DE LA RÉDACTION MATHÉMATIQUES

Comme toute littérature, la littérature mathématique obéit à des règles. Ces règles sont d'autant plus importantes que la nature même de notre discipline, précise et rigoureuse, les réclame afin de pouvoir transmettre nos raisonnements avec exactitude et la certitude d'être compris. La pensée mathématique qui se doit d'être univoque et sans ambiguïté se livre à travers un langage très codifié, pauvre mais précis, contraignant mais universellement entendu par la communauté mathématique, elle utilise la langue usuelle (français, anglais, etc.) mais elle en réglemente l'usage, en ce qui concerne tant les termes employés que la structure logique des phrases. Nous allons donc examiner rapidement quelques usages en vigueur pour satisfaire aux canons de l'écriture mathématique et, ce faisant, apprendre à communiquer rapidement et sûrement notre pensée.

A cette exigence élevée s'ajoute pour vous la nécessité plus terre à terre d'obtenir la meilleure note possible au concours, or la notation tient compte, pour une part importante, de la qualité de la rédaction. A la préoccupation consciente de l'examinateur de prendre en compte cette dernière, parfois mentionnée en en-tête des énoncés, s'ajoute les faits qu'une copie limpide et d'un tour usuel se lit plus vite qu'une copie absconse et abstruse à la formulation originale ou alambiquée et qu'un correcteur qui s'acquitte vite de sa besogne est un correcteur heureux, et qu'enfin et surtout un correcteur heureux est un correcteur **généreux**.

Dans cet ordre de préoccupation, il va sans dire que la qualité de la graphie, la lisibilité de l'écriture, la présentation comptent significativement dans la note. Pour vous y habituer, je tiendrai compte cette année de ces éléments dans ma notation.

! **En particulier je ne rémunérerai pas les questions rédigées de façon illisible, celles où les questions ne seraient pas numérotées ou encore celles dont les résultats ne seraient pas encadrés ou soulignés.**

I. STRUCTURE DES PREUVES

I.1 Affirmation mathématique, conjonctions « si alors » et « si et seulement si »

Contrairement à la logique mathématique où l'on traite du calcul propositionnel, en mathématique nous manipulons comme dans la langue courante des affirmations[1] , Lorsque l'on écrit « $x > 3$ » ou « *l'application* f *est continue*, il ne s'agit pas de propositions susceptibles d'être vraies ou fausses mais de certitudes : x est bel et bien supérieur strictement à 0, la fonction est à coup sûr continue. En logique lorsque on dissèque la pensée mathématique on écrit « *la proposition* $''x > 3''$ *est vraie* » . La seule dérogation à cette règle est le cas de propositions (au sens grammatical), nuancées par les conjonctions *si alors* ou *si et seulement si* qui perdent du coup leur statut d'affirmations. Dans l'affirmation

$$\text{« } \textit{si } f \textit{ est dérivable alors } f^2 \textit{est dérivable, } \text{»} \tag{1}$$

1. Nous entendons par affirmation, affirmations vraies (dans le contexte du texte).

les deux phrases ≪ f est dérivable ≫ et ≪ f^2 est dérivable ≫ ne sont pas des affirmations mais des propositions susceptibles l'une et l'autre d'être vraies ou fausses. L'affirmation (1) nous dit seulement que si la première est vraie il en est de même de la seconde. De même l'affirmation

$$\ll f \textit{ est continue si et seulement si } -f \textit{ est continue, } \gg \tag{2}$$

nous apprend que f et $-f$ sont simultanément continues ou simultanément non continues.

Les théorèmes et les propositions du cours sont des affirmations du type ≪ *si P alors Q* ≫ ou, un peu plus rarement du type ≪ *P si et seulement si Q* ≫. Pour prouver un résultat du premier type on suppose P et l'on montre Q. dans le second le plus souvent on suppose P et l'on montre Q, puis on suppose Q et l'on montre P, ce qui revient en fait à prouver les affirmations ≪ *si P alors Q* ≫ et ≪ *si Q alors P* ≫, affirmations dites réciproques l'une de l'autre. On se ramène donc presque toujours à prouver des résultats du premier type. Pour ce faire le raisonnement mathématique lui même utilise presque toujours des résultats du premier type, en suivant le schéma dit de *modus ponens.*

I.2 Raisonnement par *modus ponens*

Le schéma le plus classique de raisonnement (*modus ponens*) est le suivant : on dispose de l'affirmation P, un résultat du cours ou démontré précédemment affirme ≪ *si P alors Q* ≫, on peut donc affirmer Q. P est l'*hypothèse* du raisonnement Q la *conclusion.* Ce raisonnement se traduit au moyen de la conjonction *donc* (*therefor* en anglais). Exemple :

≪ *f est une application continue sur le segment* $[0,1]$ donc*, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue.* ≫

ou encore

≪ *f est une application continue sur le segment* $[0,1]$ donc *f est uniformément continue (théorème de Heine).* ≫

Lorsque on doit se référer non pas à un théorème porteur d'un nom mais à un résultat antérieurement démontré, on peut étiqueter ce dernier. L'étiquetage se fait alors en bout de ligne au moyen de nombres (dans l'ordre croissant) ou éventuellement d'un signe entre parenthèses (les crochets [ ] sont réservés pour les références bibliographiques), (1),(2),. . .,(1515), (∗), (†) . . . On désigne alors dans la suite ce résultat par la même étiquette :

≪ *pour tout réel x,*

$$|f(x)| \leq a \exp(-x) + b. \tag{3}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$,

$$|F(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

donc d'après (3),

$$|F(x)| \leq \int_0^x a \exp(-x) + b \, \mathrm{d}t. \gg$$

Lorsque dans ce type de raisonnement le résultat utilisé est élémentaire on omet de s'y référer :

≪ $f' > 0$ donc *f croît.* ≫

On peut enchaîner plusieurs raisonnements par *modus ponens*, la conclusion de l'un étant l'hypothèse du suivant, selon le model ≪ *. . . P donc Q donc R. . .* ≫ :

≪ *f est dérivable sur le segment* $[0,1]$*, donc f est continue sur le segment* $[0,1]$*, donc f est bornée.* ≫

Lorsque un *modus ponens* exige comme hypothèse non seulement la conclusion du précèdent mais une ou plusieurs autres affirmations précédemment obtenues, on introduit celles-ci par la conjonction *or* ou *par ailleurs*, suivant le schéma ≪ *...P donc Q or Q' donc R ...* ≫ (pour le deuxième *modus ponens* on utilise le résultat ≪ *si Q et Q′ alors R* ≫) :

...donc $f(0) < 0$ et $f(1) > 1$, or f est continue, donc d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe t élément de $]0,1[$ tel que $f(t) = 0$. ≫

On peut bien évidemment personnaliser un raisonnement et le rendre plus palpitant en accompagnant les ≪ donc ≫d'adverbes qui viennent en quelque sorte souligner la tension d'une preuve :
≪ *donc également* ≫, ≪ *donc enfin* ≫, ≪ *donc finalement* ≫ ...

I.3 Raisonnement par équivalence

Les raisonnements par équivalence sont en général difficiles et leur usage doit rester exceptionnel, d'autant que dans un raisonememnt par double équivalences, une des deux équivalence peut souvent se réduire à une vérification de pure forme :

« • *Soit a un réels x. Supposons que a vérifie la propriété (**P**). Alors ....*

Donc.....

Et donc $a = 2$ ou 3.

• *On vérifie sans mal que 2 et 3 vérifient (**P**).*
*Conlusion : l'ensemble des réels x vérifiant (**P**) est $\{2, 3\}$;* »

Lorsque l'on fait un raisonnement par équivalence la structure est proche de celle d'un raisonnement par *modus ponens* et est ponctuée par des « donc ». Exemple :

« *Soit M un point de P et z son affixe. La propriété* (**P**) *est vérifiée par M si et seulement si z vérifie :*

$$Q(z) = 0,$$

où Q est le polynôme...... Or $Q(z) = 0$ si et seulement si $z = j$ ou $\bar{j}$.

Donc M vérifie (**P**) *si et seulement si M a pour affixe j ou $\bar{j}$, soit si et seulement si $M = O + \frac{-1}{2}\vec{i} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.* »

Le dernier « soit » traduit une équivalence triviale qui est de l'ordre de la variation graphique ; par exemple « $x - 2 = 1$ *soit* $x = 3$ ». On peut aussi employer « c'est-à-dire ». Mis à part ce cas on doit reprendre le premire membre de la proposition initial : « *Donc M vérifie* (**P**) *si et seulement si...* » à chaque fois.

II. DES DIVERS USAGES DU ≪ SI ≫ ET DU SIGNE ≪ = ≫

II.1 Le ≪ si alors ≫

Nous venons de voir l'importance des affirmations du type ≪ *si P alors Q* ≫. Dans ce type d'affirmation mathématique nous ferons impérativement suivre le ≪ si ≫de la locution ≪ alors ≫ [2], nous éloignant ainsi de l'usage de la langue commune. On dit que P est un condition suffisante pour avoir Q et que Q est une condition nécessaire pour avoir P. Nous proscrirons donc soigneusement les affirmations de la forme ≪ *Q si P* ≫, parce qu'elles héritent de l'ambiguïté que le langage commun accorde au ≪ si ≫. Expliquons. Lorsque l'on dit ≪ je sortirai s'il ne pleut pas ≫ il est très difficile de savoir qui est la condition nécessaire de l'autre. Nous pouvons évidemment entendre en bon mathématicien ≪ s'il ne pleut pas alors je sortirai ≫, l'absence de pluie est une condition suffisante à la sortie, d'un point de vue mathématique rien ne nous est dit sur le comportement du locuteur dans le cas ou il pleuvrait. Mais le ≪ je sortirai ≫, loin d'être une résolution ferme, peut probablement, suivant le contexte et l'intonation du locuteur être un

2. De même en anglais utilise-t-on "*if ...then*".

vague intention, et l'absence de pluie une nécessité à la sortie ; la phrase se traduit alors en « je sortirai probablement... (du moins) s'il ne pleut pas », ou en « je sortirai probablement... à condition qu'il ne pleuve pas ». ce glissement sournois de sens fait maintenant de l'absence de pluie une condition nécessaire à la sortie : si la sortie a lieu c'est bel et bien qu'il n'aura pas plu. Voilà pourquoi, pour vous protéger de ce genre d'ambivalence, en rédigeant les mathématiques, **!** **vous ferez suivre systématiquement le « si » de son « alors »**, avec la rigidité implacable d'un compilateur d'ordinateur.

II.2 Le « si et seulement si »

Le « si » se retrouve aussi, on l'a vu, dans la locution « si et seulement si »[3] On dit parfois que, dans une affirmation du type « P *si et seulement si* Q », les deux propositions P et Q sont *équivalentes*. On peut encore écrire « *pour que P il faut et il suffit que Q* » (Q est une condition nécessaire et une condition suffisante pour avoir P).

II.3 Le « si » de définition

Il existe une occasion importante où la conjonction « si » se rencontre seule, c'est dans l'énoncé d'une définition ; c'est-à-dire lorsque nous attribuons un nom à une propriété. Par exemple :

« **Définition :** *On dit qu'une application f de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$ *est dérivable si elle est dérivable en tout point de* $\mathbf{R}$. »

Pour ma part, il m'arrive, afin d'éviter toute confusion du « si » de définition avec un « si…alors » qui aurait perdu son second terme, d'employer dans les définitions la locution « *si par définition* ».

Remarques :

— Une définition peut être introduite parfois par d'autres locutions comme *lorsque*, *quand*…
« **Définition :** *Une application f de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathbf{R}$ *est dite dérivable quand elle est dérivable en tout point de* $\mathbf{R}$. »

— Un usage classique dans la littérature du « si » isolé est dans l'énumération de cas disjoints qui balayent toutes les éventualités, par exemple :
« …on obtient donc :

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x > 1, \\ 0 \text{ si } -1 \leq x \leq 1, \\ -x \text{ si } x < -1. \end{cases}$$

»

II.1 Les différents signes « = »

Il existe plusieurs significations au signe « = ». La première, celle qui vient en premier en tête, marque l'identité de deux éléments « $a{=}b$ » signifie que « a est b ». Le signe d'égalité, dans ce sens, définit sur chaque ensemble une relation d'équivalence, la plus fine de toutes : chacune de ses classes se réduit à un élément.

Un autre usage important du signe « = » est celui de définition. Quand on écrit « *posons* $\Delta = b^2 - 4ac$. », on n'affirme pas l'identité entre l'élément $b^2 - 4ac$ et l'élément Δ qui du reste « n'existe pas encore », mais l'on donne à l'élément $b^2 - 4ac$ un nouveau nom plus court. La différence entre le signe d'égalité du premier type est celui du second type est du même ordre qu'entre la locution « *si et seulement si* » et le « *si* » de définition.

Certains auteurs notent le signe « = » de définition de façon différente du signe d'égalité, ils utilisent le signe « $\underset{\text{déf}}{=}$ »ou, ce qui est plus moderne et directement inspiré de la programmation informatique, le signe « $:=$[4] ». Cette tendance est loin d'être prédominante et absente des

3. En anglais on dit de même "*if and only if*".

4. Notons qu'à l'oral, où la rédaction est très différente et beaucoup plus souple on peut utiliser le sign $=$: pour définir du coté droit, on peut même faire tourner de $\pm\frac{\pi}{2}$, ce signe pour donner un nom par dessus ou par dessous à une quantité déjà écrite. La règle est simple les deux points sont du côté du terme défini.

publications scientifiques, On peu donc se contenter d'un bête signe « = », à la condition expresse toutefois de respecter les règles suivantes.

— la définition est précèdée d'une expression qui ne laisse aucun doute quant à la nature du signe *égale* :
  « *Posons* $\Delta = b^2 - 4ac$. », « *Introduisons la notation* $\Delta = b^2 - 4ac$. », « *Définissons* $\Delta = b^2 - 4ac$. »...
— l'élément défini est à gauche, l'élément qui le définit à droite
— une définition avec un signe égal est suivie d'un signe de ponctuation fort ou d'une autre définition, mais, en aucun cas d'une égalité, d'une inégalité ou tout autre calcul, ce dans un souci de clarté. Ainsi écrira-t-on :
  « *Posons* $\Delta = b^2 - 4ac$. *On a* $\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4\Delta'$, *où l'on a posé* $\Delta' = b'^2 - ac$. »
  et en aucun cas
  « *Posons* $\Delta = b^2 - 4ac = (2b')^2 - 4ac = 4\left(b'^2 - ac\right) = 4\Delta'$. »

On notera que dans la définition d'un terme les deux membres ne sont pas symétriques, contrairement à ceux de l'égalité, ce que traduit bien la forme graphique du signe « := ».

Remarque : le signe « = » peut avoir encore d'autre sens :
— Le second membre qu'il introduit contient un « petit o » ou « un grand o », donc un terme qui n'est pas un élément défini. Le signe « = » n'a pas alors le sens d'*égal*. « $f(x) = o\left(x^2\right) \ (x \to +\infty)$ » signifie que $f(x)$ est un petit o de x^2 au voisinage de $+\infty$. « $f(x) = \sqrt{x} + 2x + o\left(x^{3/2}\right) \ (x \to +\infty)$ » signifie que $f(x) - \sqrt{x} - 2x$ est un petit o de $x^{3/2}$ au voisinage de $+\infty$. En ce sens le signe « = » ne porte aucune symétrique.
— Enfin le signe égal dans une *équation* à un sens assez particulier. Une équation n'est pas un égalité ! Elle ne saurait en être une, puisqu'elle contient une inconnue, qui par définition n'est pas définie. Une équation indique l'existence d'un problème à résoudre. Quand on écrit
  « déterminer les solutions réelles définies sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle
  $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos(t)y \text{ »}$$
  cela signifie que l'on cherche les applications φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dérivables telles que pour tout réel t, ait lieu l'égalité $\varphi'(t) = \cos(t)\,\varphi(t)$.

III. QUANTIFICATION DES VARIABLES

III.1 Quantificateurs universels et existentiels

Dans une affirmation mathématique certains signes x, y, A, etc., représentent des variables c'est-à-dire qu'elles représentent des éléments non déterminés d'un ensemble que l'on précise et dont dépend l'affirmation. Chacune des variables doit dans l'affirmation être introduite par un quantificateur, c'est-à-dire une expression qui précise le rôle qu'elles y jouent. Les quantificateurs sont essentiellement au nombre de trois.

1. Le **quantificateur universel :** « *pour tout élément ...de* ».
   L'affirmation P : « *pour tout élément* x *de* X, $p(x)$ », où $p(x)$ est une égalité, une inégalité ou toute propriété dépendant de x, permet d'affirmer, pour un élément de X quelconque, disons a, $p(a)$. Autrement dit on peut dans P remplacer la variable x par n'importe quel élément fixé de X. Dans ce type de quantification le « tout » qui a le sens de « un quelconque » est de préférence au singulier. On n'écrira donc : « *pour tout* x *et tout* y *éléments de* X... » plutôt que « *pour tous* x *et* y *éléments de* X ... » [5].
2. Le **quantificateur existentiel :** « *il existe un élément ... de* ».
   L'affirmation P : « *il existe un élément* x *de* X, *tel que* $p(x)$ » dit que pour au moins un élément de X, disons a, on peut affirmer $p(a)$. Attention il s'agit d'une existence théorique, d'un résultat non constructif, on ne prétend en aucun cas qu'il est possible d'expliciter un tel élément.

5. Plus rarement, on quantifie de façon universelle par : *quel(s) que soi(en)t ... élément(s) de* ce qui est plus long et présente des difficultés orthographiques insurmontables de nos jours par la population scolaire.

3. Le **quantificateur d'existence et d'unicité :** ≪ *il existe un et un seul élément ...de* ≫.

   L'affirmation P : ≪ *existe un élément x de X, tel que $p(x)$* ≫ dit que pour un élément de X, disons a, on peut affirmer $p(a)$ et pour b élément de X distinct de a on peut affirmer la négation de $p(b)$. Attention il s'agit là encore d'un résultat non constructif.

Toute les variables doivent être impérativement quantifiées suivant des modalités que nous allons préciser dans le paragraphe suivant.

! **Les copies dans lesquelles les variables ne seraient pas quantifiées seront lourdement sanctionnées** .

Remarque : lorsque les éléments de l'ensemble qui apparaît dans une quantification ont un nom, *entiers naturels, réels, complexes* ... on peut évidemment adapter la formulation de cette dernière : ≪ *pour tout entier naturel n* ≫ , ≪ *pour tout réel x* ≫ , ≪ *il existe un complexe z* ≫ ...

III.2 Rédaction pratique

Pour un quantificateur existentiel (ou d'existence et d'unicité), il est possible de ne l'écrire qu'une fois. En fait tout se passe comme si la variable introduite par un quantificateur existentiel devenait une constante choisie une fois pour toute. Ainsi écrira-t-on : ≪ *Il existe t_0 élément de $\mathbf{R}_-^*$ tel que $f(t_0) = 0$. Or on a vu que $f(0) = 0$, donc, f étant par ailleurs dérivable, il existe un élément t_1 de $]t_0, 0[$ tel que $f'(t_1) = 0$.* ≫ Pour sa deuxième occurrence t_0 est non quantifié. De plus en plus de personnes s'éloignent de cet usage et préfèrent remplacer le ≪ il existe ≫ par une expression qui laisse moins de doute sur le statut de constante de l'objet mathématique du genre ≪ on peut choisir un élément η de $\mathbf{R}_+^*$... ≫, ≪ on dispose d'un élément x de A... ≫ . Je procéderai de la sorte en distinguant ainsi l'existence potentielle, qu'on utilise dans un énoncé d'un résultat et l'existence actuelle qui est le choix d'un élément au cours d'une preuve, dont l'existence est assuré par un théorème.

Remarque : La possibilité de choisir un élément vérifiant une propriété, lorsqu'il en existe est banal, en particulier si A est un ensemble non vide on peut choisir un élément a dans A. La chose pose déjà problème, si $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'ensembles non vides ; choisir pour tout entier n un élément a_n dans x_n et donc construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ exige le plus souvent que l'on adjoigne aux axiomes qui fondent les mathématiques, l'axiome *du choix dénombrable*. Lorsque l'on dispose non plus d'une suite d'ensembles mais d'un ensemble d'ensembles la question est délicate. Ainsi bien que pour toute partie A non vide de $\mathbf{R}$ il existe un élément de A, choisir pour tout $A \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ un élment x_A exige d'ajouter aux axiomes de bases le très controversé *axiome du choix*. Tout ceci légitime la distinction faite entre l'existence et le choix.

Pour un quantificateur universel la règle est de **le répéter à chaque occurrence de la variable**[6]. Cette exigence est lourde, surtout si beaucoup de variables sont ainsi quantifiées, c'est pourquoi pour établir une affirmation du type ≪ *pour tout élément x de X, $p(x)$* ≫ on procède presque toujours ainsi :

1. On écrit ≪ *Soit*[7] *x un élément de X.* ≫ Le ≪ soit ≫ fait de x une constante fixée arbitraire, sans autre contrainte qu'elle appartienne à X.
2. On écrit le raisonnement où x constante s'emploie seul, sans quantification.
3. On peut, bien que l'usage à un certain niveau l'omette, écrire ≪ *x étant quelconque, on a prouvé le résultat demandé* ≫ .

Remarque pratique : Si dans un énoncé de concours une grandeur est introduite par un « soit » il est inutile de répéter la déclaration :

6. On peut toute fois dans une même phrase prolonger l'effet du « pour tout » à la phrase entière, mais pas au delà du point qui la clos. « *Pour tout entier n, l'application f_n est majorée, posons M_n un majorant de f_n. Pour tout $n \in \mathbf{N}$.. .* »

7. Le ≪ soit ≫ dans la langue courante est en général invariable, toutefois l'usage mathématique le plus répandu est de le conjuguer : ≪ *Soient x et y des éléments de X* ≫.

ÉNONCÉ	COPIE
Partie I. **1.** Soit a un réel non nul. Montrer que....	Partie I. **1.** On a $a^2 = ...$

Mais par contre :

ÉNONCÉ	COPIE
Partie I. **1.** Montrer que pour tout réel a non nul....	I. **1.** Soit a un réel non nul. On a $a^2 = ...$

IV. REDACTION

IV.1 Abréviations

Dans le cadre d'une rédaction rapide et relâchée (correction d'exercices), on utilise parfois quelques abréviations *DL DSE IPP* .... Je n'y recourerai jamais (et vous aussi) dans l'écriture du cours ou dans des textes dactylographiés.

! **Je sanctionnerai les copies en comportant.**

Dans le même ordre d'idées, n'en usez jamais à l'oral sauf d'avoir constaté que l'examinateur en use lui-même. Evitez aussi les abréviations orales du type « céache, essache, bornesup ...» et préférez leur « cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique, borne supérieure ...»

Une exception peut être faite pour « *si et seulement si* », abrégé en « *ssi* » [8]. Cette abréviation est certes proscrite dans les ouvrages et les publications mathématiques, et je ne l'utiliserai pas moi-même dans les textes dactylographiés, toutefois je la tracerai parfois au tableau et ne sanctionnerai pas son utilisation en devoir.

On rencontre encore parfois dans les copies hélas, force symboles logiques du calcul des prédicats. Introduite initialemment par les logiciens pour formaliser le discours mathématique sur lequel ils raisonnent [9], on tenta imprudemment et mal à propos, en France, dans les années 70, de les faire pénétrer via les programmes du secondaire, dans l'écriture des mathématiques comme un remède miracle, croyait-on, aux difficultés de compréhension. A cet effet, on appréciera le gain de clarté à écrire

$$\left(\neg\Big(\forall n \in \mathbf{N}(x_{n+1} \geq x_n)\Big) \wedge \neg\Big(\forall n \in \mathbf{N}(x_{n+1} \leq x_n)\Big)\right) \Rightarrow \left(\Big(\exists n \in \mathbf{N}\,(x_{n+1} > x_n)\Big) \wedge \Big(\exists n \in \mathbf{N}\,(x_{n+1} < x_n)\Big)\right),$$

plutôt que : « *si la suite* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *n'est ni croissante ni décroissante, alors il existe un terme de la suite,* x_p *strictement inférieur au suivant et il existe un terme* x_q *strictement supérieur au suivant.* » Cette passade hexagonale est restée presque totalement étrangère à l'écriture des grands ouvrages mathématiques, elle est aux mathématiques ce que Beaubourg fut à la même époque à l'architecture. La plupart des concours y ont renoncé dans leur sujets.

Seul le signe $\forall$ peut être utiliser et encore avec parsimonie dans des formules centrées qui définissent un objet ou donnent la conclusion d'un calcul, l'emploi de toute autre signe logique est à proscrire dans vos copies comme il est de nos jours dans les énoncés de concours. Exemples :

« Pour tout réel t, on définit la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n(t) = \cos(tn^2\pi) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

8. En anglais, on utilise de même l'abréviation "*iff*".

9. En revanche, dans les ouvrages de logiques ou de théorie des ensembles leurs auteurs écrivent évidemment leurs raisonnements en toutes lettres, réservant les signes bizarres au discours mathématique qui est l'objet dont ils parlent

»

« On a ainisi prouvé l'existence d'un réel strictement positif r tel que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n \geq r v_n.$$

».

Une exception existe lorsqu'il s'agit, essentiellement en probabilités, de définir grâce à des acollades des ensembles, par exemple $\{\omega \in \Omega | \forall n \in \mathbf{N}^* \, \exists k \in [\![n + \infty [\![\; X_k(\omega) = 0\}$.

En aucun cas ils ne peuvent être mélangés à du texte en français et encore moins y servir d'abréviation.

! **Les questions dans les devoirs qui utiliseraient les symboles logiques comme abréviation ne seront pas rémunérées**.

IV.2 L'abréviation « $\in$ »

Les signe $\in$ et $\subset$, en dehors de leur usage licite :
« *$x \in A$, or $A \subset B$, donc $x \in B$.* »
sont parfois employés comme abréviations de « *élément de* » ou « *appartenant à* » pour le premier et de « *partie de* » pour le second. Ainsi trouve-t-on
« *soit $A \subset \mathbf{R}$* »
en place et lieu de « *soit A une partie de $\mathbf{R}$* »
ou encore
« *soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$* », « *pour tout $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$* »,
en place et lieu de
« *soit ε un réel strictement positif* », « *pour tout ε élément de $\mathbf{R}_+^*$* ».
Ces deux dernières expressions s'abrègent encore abusivement en
« *soit $\varepsilon > 0$* », « *pour tout $\varepsilon > 0$* » [10].

Cet usage est abusif, et d'aucuns affirment que le signe $\in$ ne se conjugue pas ! Je n'emploierai jamais ces tournures dans l'écriture de résultats du cours, vous ferez de même. je ne l'emploierai pas davantage dans les feuilles dactylographiées. Toutefois ces emplois abusifs, sont très fréquents dans les textes mathématiques et les meilleurs auteurs, ceux dont la rédaction et le style passent pour être exemplaires, y ont fréquemment recours, c'est pourquoi, je les utiliserai lors de la correction d'exercices ou dans certaines démonstrations. Vous pourrez y recourir librement dans les devoirs, ce qui constitue un gain de temps appréciable.**Vous vous limiterez néanmoins aux seules abréviations concoctées avec le signe, $\in$ du type « *pour tout $x \in A$* », « *soit $x \in A$* », *il existe $x \in A$* »**

III.3 Ecriture des expressions mathématiques

Les expression mathématiques, formules contenant des égalités, des inégalités, des signes mathématiques ($\in$, $\subset$, $\perp$ ...) s'écrivent de deux façons. La première consiste à les inclure dans le texte en français :

« *Nous avons pour tout réel x, $f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-x^2\right)$, donc $f \in L^p(\mathbf{R})$, pour tout élément p de $[1, +\infty[$.* »

La seconde consiste à la mettre « hors texte », c'est-à-dire qu'elle s'écrit seule sur une, ou parfois plusieurs lignes sans texte. Ecrite sur une seule ligne, elle est alors **centrée** :

Fixons par ailleurs $p > 3$, l'injection canonique de $W^{1,p}(\mathcal{B}_R)$ dans $L^\infty(\mathcal{B}_R)$ étant continue, le lemme II.2.1 donne pour tout élément t de $[0, T]$:

$$\|\nabla_x E(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathcal{B}_R)} \leq C_{R,T}. \tag{4}$$

10. Les abréviations du type « *pour tout $\varepsilon > 0$* » sont ces dernières années devenues trop dangeureuses : dans l'écriture des négations de propositions elles deviennent trop souvent « *il existe $\varepsilon < 0$* », c'est-à-dire que leur sens abusif (emploi d'un signe $>$ au lieu de l'appartenance à un ensemble) n'est plus clairement perçu par le nouveau public de nos classes.

L'inégalité de Morey, elle, assure, en posant $s = 1 - \dfrac{3}{p}$, que pour tout x et tout x', éléments de $\mathcal{B}_R$:

$$|\nabla_x E(t,x) - \nabla_x E(t,x')| \leq C_{R,T}|x - x'|^s. \tag{5}$$

Ecrite sur sur deux lignes, la première est appuyée à **gauche** la seconde à **droite**, la coupure se fait avant un signe opératoire $+, -, \times, \wedge$, ou après un signe relationnel $=, <, \perp$ etc. On évite si possible de couper une parenthèse ou un crochet :

...Enfin, toujours grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\iint_{\mathcal{B}_R \times \mathcal{B}_R} \iint_{\mathcal{B}_R \times \mathcal{B}_R} \frac{|\nabla_{x,v} H(t,x,v) - \nabla_{x,v} H(t,x',v')|^2}{|(x,v) - (x',v')|^{6+2a}} \mathrm{d}x\mathrm{d}v\mathrm{d}x'\mathrm{d}v' \leq$$

$$\iint_{\mathcal{B}_R \times \mathcal{B}_R} \iint_{\mathcal{B}_R \times \mathcal{B}_R} T \frac{\int_0^T |\nabla_{x,v} h(s,x,v) - \nabla_{x,v} h(s,x',v')|^2 \,\mathrm{d}s}{|(x,v) - (x',v')|^{6+2a}} \mathrm{d}x\mathrm{d}v\mathrm{d}x'\mathrm{d}v'.$$

Et donc ...

On recours à une écriture hors texte pour :

— les formules trop longues qui incluses dans le texte seraient coupées, [11]

— Les formules importantes que l'on met ainsi en valeur, notamment celles qui nécessitent de porter une étiquette.

! **Les formules dans le texte ou hors texte sont, dans tous les cas, ponctuées comme du texte ordinaire.**

IV.3 Usages typographiques

Donnons en vu de la frappe de votre tipe. quelques règles de typographie mathématique.

— Les éléments mathématiques représentés par des minuscules sont en italique [12] : Soient x un réel et n un entier naturel.

— Les chiffres, les signes opératoires les parenthèses s'écrivent en caractères droits : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

— Les fonctions pré-définies, qui sont en fait des abréviations, et de plus en plus souvent les éléments différentiels s'écrivent en caractères droits, ainsi écrit-on : $\cos t$, $\mathrm{ch} t = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$, $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$, $\mathrm{Det} M$, $\mathrm{Tr} M$, $\dim(\mathrm{Im}(u))$ etc.

— L'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des rationnels, des réels et des complexes se notent par les majuscules droites grasses : $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$. On peut aussi les noter par des lettres échancrées, par exemple $\mathbb{N}$ au lieu de $\mathbf{N}$, cette notation provient de la tentative de représenter au tableau avec de la craie les caractères gras exigés par ces ensembles.

— On recourt aussi à d'autres fontes. Des majuscules *calligraphiées* comme dans certains espaces d'applications : $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$ ou des espaces matriciels $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$... mais aussi des lettres gothiques héritées des algébristes allemands du XIX$^{\text{e}}$ siècle : $\mathfrak{S}_n$; $\Im(z)$, $\Re(z)$...

---

11. dans des ouvrage imprimés il arrive parfois hélas que des formules assez courtes incluses dans le texte soient coupées, évitez cela dans vos devoirs

12. l'usage pour les majuscules est plus souple, beaucoup, notamment des géomètres, les laissent en caractères droits (le risque de les confondre avec le texte en français et moindre que pour les minuscules) ; d'autres les mettent en italique.

Avertissement

Les devoirs en temps limité et à la maison permettent de faire des progrès tout au long de l'année. Il est légitime que les premiers soient moins réussis que les suivants. Par contre j'exige dès le premier le respect scrupuleux des règles énoncées dans ce texte. Dans les DS les questions qui offenceraient de quelconque façon ces exigences ne seront pas corrigées, dans les DM elles seront à refaire.