varphi_{n2}(y)\varphi_{n3}(z)$ où $\varphi_{ni}$ correspond à une solution de l'équation de Schrödinger stationnaire d'un puits unidimensionnel de largeur $L_i$ est solution de l'équation de Schrödinger tridimensionnelle indépendante du temps. Quelle est l'énergie correspondante ? Exprimer la fonction d'onde $\psi(x, y, z, t)$.
2. $L_1 = L_2 = 2L_3$. trouver les deux valeurs des deux niveaux d'énergie les plus bas, ainsi que leur dégénérescence.

## Exercice 15 Particule dans un potentiel inconnu



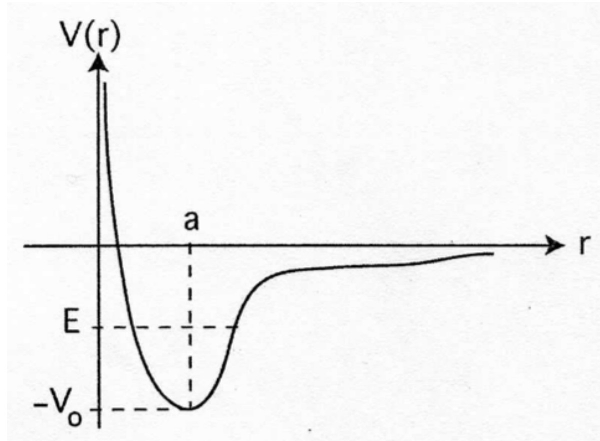

1. L'état de la particule est-il un état lié ou un état de diffusion ?
2. Quelle interprétation peut-on donner des oscillations de la densité de probabilité de présence pour $x < 0$ ? Le même comportement est-il observable en mécanique classique ?
3. L'énergie potentielle $V(x)$ est constante par morceaux. Déterminer son allure possible en fonction de $x$.
4. La fonction d'onde associée à cet état stationnaire est de la forme $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$. Proposer une expression pour $\varphi(x)$ dans chacune des trois zones de l'espace.

**Exercice 16 Le deuteron : puits de potentiel semi infini**

Le deuteron, noyau du deuterium est formé d'un proton de masse $m_p$ et d'un neutron de masse $m_n$. On le modélise par une particule fictive de masse réduite

$$m = \frac{m_p m_n}{m_p + m_n}$$

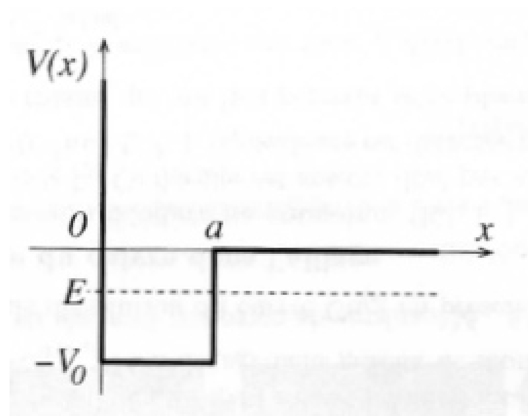
soumise à un potentiel attractif $V(r)$ correspondant à l'interaction nucléaire, ayant la forme suivante, de valeur minimale $-V_0$.




On observe expérimentalement l'existence d'un seul état lié stable du système, correspondant à une énergie $E$ = -2,2 MeV. L'ordre de grandeur de la portée de cette interaction est $a$ = 1fm =$10^{-15}$m.

1. Commenter physiquement l'allure du potentiel.

   On propose une modélisation très simple sous forme d'une fonction constante par morceaux en fonction de $x$ sur deux intervalles.




2. Donner la forme de la fonction d'onde de l'état stationnaire d'énergie $E$ dans ces deux régions de l'espace.
3. En déduire une condition de quantification de la forme :

$$|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0} \quad \text{et} \quad \tan(ka) < 0$$

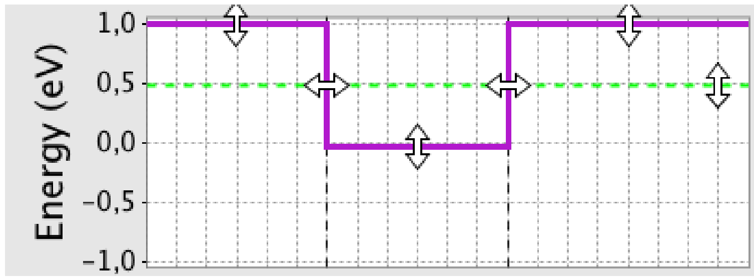
   avec $k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$.
4. Représenter graphiquement ce système d'équations et en déduire que le états liés sont quantifiés et que leur nombre croît avec $V_0$. Montrer que si $V_0 \gg -E$, il n'y a qu'un seul état lié. Evaluer la valeur correspondante de $V_0$ et commenter. Quelle est la signification physique de cette inégalité ? Pourquoi le deutéron est-il utilisé dans les accélérateurs synchrotrons de haute énergie pour produire des neutrons ?

## Exercice 17 Puits de potentiel rectangulaire fini

Une particule de masse $m$ est placée dans un puits de potentiel infini $V(x)=0$ pour $-a < x < a$, la zone extérieure étant inaccessible.

1. Retrouver le plus simplement possible les niveaux d'énergie des états stationnaires.

   Le puits est désormais modélisé par un puits rectangulaire de hauteur fini $V_0$

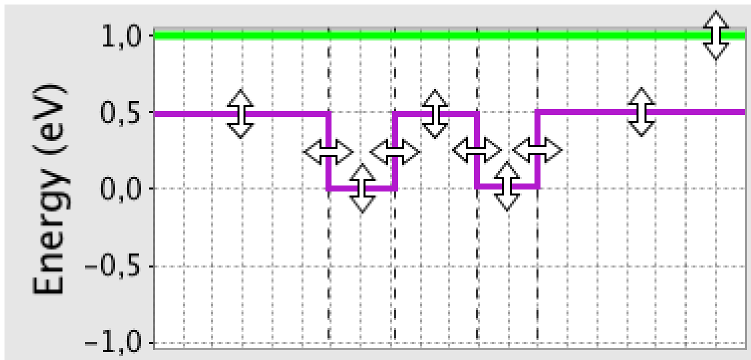



2. On s'intéresse aux états liés. Quelles sont les valeurs possibles de l'énergie ?
   Tracer sans calcul l'allure de la fonction d'onde du fondamental. Son énergie est-elle a priori supérieure ou inférieure à celle du puits infini de même largeur ?
   On pose :
$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$
   et
$$K = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$
3. Ecrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans les différentes zones.
4. Combien de constantes interviennent dans les amplitudes ? Lesquelles peut-on déjà éliminer ?
5. Quelles sont les conditions aux limites ?
6. Vu la forme du potentiel on admet que les fonctions d'onde des états stationnaires sont soit paires soit impaires. En déduire que :
$$ka \tan(ka) = Ka$$
   ou
$$-\frac{ka}{\tan(ka)} = Ka$$
7. Etablir la relation
$$(ka)^2 + (Ka)^2 = \frac{2ma^2V_0}{\hbar^2}$$
8. En notant $X = ka$ et $Y = Ka$ déduire une méthode graphique de résolution.
9. Y a-t-il toujours des états liés. A quelle condition existe-t-il un seul état lié ?
10. Dans le cas où le puits devient très profond, retrouver les solutions du 1.

## Exercice 18 Puits de potentiel rectangulaire fini double

On s'intéresse à une particule de masse $m$ dans un double puits de potentiel suffisamment profond symétrique par rapport à O. La largeur d'un puits est notée $a$ et la profondeur $V_0$. La distance entre les puits est $\Delta$. On rappelle que les niveaux d'énergie d'un puits infini de largeur $L$ sont donnés par

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$




On commence par considérer le cas $\Delta$=0.

1. Expliquer et tracer sans calcul la forme de la fonction d'onde de l'état fondamental $\varphi_1(x)$. Faire de même pour le premier état excité $\varphi_2(x)$.
2. Quelles sont les énergies associées $E_1'$ et $E_2'$ en supposant le puits assez profond pour que l'expression de l'énergie pour le puits infini reste valable.
3. Plus finement, expliquer si les énergies sont légèrement plus élevées ou légèrement plus faibles que pour le puits infini.

   On considère ensuite le cas $\Delta$ très grand.

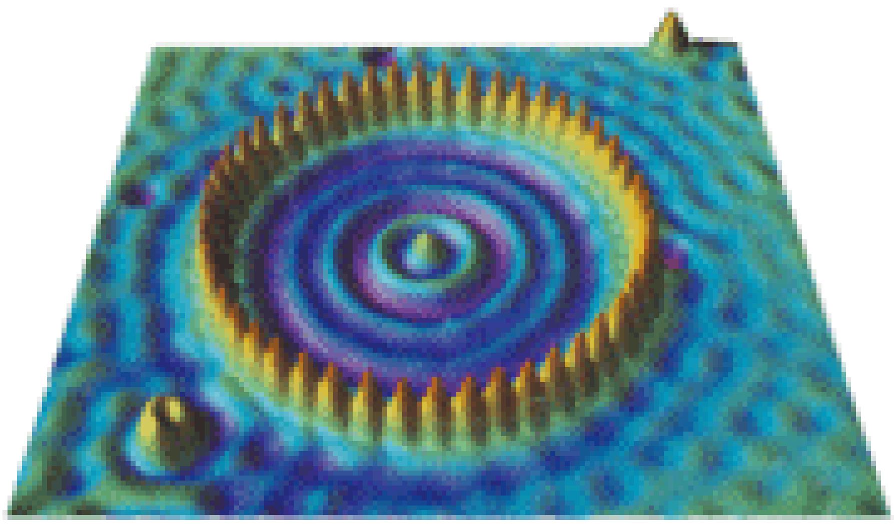
4. Préciser cette notion. Expliquer pourquoi le fondamental est dégénéré (cela signifie que deux fonctions d'onde linéairement indépendantes possèdent la même énergie). On choisira comme base, dans la suite, des fonctions d'onde symétrique $\varphi_s(x)$ ou antisymétrique $\varphi_a(x)$ par rapport au milieu des deux puits. Tracer les fonctions d'onde associées.
5. Quelle est l'énergie $E_\infty$ associée ?

   On finit par le cas où $\Delta$ est intermédiaire.

6. D'après ce qui précède, tracer à nouveau les fonctions d'onde des deux niveaux de plus basse énergie.
7. Expliquer lequel des états symétrique ou antisymétrique possède la plus basse énergie.
8. Tracer l'allure de la dépendance de l'énergie des deux niveaux les plus bas en fonction de $\Delta$, les autres paramètres restant fixés. Commenter la courbe de l'énergie du fondamental en évoquant l'effet tunnel.
9. Le double puits de potentiel peut modéliser l'énergie potentielle ressentie par l'électron dans l'ion $H_2^+$.Où se situent dans ce cas les noyaux d'hydrogène ?
10. Dans l'état fondamental de l'ion $H_2^+$, l'électron tend-il à rapprocher ou à éloigner les noyaux ? Et dans le premier état excité ?

**Exercice 19 Corail quantique**

En 1993, une équipe de l'entreprise IBM a réussi à déposer sur une surface métallique de cuivre 48 atomes de fer formant un cercle de rayon $R$=7,1 nm en les manipulant à laide d'une pointe de microscope à effet tunnel. La manipulation a été effectuée à une température très basse de 4 K pour ne pas que l'agitation thermique ne désassemble la structure. Les atomes de fer forment alors une barrière quasi-infranchissable pour les électrons libres du cuivre situés à l'intérieur du cercle (à la manière d'une barrière de corail qui coupe les vagues de l'océan, d'où le nom imagé de "corail quantique" pour cette structure). La photo ci-dessous représente la répartition de densité électronique (*local densité of state*) en fonction de la position mesurée à l'aide d'un microscope à effet tunnel (*STM : Scanning tunneling microscope*).



On considère un unique électron confiné à l'intérieur du cercle formé par les atomes de fer. La fonction d'onde de l'électron de masse $m$ est notée $\psi(M,t)$. On rappelle l'équation de Schrödinger vérifiée par $\psi(M,t)$ pour un électron soumis à une énergie potentielle $V(M,t)$ :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(M,t)\psi(M,t)$$

où $\Delta$ désigne l'opérateur Laplacien.

On se ramène dans un premier temps à un problème à une dimension selon $Ox$ : l'électron se trouve dans un puits de profondeur infinie, situé entre $x$=0 et $x$=2$R$.

1. Expliquer le lien entre la fonction d'onde $\psi(x,t)$ et ce que l'énoncé appelle la "densité électronique".
2. Etablir les expressions des énergies des états stationnaires de l'électron.
3. En assimilant le corail quantique à un puits unidimensionnel et en exploitant la photo, estimer l'énergie, exprimée en eV des électrons piégés par le corail.

Se ramener à un problème unidimensionnel peut paraître critiquable. Il est possible d'affiner le modèle en cherchant des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger en coordonnées cylindriques ($r$, $\theta$) ne dépendant pas de $\theta$. On suppose que le corail quantique peut être modélisé par un puits infini circulaire de rayon $R$.

## Exercice 20 Corail quantique (suite)

4. L'examen de la photo permet-il d'affirmer que la fonction d'onde $\psi(M,t)$ ne dépend pas de $\theta$ ? Pourquoi ?
5. A partir du formulaire et de la courbe ci dessous, calculer l'énergie des électrons piégés par le corail. Le modèle unidimensionnel initial était-il suffisant ?

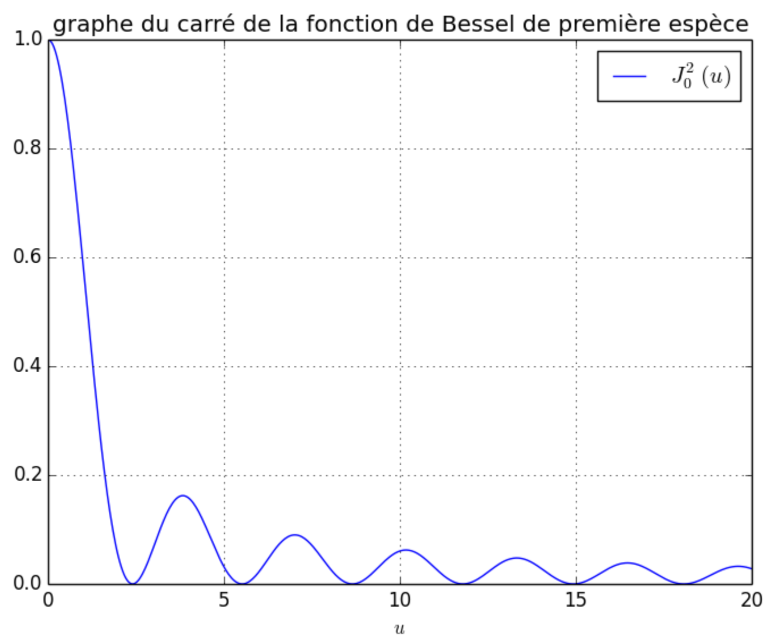
*Formulaire* :
On donne l'expression du Laplacien en coordonnées cylindriques dans le cas où $\psi$ ne dépend que de la distance $r$ à l'axe :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

DOCUMENT :
On considère l'équation différentielle du deuxième ordre :

$$\frac{d^2F}{du^2} + \frac{1}{u}\frac{dF}{du} + F(u) = 0$$

Les solutions qui ne divergent pas pour $u \to 0$ sont de la forme $F(u) = AJ_0(u)$ où $J_0$ est la fonction de Bessel de première espèce, $A$ étant une constante quelconque.



## Exercice 21 Modèle du cristal unidimensionnel

On s'intéresse à un électron qui évolue dans un potentiel périodique unidimensionnel avec le profil périodique de période $a$, tel que :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{pour } 0 < x < a - b \\ V(x) = V_0 & \text{pour } a - b < x < a \end{cases}$$

1. Représenter le potentiel $V(x)$.
2. Dans la zone $0 < x < a$, on considère une solution stationnaire de l'équation de Schrödinger $\varphi$ d'énergie $0 < E < V_0$. Etablir l'expression de $\varphi$ dans ce domaine, en fonction de

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2} \text{ et } q = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$$

3. La solution générale $\varphi(x)$ en tout point du réseau peut s'écrire

$$\varphi(x) = \exp(iKx)u(x)$$

avec $u$ une fonction périodique de période $a$ et $K \in ] - \pi/a; \pi/a[$. Calculer $|\varphi(x + pa)|^2$ avec $p$ entier et commenter.

4. Calculer $\varphi(x + a)$ en fonction de $\varphi(x)$. En déduire $\varphi(a)$ et $\varphi'(a)$, et écrire deux nouvelles conditions de continuité.
5. Donner une condition pour l'existence d'une solution sur l'ensemble du réseau (sans calcul). Après calcul cela donne :

$$\cos Ka = \cosh(qb)\cos(k(a - b)) - \frac{q^2 + k^2}{2kq}\sinh(qb)\sin(k(a - b))$$

6. Dans la limite où $b \to 0$ et $V_0 \to \infty$ avec $bV_0 = \gamma$ fixé, montrer que l'équation précédente devient :

$$\cos Ka = \cos(ka) - Q\frac{\sin(ka)}{ka}$$

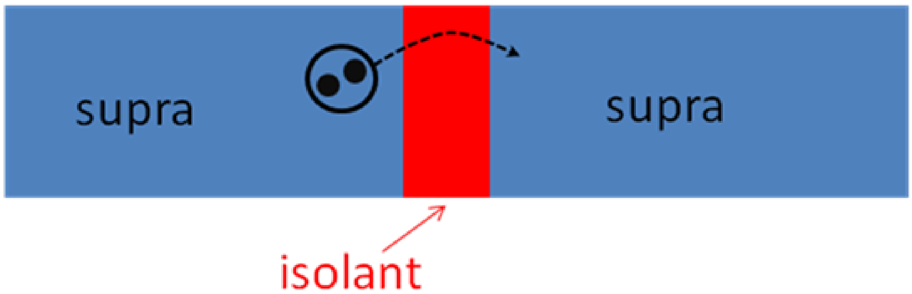
avec $Q = m\gamma a/\hbar^2$. Résoudre cette équation dans les deux limites $Q \to 0$ et $Q \to \infty$.

7. Pour une valeur de $Q$ quelconque, montrer qu'il existe des valeurs de l'énergie pour lesquelles cette équation ne peut être satisfaite.

## Exercice 22 Effet Josephson (analyse de document)

Extrait du site : `http://www.supracondutivite.fr`

Quand deux supraconducteurs sont séparés par une très fine couche d'isolant électrique, il apparaît de façon tout à fait inattendue un courant électrique continu, dont la valeur est liée aux caractéristiques des supraconducteurs. Cet effet a été prédit en 1962 par Brian Josephson. Depuis, ce sandwich supra-isolant-supra est appelé "jonction Josephson". D'où vient un tel effet ?




Quand un matériau devient supraconducteur, les électrons s'apparient en paires de Cooper et se condensent sous la forme d'une unique onde quantique collective. Si l'isolant électrique séparant les deux supraconducteurs est très fin, de l'ordre de quelques nanomètres, alors l'onde peut en quelque sorte déborder du supraconducteur, ce qui permet aux paires d'électron de passer à travers l'isolant, par un effet quantique appelé effet tunnel. En passant ainsi spontanément d'un supraconducteur à l'autre, les paires créent un courant électrique. Chaque supraconducteur est caractérisé par une quantité appelée phase, à la signification subtile. Le courant électrique dans la jonction est un courant continu dont la valeur est proportionnelle au sinus de la différence de phase entre les deux supraconducteurs.

Si maintenant, on applique une différence de tension électrique constante entre les deux supraconducteurs, alors un courant électrique cette fois alternatif apparaît en réaction aux variations de phases. Cet effet, qui relie une tension continue à un courant alternatif est inhabituel. D'autant que la fréquence des courants alternatifs ne dépend absolument pas de la taille des supraconducteurs, ni de leurs propriétés (température critique, composition chimique). Cette fréquence dépend exclusivement de la tension appliquée et de constantes fondamentales (la charge électrique de l'électron et le quantum d'énergie de Planck). Or une fréquence peut se mesurer très précisément, à l'aide d'horloges atomiques, mais jusqu'à la découverte de cet effet on ne savait pas mesurer très précisément une tension. L'effet Josephson permet ainsi de définir une valeur référence de la tension qui sert ensuite à calibrer les appareils de mesures, et de s'assurer que 1 volt a la même valeur en France et au Japon.

Les effets Josephson sont très sensibles à la valeur du champ magnétique, car la variation de la phase d'un supraconducteur peut être reliée à un flux magnétique. Il est alors possible d'utiliser cette sensibilité au champ magnétique pour construire des systèmes extrêmement précis de mesure de champ magnétique, appelés SQUID : ces systèmes sont le moyen le plus précis pour mesurer un champ magnétique.

## Exercice 23 Effet Josephson (questions)

**Questions**

Le courant dû aux paires de Cooper dans une jonction Josephson est :

$$I = I_0 \sin(\phi_1 - \phi_2)$$

où $\phi_1$ et $\phi_2$ sont les phases de la fonction d'onde collective de part et d'autre de la jonction. La différence de phase obéit à l'équation suivante,

$$\hbar \frac{d(\phi_1 - \phi_2)}{dt} = 2e(V_1 - V_2)$$

où $V_1 - V_2$ est la différence de potentiel entre les deux supraconducteurs.

1. En quoi la jonction Josephson a-t-elle un lien avec l'effet tunnel ? Comment se fait-il qu'apparaisse une charge $2e$ dans l'équation d'évolution de la phase ?
2. Le texte indique qu'une tension continue entre les deux conducteurs donne lieu à un courant sinusoïdal. Exprimer la fréquence du courant. Dépend-elle de la nature du supraconducteur utilisé ?
3. Expliquer pourquoi l'effet Josephson permet de définir une valeur de référence de la tension.
4. Que se passe-t-il quand la différence de potentiel entre les deux supraconducteurs est nulle ?
5. Lors de l'utilisation du SQUID pour détecter des champs magnétiques, la grandeur mesurée est une tension électrique. Justifier.

## Exercice 24 Démonstration de l'inégalité de Heisenberg spatiale

1. On suppose que $< x >= 0$ et $< p >= 0$. Exprimer $\Delta x$ et $\Delta p$.
2. Montrer que
$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| x\psi(x,t) + \lambda\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 dx$$
est égal à
$$I(\lambda) =< x^2 > -\lambda\hbar + \lambda^2 < p^2 >$$
où $\lambda$ est réel.
3. En déduire l'inégalité de Heisenberg spatiale.