DM n°1

Premier Problème

Grands ensembles de vecteurs presque orthogonaux —

Soit un entier $m \geq 1$. R^m sera dans la suite muni de sa structure euclidienne canonique, $\langle\cdot|\cdot\rangle)$ désignera le produit scalaire canonique, $\|\cdot\|$ la norme associée. On admettra qu'il existe une notion de volume sur $\mathbf{R}^m$ semblable à celle en domension 3 et que le volume d'une boule et proportionnel à la puissance m^{e} de son rayon.

Par S^{m-1} on désigne la sphère unité de $\mathbf{E}$. Soit $u = (u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de S^{m-1}, où I désigne un ensemble admettant au moins deux éléments. Nous appellerons paramètre de cohérence de la famille que nous noterons $C(u)$ le nombre réel :

$$C(u) = \sup\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j) \in I^2, i \neq j\}.$$

1. Justifier que le paramètre de cohérence de u est bien défini
2. Que dire d'une famille V à valeur dans S^{m-1} de paramètre de cohérence nul. Montrer qu'une telle famille est finie.
3. Soit ε un élément de $]0,1[$. On supose que $C(u) \leq \varepsilon$.
   (a) Soit R un réel strictement positif. Donner une codition sur R pour que pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de I, les boules fermées de rayon R et de centre u_i et u_j soient disjointes.
   (b) Montrer que I est fini et que
   $$|I| \leq \left(1 + \sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right)^m.$$

   On appelle vecteur de Rademacher à valeur dans S^{n-1} tout vecteur aléatoire X, de $\mathbf{R}^m$ de la forme
   $$X = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1, X_2, ..., X_m),$$
   dont les composante $X_1, ...X_m$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Rademacher :
   $$\text{pour } i = 1, \ldots, ...m,\ \mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \tfrac{1}{2}$$
4. Soient $X = \frac{1}{\sqrt{m}}(X_1, X_2, ..., X_m)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{m}}(Y_1, Y_2, ..., Y_m)$ des vecteurs de Rademacher indépendants.
   (a) Montrer que pour tout réel t, $\operatorname{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$
   (b) Montrer que pour tout réel t,
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m$$
   (c) Montrer que
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2m}\right)$$
5. Soient σ et λ des éléments de $\mathbf{R}_+^*$ et Z une variable aléatoire réelle telle que pour tout $t \in \mathbf{R}$,
   $$\mathrm{E}(\exp(tZ) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$
   Montrer :
   $$\mathbf{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$
6. (a) Montrer que $\mathbf{P}\left(|\langle X|Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)$.

(b) Soient $X^1, X^2, \ldots, X^N$ des vecteurs de Randemacher à valeurs dans S^{m-1} mutuellement indépendants. Déduire de la sous-question précédente que :

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i | X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < N^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right).$$

7. On suppose que $\delta \in]0,1]$ et $m \geq 2\frac{\ln(N^2/\delta)}{\varepsilon^2}$. Majorer $\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i | X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$.

8. Soit $N = \left\lfloor \exp\left(\frac{\varepsilon^2 m}{4}\right)\right\rfloor$ Montrer qu'il existe une famille w de vecteur de S^{m-1} de cardinal N dont le paramètre de cohérence est majorée par ε.

Second problème

Les question précédées d'un astérisque ne sont pas à rédiger.

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels, et id l'application identité de E. La composée de deux endomorphismes f et g de E sera simplement notée fg plutôt que $f \circ g$

Rappels.

— Un endomorphisme f de E est appelé *homothétie* s'il est de la forme $f = \lambda \mathrm{id}$, où $\lambda \in \mathbf{R}$.

— Un endomorphisme f de $\mathbf{E}$ est appelée *projecteur* de $\mathbf{E}$ si $f^2 = f$. On sait alors que $E = \mathrm{im}(f) \oplus \ker(f)$ et que f est la projection sur $\mathrm{im}(f)$ selon $\ker(f)$ (voir feuilles de colles). Autrement dit tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \mathrm{im}(f)$ et $x_2 \in \ker(f)$ et $f(x) = x_1$.

1. Traces et projecteurs

1. * Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. * Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E. Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ ont même trace.

   On peut donc définir sans ambigüité la *trace* de f comme la valeur commune des traces des matrices de f. On note $\mathrm{tr}(f)$ la trace de f.

   Soit p un projecteur de E.
3. * Montrer que $\mathrm{rg}(p) = \mathrm{tr}(p)$.
4. Soient f et g des endomorphismes de E. Montrer que :

$$\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

5. Soit s un endomorphisme de E qui s'écrit :

$$s = \sum_{i=1}^{m} p_i,$$

   où p_1, p_2,...,p_m sont des projecteurs de E. Montrer que $\mathrm{tr}(s) \geq \mathrm{rg}(s)$.

2. Endomorphismes de trace nulle

Dans cette partie f désigne un endomorphisme de E.

6. On suppose dans cette question que f n'est pas une homothétie.

   (a) Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.

   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ dans laquelle la matrice de f est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

   où $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$.

(c) En déduire que si $\mathrm{tr}(f) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de f a une diagonale nulle.

7. On suppose dans cette question que f est de la forme $f = f_1 f_2 - f_2 f_1$ avec f_1 et f_2 des endomorphismes de E. Montrer que $\mathrm{tr}(f) = 0$.

   On va étudier la réciproque.

8. On suppose à présent que $\mathrm{tr}(f) = 0$. On désigne par $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonaux et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ celui des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à diagonale nulle. Enfin on définit l'élément D de $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$, par

$$D = \mathrm{diag}(1, 2, ..., n).$$

   (a) Montrer que $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ sont des espaces vectoriels dont on précisera les dimensions.

   Soit l'application linéaire $\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto DM - MD$.

   (b) Montrer que $\mathrm{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ et que $\ker(\Phi) \subset \mathcal{D}_n(\mathbf{R})$. En déduire que $\mathrm{im}(\Phi) = \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$.

   (c) Montrer qu'il existe f_1 et f_2, endomorphismes de E, tels que : $f = f_1 f_2 - f_2 f_1$.

3. Prescription de la diagonale

(Partie facultative)

Dans cette partie on suppose que $\underline{n = \dim(E) = 2}$ et on désigne par f un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie.

On se donne des réels t_1 et t_2 tels que : $t_1 + t_2 = \mathrm{tr}(f)$.

9. La question 6.(a) fournit une famille $(x, f(x))$ libre. Montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}$ de E, dont on exprimera les vecteurs au moyen de x et $f(x)$, telle que la matrice de f dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} t_1 & c \\ b & t_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

   où b et c sont des réels.

10. On suppose que la trace de f est un entier et que :

$$\mathrm{tr}(f) \geq \mathrm{rg}(f) = 2.$$

   (a) On suppose que f n'est pas une homothétie. Montrer en utilisant la question 9 que f est une somme finie de projecteurs.

   (b) On suppose que f est une homothétie. Montrer que f est encore une somme finie de projecteurs.

Indications pour le DM n°2

Grands ensembles de vecteurs presque orthogonaux —

1. - $\{|\langle \vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle| \,;\, (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ est *non vide* .
   - Utilisez Cauchy-Schwarz montrer que $\{|\langle \vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle| \,;\, (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ est *majorée* par 1.
2. Supposons V de paramètre de cohérence nul. Alors V est une famille orthonormale, donc libre.....
3. Soit ε un élément de $]0,1[$. On supose que $C(u)\leq \varepsilon$.

   (a) Comme $\varepsilon<1$, choisir $R<\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$.
   Soit alors un couple (i,j) d'éléments distincts de I.
   $$\|u_i-u_j\|^2 = \text{.........} < (2R)^2$$
   Donc <u>les boules fermées B_i et B_j de centres respectifs u_i et u_j de rayon R sont disjointes.</u>

   (b) Pour tout réel strictement positif $R<\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$ Les boules fermées B_k de centre u_k et de rayon R, $k\in I$, sont incluses dans la boule B de centre $(0,0,...,0)$ et de rayon $1+R$. Ces boules étant d'après ce qui précède deux à deux disjointes La somme de leur volumes est inférieur au volume de B.....
   On conlut laissant tendre R vers $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$.

   (a) On évitera de passer par une étude d'application, on utilisera plutôt
   Pour tout réel t,
   $$\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!} \text{ donc } \mathrm{ch}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

   (b) Pour commencer, montrer que que $X_1,...,X_m,Y_1,...,Y_m$ sont mutuellement indépendants.
   D'après le cours on en déduit par une récurrence immédiate l'indépendances mutuelle de :
   $$\exp\left(\frac{t}{m}X_1Y_1\right), \exp\left(\frac{t}{m}X_2Y_2\right), ..., \exp\left(\frac{t}{m}X_mY_m\right)$$
   Donc
   $$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right)=\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^m \exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right)=\prod_{i=1}^m \mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right)$$
   Par la formule de transfert, montrer que
   $$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right)=\mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right).$$

(c) Utilisez les questions (a) et (b).

4. Utilisez l'inégalité de Markov pour majorer $\mathbf{P}(e^{tZ}\geq e^{t\lambda})$ puis comme l'exponentiel est croissante $\{Z\geq \lambda\}\subset\{e^{tZ}\geq e^{t\lambda}\}$
   Optimiser alors en t (minimum d'un trinôme!) on a :
   $$\mathbf{P}(Z\geq\lambda)\leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$
   Par ailleurs
   $$\mathbf{P}(|Z|\geq\lambda)=\mathbf{P}((Z\geq\lambda)\cup(Z\leq\lambda))=\mathbf{P}((Z\geq\lambda)+\mathbf{P}((Z\leq-\lambda)=\mathbf{P}((Z\geq\lambda)+\mathbf{P}((-Z\geq\lambda),$$
   car $(|Z|\geq\lambda)$ est l'union disjointe de $(Z\geq\lambda)$ et $(Z\leq\lambda)$.
   Or la variable $-Z$ satisfait la même hypothèse que Z et donc $\mathbf{P}(-Z\geq\lambda)\leq\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$. Donc au final :
   $$\boxed{\mathbf{P}(|Z|\geq\lambda)\leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

5. (a) Utiliser 4. (c) et 5.

   (b) Montrer que l'événement $\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$ est la réunion des événements $\left(|\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$, $1 \leq i < j \leq N$.
   Ceci étant

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)\right) \leq \sum_{1\leq i<j\leq N} \mathbf{P}\left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right),$$

   etc.

6.

SECOND PROBLÈME

Le coefficient de la i^{e} ligne et j^{e} colonne d'une matrice M sera noté $m_{i,j}$, dans le cas où M est donnée comme une fonction d'une ou plusieurs matrices on le note encore $M[i,j]$.

1. Traces et projecteurs

1. On a :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)[i,i] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,k}b_{k,i}\,;$$

   cette dernière expression étant symétrique en A et B,

$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

2. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ($P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$). On a par associativité de la multiplication de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et la question 1,

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right) =& \operatorname{tr}\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P\right) = \operatorname{tr}\left(\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)P\right)\\ =& \operatorname{tr}\left(P\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)\right) = \operatorname{tr}\left(\left(PP^{-1}\right)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)\\ =& \operatorname{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right).\end{aligned}$$

   La trace ne dépend que de f et non de la base choisie pour en exprimer la matrice.

3. Comme p est un projecteur, $E = \mathrm{im}(p) \oplus \ker(p)$; choisissons donc une base $\mathcal{B}_\prime$, adaptée à cette décomposition en somme directe de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p) = \mathrm{diag}(I_r, O_{n-r})$ où r est la dimension de $\mathrm{im}(p)$, c'est-à-dire le rang de p. Finalement, par 2,

$$\boxed{\operatorname{tr}(p) = \operatorname{tr}(\mathrm{diag}(I_r, O_{n-r}) = r = \mathrm{rg}(p)}$$

4. Soit y un élément de $\mathrm{im}(f+g)$. On dispose par définition d'un élément x de E tel que $y = (f+g)(x)$, mais alors $y = f(x) + g(x) \in \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g)$, et donc

$$\mathrm{im}(f+g) \subset \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g).$$

   Conclure par la formule des quatre dimensions de Grasmann.

5. On montre par récurrence sur m, l'hérédité provenant directement de la question 4, que :

$$\mathrm{rg}(s) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(p_i).$$

   On conclut par 3.Donc,

2. Endomorphismes de trace nulle

6. (a) *Nous allons donner deux preuves. La première est spécifique à la dimension finie et ne saurait se généraliser à un espace vectoriel E qui serait de dimension quelconque. La seconde, plus longue, mais de portée générale n'utilise pas le caractère fini de la dimension de E. Dans les deux cas nous raisonnerons par l'absurde.*

   Supposons qu'au contraire pour tout vecteur $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ soit liée.

   Première preuve — Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une base de E. En particulier, puisque x_k est non nul, on dispose pour $k = 1, 2, ..., n$ d'un réel α_k tel que $f(x_k) = \alpha_k x_k$ et d'un réel α tel que $f(x_1+x_2, ...+x_n) = \alpha(x_1 + x_2 + ... + x_n)$ (la liberté de $(x_1, x_2, ..., x_n)$ interdit la nullité de $x_1 + x_2 + ... + x_n)$). etc.
   Seconde preuve — Pour tout élément x de E non nul on dispose d'un réel α_x (unique d'ailleurs), tel que :

$$f(x) = \alpha_x x$$

   Soient $x_0 \in E \setminus \{0\}$.
   Soit un vecteur y de E non nul. Deux cas se présentent :
   – Premier cas : (x_0, y) est libre.
   Alors $x_0 + y$ n'est point nul et considérer $x_0 + y$.....
   – Second cas : (x_0, y) est liée.

   (b) La sous-question (a) fournit un vecteur e_1 de $\mathbf{E}$ tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre. Posons $e_2 = f(e_1)$ et complétons la famille *libre* (e_1, e_2) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

   (c) Raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace.
   Soit (P_k) la proposition :
   pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension k, de trace nulle, il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est à diagonale nulle.
   • La propriété (P_1) est triviale.
   • Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons (P_k). Soit alors f_{k+1} un endomorphisme d'un espace E_{k+1} de dimension $k+1$. Par la question précédente il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_{k+1})$, de E_{k+1} tel que la matrice de f_{k+1} soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

   où $A \in \mathcal{M}_k$. Posons $E_k = \mathrm{vect}(e_2, ..., e_{k+1})$ et considérons p la projection sur E_k suivant $\mathrm{vect}(e_1)$ ainsi que l'endomorphisme de E_k, $f_k = p \circ f_{k+1|E_k}$ [1]. La matrice de f_k dans la base $(e_2, ..., e_{k+1})$ est A qui est de trace nulle (puisque $0 + \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f_{k+1}) = 0$), donc par (P_k), on dispose d'une base $(e'_2, ..., e'_{k+1})$ de E_k tel que la matrice A' de f_k dans cette base soit à diagonale nulle. etc.

   Remarque. *On peude façon alternative raisonner matriciellement en prenant comme hypothèse de récurrence : « Toute matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle ». On eût alors, dans la preuve de l'hérédité procédé par produits matriciels par blocs. Cette méthode est moins conceptuelle et trouve les faveurs de tous ceux que la lourdeur des produits par blocs n'effrait pas. Vous êtes invité à comparer par vous-même les deux méthodes.*

7.

8. (a) Considérer les deux sous-familles de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ suivantes :

$$\mathcal{F} = (E_{i,i})_{i=1,\dots,n}\ ;\ \mathcal{G} = (E_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n \\ i\neq j}}.$$

   Noter que $|\mathcal{F}| = n$ et $|\mathcal{G}| = n^2 - n = n(n-1)$.
   Remarque : La concaténée de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, donc : $\mathcal{D}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{G}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Autrement dit f_k s'obtient en restreignant f_{k+1} à E_k, puis en projetant sur E_k. La première opération revient matriciellement à ne considérer que les k dernières colonnes, la seconde à éliminer la première ligne.

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. $\boxed{\operatorname{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})}$. $\boxed{\ker(\Phi) \subset \mathcal{D}_n(\mathbf{R})}$

La formule du rang pour l'endomorphisme Φ assure que : $\boxed{\operatorname{im}(\Phi) = \mathcal{G}_n(\mathbf{R})}$.

(c) Excluons le cas où f serait une homothétie, donc nulle (puisque de trace nulle), et où l'endomorphisme nul convient fort bien tant pour f_1 que f_2. Alors 6.(b) nous fournit une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ — notons la F — soit élément de $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$. Mais d'après le point précédent on dispose d'un élément F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que : $F = \Phi(F_2) = DF_2 - F_2D$. Désignons alors par f_1 et f_2 les endomorphismes de E ayant respectivement comme matrices dans $\mathcal{B}$, D et F_2 ; la dernière égalité donne :

$$\boxed{f = f_1f_2 - f_2f_1}$$

3. Prescription de la diagonale

9. Sans trop de difficultés on a :

$$f(x) = t_1x + (f(x) - t_1x).$$

Mais la famille $(x; (f(x) - t_1x))$ est une base de E (déterminant). On conclut par invariance de la trace.

10. (a) Notons $t_2 = \operatorname{tr}(f) - 1$. On a que t_2 est un entier supérieur ou égal à 1. La question 9 nous offre une base $\mathcal{B}''$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{t_2 \text{ termes}}$$

etc....

(b) Dans une quelconque base $\mathcal{B}$ la matrice de f est $\frac{\operatorname{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2$. Distinguer deux cas.
Premier cas. La trace de f est paire.
Second cas. La trace de f est impaire.

Correction du DM n°2

Grands ensembles de vecteurs presque orthogonaux —

1. • $\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ est *non vide*, (si l'on suppose que $|I|\geq 2$ erreur du texte).
   • Par Cauchy-Schwarz, pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de I,
   $$|\langle u_i|u_j\rangle| \leq \|u_i\|\|u_j\| = 1,$$
   si bien que $\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ est *majorée* par 1.

   Donc $\{|\langle\vec{u}_i|\vec{u}_j\rangle|\,;\ (i,j)\in I^2, i\neq j\}$ admet une borne supérieure, et donc :
   le paramètre de cohérence est donc bien défini.

2. Supposons V de paramètre de cohérence nul. Alors V est une famille orthonormale, donc libre, et donc I est fini et
   $$\boxed{|I|\leq m}$$

3. Soit ε un élément de $]0,1[$. On supose que $C(u)\leq\varepsilon$.
   (a) Comme $\varepsilon<1$, il est loisible de choisir un réel strictement positif $R<\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$.
   Soit alors un couple (i,j) d'éléments distincts de I.
   $$\|u_i-u_j\|^2 = \|u_i\|^2+\|u_i\|^2-2\langle u_i|u_j\rangle \geq 1^2+1^2-2\varepsilon = 2(1-\varepsilon). < (2R)^2$$
   Donc les boules fermées B_i et B_j de centres respectifs u_i et u_j de rayon R sont disjointes.

   (b) Pour tout réel strictement positif $R\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$ Les boules fermées B_k de centre u_k et de rayon R, $k\in I$, sont incluses dans la boule B de centre $(0,0,...,0)$ et de rayon $1+R$. Ces boules étant d'après ce qui précède deux à deux disjointes on a que I est fini et que :
   $$\sum_{k\in I}\mathrm{vol}(B_k) = \mathrm{vol}\left(\bigcup_{k\in I}B_k\right) \leq \mathrm{vol}(B),$$
   $\mathrm{vol}(A)$ désignant le volume d'une partie A de $\mathbf{R}^n$.
   En notant v_m le volume de la boule unité de $\mathbf{R}^m$ (non nul) on a donc, Pour tout réel R tel que $0<R<\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$:
   $$|I|R^m v_m \leq (1+R)^m v_m.$$
   et donc en laissant tendre R dans l'inégalité précédente vers $\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}$.
   $$|I| \leq \left(1+\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}\right)^m.$$

   (a) Pour tout réel t, $\mathrm{ch}t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}$, or pour tout entier $n\geq 0$,
   $$2^n n! = 2\times 4\times 6\times ...\times 2n \leq (2n)!$$
   donc $\mathrm{ch}t \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n}}{2^n n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^n}{n!} = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

   (b) Pour commencer, notons que $X_1,...,X_m,Y_1,...Y_m$ sont mutuellement indépendants. En effet, soient $\varepsilon_1,...,\varepsilon_m,\eta_1,...,\eta_m$ des éléments de $\{-1,1\}$.
   $$\mathbf{P}(X_1=\varepsilon_1,...,X_m=\varepsilon_m,Y_1=\eta_1,...,Y_m=\eta_m) = \mathbf{P}(\sqrt{m}X=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m);\sqrt{m}Y=(\eta_1,...,\eta_m))$$
   Donc par indépendance de X et Y,
   $$\mathbf{P}(X_1=\varepsilon_1,...,X_m=\varepsilon_m,Y_1=\eta_1,...,Y_m=\eta_m) = \mathbf{P}(\sqrt{m}X=(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m))\mathbf{P}(\sqrt{m}Y=(\eta_1,...,\eta_m)).$$
   Mais l'indépendance mutuelle d'une part des X_i, $i=1,...,m$, et d'autre part celle des Y_i, $i=1,...,m$ assurent alors :
   $$\mathbf{P}(X_1=\varepsilon_1,...,X_m=\varepsilon_m,Y_1=\eta_1,...,Y_m=\eta_m) = \mathbf{P}(X_1=\varepsilon_1),...,\mathbf{P}(X_m=\varepsilon_m)\mathbf{P}(Y=\eta_1),...,\mathbf{P}(Y_m=\eta_m)..$$

D'après le cours on en déduit par une récurrence immédiate l'indépendances mutuelle de :

$$\exp\left(\frac{t}{m}X_1Y_1\right), \exp\left(\frac{t}{m}X_2Y_2\right), ..., \exp\left(\frac{t}{m}X_mY_m\right)$$

Donc

$$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{m}\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right) = \prod_{i=1}^{m}\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right)$$

Or par la formule de transfert, pour $i = 1, ..., m$,

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right) = \exp\left(\frac{t}{m}\right)\mathbf{P}(X_iY_i = 1) + \exp\left(-\frac{t}{m}\right)\mathbf{P}(X_iY_i = -1),$$

Mais

$$\mathbf{P}(X_iY_i = 1) = \mathbf{P}((X_i = 1, Y_i = 1)\cup(X_i = -1, Y_i = -1)) = \mathbf{P}(X_i = 1, Y_i = 1)+\mathbf{P}(X_i = -1, Y_i = -1) =$$

$$\mathbf{P}(X_i = 1)\mathbf{P}(Y_i = 1)+\mathbf{P}(X_i = -1)\mathbf{P}(Y_i = -1) = \frac{1}{2},$$

par disjonction de $(X_i = 1, Y_i = 1)$ et $(X_i = -1, Y_i = -1)$ puis indépendance de X_i et Y_i, et donc en passant à l'événement contraire $\mathbf{P}(X_iY_i = -1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, pour $i = 1, ..., m$. Donc

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{t}{m}X_iY_i\right)\right) = \mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right).$$

Donc enfin :

$$\boxed{\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) = \left(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{m}\right)\right)^m}$$

(c) La question (a), vient en renfort du résultat de (b) pour dire :

$$\mathrm{E}\left(\exp(t\langle X|Y\rangle)\right) \leq \left(\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t}{m}\right)^2\right)\right)^m = \exp\left(\frac{t^2}{2m}\right)$$

4. L'inégalité de Markov au programme, l'exponentielle étant positive, raconte que pour tout réel t :

$$\mathbf{P}(e^{tZ} \geq e^{t\lambda}) \leq \frac{\mathrm{E}(\exp(tZ)}{e^{\lambda t}} \leq \exp\left(\frac{\sigma^2t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Comme l'exponentiel est croissante[2] $\{Z \geq \lambda\} \subset \{e^{tZ} \geq e^{t\lambda}\}$ et en passant aux probabilités :

$$\mathbf{P}(Z \geq \lambda) = \mathbf{P}(e^{tZ} \geq e^{t\lambda}) \leq \exp\left(\frac{\sigma^2t^2}{2} - \lambda t\right).$$

Mais le trinôme en t, $\frac{\sigma^2t^2}{2} - \lambda t$ atteint son minimum, $-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}$, en $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{2\lambda}{\sigma^2t^2}\right)$. Et pout cette valeur de t, la précédente inégalité devient :

$$\mathbf{P}(Z \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right).$$

Par ailleurs

$$\mathbf{P}(|Z| \geq \lambda) = \mathbf{P}((Z \geq \lambda) \cup (Z \leq \lambda)) = \mathbf{P}((Z \geq \lambda) + \mathbf{P}((Z \leq -\lambda) = \mathbf{P}((Z \geq \lambda) + \mathbf{P}((-Z \geq \lambda),$$

car $(|Z| \geq \lambda)$ est l'union disjointe de $(Z \geq \lambda)$ et $(Z \leq \lambda)$.

Or la variable $-Z$ satisfait la même hypothèse que Z et donc $\mathbf{P}(-Z \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)$. Donc au final :

$$\boxed{\mathbf{P}(|Z| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma^2}\right)}.$$

2. la STRICTE croissance donne même l'égalité.

5. (a) D'après 4. (c) et 5. on a immédiatement :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(|\langle X|Y\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)}$$

(b) L'événement $\left(\sup\limits_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$ est la réunion des événements $\left(|\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$, $1 \leq i < j \leq N$.

En effet si ω est élément de $\left(|\langle X^{i_0}|Y^{j_0}\rangle| \geq \varepsilon\right)$, où (i_0, j_0) est un élément de $\{1, ..., N\}$ tel que $1 \leq i_0 < j_0 \leq N$, alors

$$\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle|(\omega) \geq |\langle X^{i_0}|Y^{j_0}\rangle|(\omega) \geq \varepsilon$$

et donc $\omega \in \left(\sup\limits_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$.

Inversement si ω est élément de $\left(\sup\limits_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$, comme $\{(i,j) \in \{1, ..., n\}|1 \leq i < j \leq N\}$ est fini, on dispose d'un élément un élément (i_0, j_0) tel que

$$(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle|)(\omega) = |\langle X^{i_0}|X^{j_0}\rangle|(\omega),$$

et donc $\omega \in \left(|\langle X^{i_0}|X^{j_0}\rangle| \geq \varepsilon\right) \subset \bigcup\limits_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$.

Ceci étant

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)\right) \leq \sum_{1\leq i<j\leq N} \mathbf{P}\left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)$$

Or $|\{(i,j) \in \{1, ..., n\}|1 \leq i < j \leq N\}| = \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, donc par 5.(a),

$$\mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{N(N-1)}{2} 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right) < \underline{N^2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{2}\right)}.$$

6. Par la question précédente : $\mathbf{P}\left(\sup\limits_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < \delta$.

7. On a $N \leq \exp\left(\frac{\varepsilon^2 m}{4}\right)$ et donc par croissance de l'exponentielle, $m \geq 2\frac{\ln(N^2)}{\varepsilon^2}$. Donc par la question précédente :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \geq \varepsilon\right)\right) = \mathbf{P}\left(\sup_{1\leq i<j\leq N} |\langle X^i|Y^j\rangle| \geq \varepsilon\right) < 1.$$

En passant à l'événement contraire :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{1\leq i<j\leq N} \left(|\langle X^i|X^j\rangle| \leq \varepsilon\right)\right) > 0$$

Donc il existe au moins un élément ω tels que $|\langle X^i(\omega|X^j(\omega)\rangle|) \leq \varepsilon$, pour tout les couple (i,j) d'éléments distincts de $\{1, ..., N\}$ donc tel que La famille $((X_i(\omega))_{i=1,...,N}$ soit une famille d'éléments de S^{n-1} de paramètre de cohérence majorée par ε.

SECOND PROBLÈME

Le coefficient de la i^e ligne et j^e colonne d'une matrice M sera noté $m_{i,j}$, dans le cas où M est donnée comme une fonction d'une ou plusieurs matrices on le note encore $M[i,j]$.

1. Traces et projecteurs

1. On a :
$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}(AB)[i,i]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}=\sum_{1\leq i,j\leq n}a_{i,k}b_{k,i}\,;$$
cette dernière expression étant symétrique en A et B,
$$\boxed{\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)}$$

2. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, ($P=\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$). On a par associativité de la multiplication de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et la question 1,
$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)=&\operatorname{tr}\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)P\right)=\operatorname{tr}\left(\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)P\right)\\=&\operatorname{tr}\left(P\left(P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)\right)=\operatorname{tr}\left(\left(PP^{-1}\right)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)\right)\\=&\operatorname{tr}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right).\end{aligned}$$
La trace ne dépend que de f et non de la base choisie pour en exprimer la matrice.

3. Comme p est un projecteur, $E=\operatorname{im}(p)\oplus\ker(p)$; choisissons donc une base $\mathcal{B}_\prime$, adaptée à cette décomposition en somme directe de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p)=\operatorname{diag}(I_r,O_{n-r})$ où r est la dimension de $\operatorname{im}(p)$, c'est-à-dire le rang de p. Finalement, par 2,
$$\boxed{\operatorname{tr}(p)=\operatorname{tr}(\operatorname{diag}(I_r,O_{n-r})=r=\operatorname{rg}(p)}$$

4. Soit y un élément de $\operatorname{im}(f+g)$. On dispose par définition d'un élément x de E tel que $y=(f+g)(x)$, mais alors $y=f(x)+g(x)\in\operatorname{im}(f)+\operatorname{im}(g)$, et donc
$$\operatorname{im}(f+g)\subset\operatorname{im}(f)+\operatorname{im}(g).$$
Donc,
$$\begin{aligned}\dim\left(\operatorname{im}(f+g)\leq\dim\left(\operatorname{im}(f)+\operatorname{im}(g)\right)\right.=&\dim\left(\operatorname{im}(f)\right)+\dim\left(\operatorname{im}(g)\right)-\dim\left(\operatorname{im}(f)\cap\operatorname{im}(g)\right)\\\leq&\dim\left(\operatorname{im}(f)\right)+\dim\left(\operatorname{im}(g)\right).\end{aligned}$$
Et finalement :
$$\boxed{\operatorname{rg}(f+g)\leq\operatorname{rg}(f)+\operatorname{rg}(g).}$$

5. On montre par récurrence sur m, l'hérédité provenant directement de la question 4, que :
$$\operatorname{rg}(s)\leq\sum_{i=1}^{m}\operatorname{rg}(p_i).$$
Donc, par la question 3, puis la linéarité de la trace.
$$\boxed{\operatorname{rg}(s)\leq\sum_{i=1}^{m}\operatorname{tr}(p_i)=\operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{m}p_i\right)=\operatorname{tr}(s),}$$

2. Endomorphismes de trace nulle

6. (a) *Nous allons donner deux preuves. La première est spécifique à la dimension finie et ne saurait se généraliser à un espace vectoriel E qui serait de dimension quelconque. La seconde, plus longue, mais de portée générale n'utilise pas le caractère fini de la dimension de E. Dans les deux cas nous raisonnerons par l'absurde.*

Supposons qu'au contraire pour tout vecteur $x\in E$ la famille $(x,f(x))$ soit liée.

Première preuve — Soit $(x_1,x_2,...,x_n)$ une base de E. En particulier, puisque x_k est non nul, on dispose pour $k=1,2,...,n$ d'un réel α_k tel que $f(x_k)=\alpha_kx_k$ et d'un réel α tel que $f(x_1{+}x_2,....{+}x_n)=\alpha(x_1+x_2+...+x_n)$ (la liberté de $(x_1,x_2,...,x_n)$ interdit la nullité de $x_1+x_2+...+x_n)$).
Mais alors :
$$\begin{aligned}\alpha x_1+\alpha x_2+...+\alpha x_n=\alpha(x_1+x_2+...+x_n)=f(x_1+x_2,....+x_n)\\=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n\end{aligned}$$

La *liberté* de la famille $(x_1, ..., x_n)$ assure alors que $\alpha_k = \alpha$, pour $k = 1, ..., n$. Donc f et l'homothétie $\alpha \, \mathrm{id}_E$ coïncident sur la *base* $(x_1, ..., x_n)$ de E, donc sont égaux.

Seconde preuve — Pour tout élément x de E non nul on dispose d'un réel α_x (unique d'ailleurs), tel que :

$$f(x) = \alpha_x x$$

Soient $x_0 \in E \setminus \{0\}$.

Soit un vecteur y de E non nul. Deux cas se présentent :

– Premier cas : (x_0, y) est libre.

Alors $x_0 + y$ n'est point nul et

$$\lambda_{x_0+y} x_0 + \lambda_{x_0+y} y = \lambda_{x_0+y}(x_0 + y) = f(x_0 + y) = f(x_0) + f(y) = \lambda_{x_0} x_0 + \lambda_y y,$$

la liberté de (x_0, y) donne enfin $\lambda_y = \lambda_{x_0}$.

– Second cas : (x_0, y) est liée.

La non nullité de x fournit un réel β tel que $y = \beta x_0$ et donc

$$\lambda_y y = f(y) = f(\beta x_0) = \beta f(x_0) = \beta \lambda_{x_0} x = \lambda_{x_0} y.$$

La non nullité de y exige , là encore que $\lambda_y = \lambda_{x_0}$.

Comme y est quelconque, de ces deux cas vient : $f = \lambda_{x_0} \mathrm{id}_E$

Quelle que soit la méthode nous aboutissons au caractère homothétique de f que l'hypothèse refuse.

Donc il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.

(b) La sous-question (a) fournit un vecteur e_1 de $\mathbf{E}$ tel que $(e_1, f(e_1))$ soit libre. Posons $e_2 = f(e_1)$ et complétons la famille *libre* (e_1, e_2) en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$. Dans cette base la matrice de f est de la forme suivante :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \text{ où } A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})}$$

(c) Raisonnons par récurrence sur la dimension de l'espace.

Soit (P_k) la proposition :

pour tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension k, de trace nulle, il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice de l'endomorphisme est à diagonale nulle.

• La propriété (P_1) est triviale.

• Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Supposons (P_k). Soit alors f_{k+1} un endomorphisme d'un espace E_{k+1} de dimension $k + 1$. Par la question précédente il existe une base $(e_1, e_2, ..., e_{k+1})$, de E_{k+1} tel que la matrice de f_{k+1} soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & \times & \times & \cdots & \times \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & A & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathcal{M}_k$. Posons $E_k = \mathrm{vect}(e_2, ..., e_{k+1})$ et considérons p la projection sur E_k suivant $\mathrm{vect}(e_1)$ ainsi que l'endomorphisme de E_k, $f_k = p \circ f_{k+1|E_k}$ [3]. La matrice de f_k dans la base $(e_2, ..., e_{k+1})$ est A qui est de trace nulle (puisque $0 + \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f_{k+1}) = 0$), donc par (P_k), on dispose d'une base $(e'_2, ..., e'_{k+1})$ de E_k tel que la matrice A' de f_k dans cette base soit à diagonale nulle.

D'une part pour $i = 2, ..., k + 1$, par définition de la projection p,

$$f_{k+1}(e'_i) = p(f_{k+1}(e'_i)) + a_i e_1 = f_k(e'_i) + a_i e_1,$$

3. Autrement dit f_k s'obtient en restreignant f_{k+1} à E_k, puis en projetant sur E_k. La première opération revient matriciellement à ne considérer que les k dernières colonnes, la seconde à éliminer la première ligne.

où $a_i \in \mathbf{R}$; et d'autre part $T_{k+1}(e_1) \in \text{vect}(e_2, ..., e_{k+1}) = \text{vect}(e'_2, ..., e'_{k+1})$. Donc en remarquant que $(e_1, e'_2, ..., e'_{k+1})$ est une base $\mathcal{B}'$ de E_{k+1} on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_{k+1}) = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k+1} \\ \times & & & & \\ \times & & & & \\ \vdots & & A' & & \\ \times & & & & \end{pmatrix},$$

et donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f_{k+1})$ est de trace nulle. Voila (P_{k+1}) prouvée.

Donc par récurrence, l'endomorphisme f admet une matrice à diagonale nulle.

Remarque. *On aurait pu de façon alternative raisonner matriciellement en prenant comme hypothèse de récurrence : « Toute matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbf{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice à diagonale nulle ». On eût alors, dans la preuve de l'hérédité procédé par produits matriciels par blocs. Cette méthode est moins conceptuelle et trouve les faveurs de tous ceux que la lourdeur des produits par blocs n'effrait pas. Vous êtes invité à comparer par vous-même les deux méthodes.*

7. Par linéarité de la trace $\text{tr}(f) = \text{tr}(f_1 f_2) - \text{tr}(f_2 f_1)$ puis par la question 1,

$$\boxed{\text{tr}(f) = \text{tr}(f_1 f_2) - \text{tr}(f_1 f_2) = 0}$$

8. (a) Considérons les deux sous-familles de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ suivantes :

$$\mathcal{F} = (E_{i,i})_{i=1,\dots,n} \text{ ; } \mathcal{G} = (E_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n \\ i \neq j}}.$$

Notons dès à présent que $|\mathcal{F}| = n$ et $|\mathcal{G}| = n^2 - n = n(n-1)$.
Par définition $\mathcal{D}_n(\mathbf{R}) = \text{vect}(\mathcal{F})$ et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R}) = \text{vect}(\mathcal{G})$, à ce titre $\mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ sont donc des sous-espaces vectorels de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, la liberté de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ (ce sont des sous-familles de la base canonique) assure que :

$$\boxed{\dim(\mathcal{D}_n(\mathbf{R})) = |\mathcal{F}| = n} \quad \boxed{\dim(\mathcal{G}_n(\mathbf{R})) = |\mathcal{G}| = n(n-1)}$$

Remarque : La concaténée de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, donc : $\mathcal{D}_n(\mathbf{R}) \oplus \mathcal{G}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

$\Phi \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R})\,;\ M \mapsto DM - MD.$

(b) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour $i = 1, 2, ..., n$,

$$\begin{aligned}(MD - DM)[i,i] =& \sum_{k=1}^{n} M[i,k]D[k,i] - \sum_{k=1}^{n} D[i,k]M[k,i] \\ =& M[i,i]D[i,i] - D[i,i]M[i,i] = 0.\end{aligned}$$

Donc $MD - DM \in \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$, et donc, M étant quelconque, $\boxed{\text{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})}$.

Soit $A \in \ker(\Phi)$.
Méthode 3/2
Soit (i, j) un couple d'éléments *distincts* de $[\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}0 = (AD - DA)[i,j] =& \sum_{k=1}^{n} A[i,k]D[k,j] - \sum_{k=1}^{n} D[i,k]A[k,j] \\ =& A[i,j]D[j,j] - D[i,i]A[i,j] = (j-i)A[i,j].\end{aligned}$$

Les termes non diagonaux de A sont donc nuls.
Méthode 5/2
Les espace propres de D sont les n droites dirigées par les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Comme A commute avec D ces n espaces propres sont stables par A, donc tous les vecteurs de la base canoniques sont propres pour A, et donc A est diagonale

Conclusion : $\boxed{\ker(\Phi) \subset \mathcal{D}_n(\mathbf{R})}$

La formule du rang pour l'endomorphisme Φ affirme que

$$n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \dim(\ker(\Phi) + \dim(\mathrm{im}(\Phi),$$

La précédente inclusion veut que $\dim(\ker(\Phi) \leq \dim(\mathcal{D}_n(\mathbf{R})) = n$, ce qui exige que

$$\dim(\mathrm{im}(\Phi) \geq n^2 - n = \dim(\mathcal{G}_n(\mathbf{R}))\,;$$

l'inclusion $\mathrm{im}(\Phi) \subset \mathcal{G}_n(\mathbf{R})$ assure donc : $\boxed{\mathrm{im}(\Phi) = \mathcal{G}_n(\mathbf{R})}$.

(c) Excluons le cas où f serait une homothétie, donc nulle (puisque de trace nulle), et où l'endomorphisme nul convient fort bien tant pour f_1 que f_2. Alors 6.(b) nous fournit une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ — notons la F — soit élément de $\mathcal{G}_n(\mathbf{R})$. Mais d'après le point précédent on dispose d'un élément F_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que : $F = \Phi(F_2) = DF_2 - F_2D$. Désignons alors par f_1 et f_2 les endomorphismes de E ayant respectivement comme matrices dans $\mathcal{B}$, D et F_2 ; la dernière égalité donne :

$$\boxed{f = f_1 f_2 - f_2 f_1}$$

3. Prescription de la diagonale

9. Sans trop de difficultés on a :

$$f(x) = t_1 x + (f(x) - t_1 x).$$

Mais la famille $(x; (f(x) - t_1x))$ est une base de E , puisque $\det_{(x,f(x))}(x; (f(x) - t_1x)) = 1 \neq 0$, que l'on notera $\mathcal{B}''$ et la matrice de f dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} t_1 & c \\ 1 & d \end{pmatrix},$$

mais l'invariance de la trace (cf 1.) donne $d = t_2$.
donc $\underline{\mathrm{M}_{\mathcal{B}''}(f) \text{ a pour éléments diagonaux } t_1 \text{ et } t_2.}$

10. (a) Notons $t_2 = \mathrm{tr}(f) - 1$. On a que t_2 est un entier supérieur ou égal à 1. La question 9 nous offre une base $\mathcal{B}''$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{t_2 \text{ termes}}$$

Notons p_1 l'endomorphisme de E de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et p_2 celui de matrice $\begin{pmatrix} 0 & \frac{c}{t_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
On vérifie matriciellement que $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $p_2 \circ p_2 = p_2$, donc que p_1 et p_2 sont des projecteurs.
<u>Ainsi, f est-elle une somme finie de projecteurs :</u>

$$\boxed{f = p_1 + \underbrace{p_2 + p_2 + \dots p_2}_{t_2 \text{ termes}}}$$

(b) Dans une quelconque base $\mathcal{B}$ la matrice de f est $\frac{\mathrm{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2$.
Premier cas. La trace de f est paire ; elle s'écrit $\mathrm{tr}(f) = 2p$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{\mathrm{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2 = p\mathrm{I}_2 = \underbrace{E_{1,1} + E_{1,1} + \dots + E_{1,1}}_{p \text{ termes}} + \underbrace{E_{2,2} + E_{2,2} + \dots + E_{2,2}}_{p \text{ termes}}$$

Second cas. La trace de f est impaire ; elle s'écrit $\mathrm{tr}(f) = 2p + 1$, avec $p \in \mathbf{N}^*$.

$$\frac{\mathrm{tr}(f)}{2}\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}J + \underbrace{K_1 + K_1 + \dots + K_1}_{p \text{ termes}} + \underbrace{K_2 + K_2 + \dots + K_2}_{p \text{ termes}}$$

où J est la matrice pleine de 1, $K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2p} & 0 \end{pmatrix}$ et $K_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Les matrices K_1, K_2 et $\frac{1}{2}J$ sont idempotentes donc sont les matrices dans $\mathcal{B}$ de projecteurs.
Ainsi <u>f est-elle derechef une somme finie de projecteurs.</u>