ANALYSE

Transformation de Legendre —

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des applications f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexes telles que :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty. \tag{1}$$

1. *Montrer que pour tout réel m, la quantité $\sup_{x\in\mathbf{R}}(mx - f(x))$ est bien définie. On note f^* l'application*
$$f^* \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ m \mapsto \sup_{x\in\mathbf{R}}(mx - f(x)).$$
2. *Pour tout réel $\alpha > 1$, on note f_α l'application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{\alpha}|x|^\alpha$. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{K}$, pour tout réel $\alpha > 1$.*
3. *Soit (p,q) un couple de réels conjugués, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que $f_p^* = f_q$. Que vaut $(f_p^*)^*$*
4. *Soit f élément de $\mathcal{K}$. Montrer que f^* vérifie les mêmes hypothèses que f.*
5. *Montrer que $(f^*)^* = f$.*
6. *Démontrer l'inégalité de Young :*
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q},$$
pour tout couple (p,q) de réels conjugués et tout couple (x,y) de réels strictements positifs.

Solution —

1. D'après(1), $x = \mathrm{o}(f(x))$ et $f(x) \to +\infty$, lorsque $x \to \pm\infty$, donc $mx - f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -f(x)$ et donc $mx - f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\to} -\infty$ de plus $m\mathrm{id} - f$ est continue, donc cette fonction est majorée elle admet donc une borne supérieure qui de plus est atteinte.
2. Facile !
3. Facile !
4. Soient m et n des réels, t un élément de $[0,1]$. Pour tout réel x,
$$(tm + (1-t)n)x - f(x) = t(mx - f(x)) + (1-t)(nx - f(x)) \leq tf^*(m) + (1-t)f^*(n).$$
Par définition de la borne supérieure,
$$f^*(tm + (1-t)n) \leq tf^*(m) + (1-t)f^*(n),$$
d'où la convexité de f^*.
Soit A un réel strictement positif. Pour tout m et tout x éléments de $\mathbf{R}$, $f^*(m) \geq mx - f(x)$, en particulier pour $x = \mathrm{sg}(m)2A$,
$$\frac{f^*(m)}{|m|} \geq 2A - \frac{f(\mathrm{sg}(m)2A)}{|m|},$$
Donc, pour tout réel m, si $|m| \geq \left|\frac{f(2A)}{A}\right| + \left|\frac{f(-2A)}{A}\right|$ alors : $\frac{f^*(m)}{|m|} \geq 2A - A = A$, donc f^* vérifie (1).
Au total $f^* \in \mathcal{K}$.
5. Soit x_0 un réel. On a vu qu'il existe n réel tel que :
$$(f^*)^*(x_0) = nx_0 - f^*(n) \leq nx_0 - (nx_0 - f(x_0)) = f(x_0).$$
Posons par ailleurs $m_0 = f'_d(x_0)$ et montrons que $f^*(m_0) = x_0m_0 - f(x_0)$. La convexité de f assure que, pour tout réel $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0}{x-x_0} \geq m_0$ et donc
$$m_0x - f(x) \leq m_0x_0 - f(x_0).$$
De même, pour tout réel $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'_g(x_0) \leq m_0$ et donc
$$m_0x - f(x) \leq m_0x_0 - f(x_0).$$
Donc $x_0m_0 - f(x_0) = \sup_{x\in R}(m_0x - f(x)) = f^*(m_0)$. Donc $f(x_0) = m_0x_0 - f^*(m_0) \leq (f^*)^*(x_0)$
Donc, au total,
$$(f^*)^* = f.$$
6. Soit (p,q) un couple de réels conjugés et (x,y) un couple de réels positifs. $f_p^*(y) \geq yx - f_p(x)$, donc d'après 3.,
$$xy \leq f_p(x) + f_q(y).$$
Ce qui est l'inégalité voulue.