DM n$^{\text{o}}$1

Pour le jour de la rentrée.

Attention ce devoir est assez long et peu exiger plus de vingt heures de travail. Sa résolution peut par contre être fractionnée et étalée sur un longue période.

Avant de rédiger lire le polycopié sur la rédaction et s'y conformer

Les copies non conformes seront à refaire.

Exercice 1

— Dans tout cet exercice, $\mathbf{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbf{C}$. Soit $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbf{K}[X]$, noté P.

1. Soit p un entier naturel non nul. Pour tout élément k de $\{0, 1, \ldots, n\}$, on note r_k le reste dans la division euclidienne de k par p. Montrer que le reste R de la division euclidienne de P par $x^p - 1$ est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}$.

   Indication : Supposer, pour commencer, que P est un monôme.
2. Soient p et q des entiers naturels non nuls et d leur PGCD. Montrer, grâce à l'algorithme d'Euclide et à la question précédente, que le PGCD de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ est $X^d - 1$.
3. Dans le cas où K est le corps $\mathbf{C}$, retrouver ce résultat en raisonnant sur les facteurs premiers de $X^p - 1$ et $X^q - 1$.

Exercice 2

On munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, on désignera par $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique et par $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Soit l'arc paramétré $\gamma_0 \ : \ [0, \mathrm{sh}(1)] \to \mathbf{R}^2 \,;\ t \mapsto (t\cos(t), t\sin(t))$. Montrer que cet arc est régulier, autrement dit que $\vec{\gamma}'$ ne s'annule pas, et calculer sa longueur, définie par $\int_0^{\mathrm{sh}(1)} \|\vec{\gamma}'\|$.
2. Soient U un ouvert non vide de $\mathbf{R}^2$ et f une application de U dans $\mathbf{R}$ à valeurs <u>positives ou nulles</u>. On suppose qu'il existe un réek $k > 0$ tel que pour tout $m \in U$:

$$\|\vec{\nabla} f(m)\| \leq k f(m). \tag{1}$$

   Soient $[a, b]$ un segment non réduit à un point et $\gamma \ : \ [a, b] \to \mathbf{R}^2$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma([a, b]) \subset U$. Enfin, on pose $m_0 = \gamma(a)$ et $m_1 = \gamma(b)$.

   Montrer que l'application $f \circ \gamma$, notée g, est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que pour tout élément t de $[a, b]$,

$$g'(t) \leq k \|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\| g(t).$$

3. Montrer que
$$f(m_1) \leq f(m_0)e^{k\ell},$$
où ℓ désigne la longueur de l'arc γ.

Indication. On pourra écrire $g(t)$ sous la forme $h(t)\exp\left(k\int_a^t \|\overrightarrow{\gamma}'(s)\|\mathrm{d}s\right)$.

4. On suppose que U est l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | 1 < \|(x,y)\| < 2\}$. Montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.

(5/2) L'ouvert U étant de nouveau quelconque, donner une propriété topologique qu'il doit vérifier pour montrer que si f s'annule en un point a de U alors f est nulle.

Exercice 3

On note $U = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et l'on se propose d'étudier l'ensemble

$$S = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}) | \forall (x,y) \in U, y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \right\}.$$

Pour tout réel $R > 0$ on note considère l'arc (I, γ_R), où $\gamma_R = (R\cos, R\sin)$.

1. Donner, pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$, la nature géométrique du support de l'arc (I, γ_R), c'est-à-dire de l'ensemble $\gamma_R(I)$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Montrer que f est élément de S si et seulement si $f \circ \gamma_R$ est constante pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$.
3. On note $V = \mathbf{R}_+^* \times I$ et l'on considère l'application
$$p \;:\; V \to \mathbf{R}\,;\; (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta).$$
Montrer que p réalise une bijection de V sur U de classe $\mathcal{C}^1$, dont on déterminera la bijection réciproque. Cette dernière est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

   Soit $S' = \left\{ g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbf{R}) | \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0_{V \to \mathbf{R}} \right\}$.

   (a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$, $f \circ p$ est un élément de $\mathcal{C}^1(V, \mathbf{R})$ et que
   $$\Phi \;:\; \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}) \to \mathcal{C}^1(V, \mathbf{R})\,;\; f \mapsto f \circ p$$
   est une bijection.

   (b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$. Montrer que f est élément de S si et seulement si $\Phi(f)$ est élément de S'.

   (c) Déterminer S' puis S.

Exercice 4 — Sommes de Riemann —

1. Déterminer le limite éventuelle de la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}.$$
2. Déterminer le limite éventuelle de la suite $(\tilde{S}_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,
$$\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2(k^3+n^3)^{\frac{1}{3}}}.$$

3. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

Indication : Introduire la quantité $\tilde{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\frac{k}{n}$.

4. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, où pour tout entier naturel n non nul,

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^k\right)^{\frac{1}{n^2}}.$$

Exercice 5 — Etude de $\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta$. —

1. Soit x un réel différent de 1 de -1. Montrer l'existence de

$$\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

5/2. Montrer l'existence de l'intégrale pour tout réel,

2. En utilisant les somme de Riemann, montrer que :

$$\int_0^\pi \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } |x|<1, \\ 2\pi\ln(|x|] & \text{si } |x|>1. \end{cases}$$

5/2. Déterminer par un argument de continuité la valeur de l'intégrale pour $x=\pm 1$.

3. On se propose de retrouver le résultat par un autre biais. Posons $D = \mathbf{R}\setminus\{-1,1\}$, et

$$f\ :\ D\to\mathbf{R}\,;\ x\mapsto \ln(1+2x\cos\theta+x^2)\mathrm{d}\theta.$$

   (a) Pour tout x élément de D exprimer $f(-x)$, $f(x^2)$ et pour x de plus non nul, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, en fonction de $f(x)$.

   (b) En déduire f.

+ Exercice 6 — Bernoullieries —

Les polynômes de Bernoulli jouent un rôle crucial en mathématiques, ils sont incontournables pour les concours. Il convient de connaitre par cœur ce qui suit et qui sera évaluer lors de la seconde interrogation écrite.

On se propose de montrer de deux manières différentes le résultat suivant :
Pour tout entier $n\geq 1$, il existe un et un seul polynôme P_n tel que pour tout réel θ,

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta). \tag{2}$$

On dit que P_n, est le n^{e} polynôme de Bernoulli.

1. *Unicité*
   Soit un entier $n\geq 1$. On suppose qu'il existe des polynômes P_n et $\tilde{P}_n$ tels que pour tout réel θ,

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta) = \tilde{P}_n(\cos\theta).$$

   Montrer que $P_n = \tilde{P}_n$.

2. *Méthode recourant aux nombres complexes*

   Soit n un entier naturel.

   (a) Soit θ un réel.

   Montrer que $\cos(n\theta) = \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$. En déduire qu'il existe un polynôme P_n tel que l'on ait (2).

   (b) Montrer que le polynôme P_n est de degré n et préciser son coefficient dominant c_n.
   Indication : l'exercice 1 peut être utile !

3. *Méthode recourant à une récurrence*

   (a) Soit θ un réel.

   Exprimer pour tout entier $n \geq 2$, $\cos((n+1)\theta)$ au moyen de $\cos((n-1)\theta)$, $\cos(n\theta)$ et $\cos(\theta)$.

   (b) En utilisant la sous-question précédente, montrer par récurrence l'existence de la suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ des polynômes de Bernoulli, dont on précisera au passage le degré et le coefficient dominant c_n.

4. *Une propriété de minimisation*
   Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $T_n = \frac{1}{c_n}P_n$, de sorte que T_n soit unitaire.

   (a) Montrer que pour tout élément x de $[-1,1]$ et tout entier $n \geq 1$, $T_n(x) = \frac{1}{c_n}\cos\big(n\arccos(x)\big)$.

   (b) Soit n un entier strictement positif. Montrer que $\{|T_n(x)|, x \in [-1,1]\}$ admet un plus grand élément M_n à déterminer. Déterminer les points x de $[-1,1]$ en lesquels $|T_n(x)| = M_n$, on précisera pour chacun d'eux le signe de $T_n(x)$.

   (c) Soit U un polynôme à coefficients réels unitaire de degré n. Montrer que $\{|U(x)|, x \in [-1,1]\}$ admet un plus grand élément M'_n.

   (d) Montrer que $M'_n \geq M_n$.
   Indication : on pourra raisonner par l'absurde et étudier les valeurs de $U - T_n$ aux points en lesquels $|T_n|$ est maximum.

Exercice 7 — Développement asymptotique —

1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'équation d'inconnue réelle x, $\tan x = x$, admet une unique solution, élément de $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$; on la notera dans la suite x_n. On illustrera ce résultat par une figure.

2. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   a. Montrer que $x_n \sim n\pi$ $(n \to \infty)$.
   b. Montrer que $x_n - n\pi$ tend vers un réel l à déterminer, lorsque n tend vers $+\infty$.
   c. Pour tout entier naturel n on pose : $a_n := x_n - n\pi - l$. Donner un équivalent simple de a_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 —Inégalité de Cauchy & Schwarz —

Soit $(\Omega(P))$ un espace probabilisé fini.

1. Soit Z une variable aléatoire à valeurs réelles définies sur $(\Omega(P))$ de variance nulle. Montrer que Z prend une valeur avec la probabilité 1.

2. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles définies sur $(\Omega(P))$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})| \leq \sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}.$$

Pour tout événement C, on définit $\mathbf{1}_E$ la variable aléatoirea à valeurs réelles définie sur Ω par :

$$\mathbf{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si } \omega \in C, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

3. (a) Soit C un événement. Déterminer l'espérance de $\mathbf{1}_C$.
   (b) Soient A et B des événements. Déterminer le produit $\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.
   (c) Montrer que $|\mathrm{P}(A \cap B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$.
   Indication On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy & Schwarz à $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
4. Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega(P))$ à valeur dans $\mathbf{N}$ et d'espérance strictement positive. Montrer que :

$$\mathrm{P}(X \geq 1) \geq \frac{\mathrm{E}(X)^2}{\mathrm{E}(X^2)}.$$

Indication. Utiliser l'inégalité de Cauchy & Schwarz .

Exercice 9 — Marches aléatoire —

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et qui toutes suivent la loi de Rademacher, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}, \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. On note, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et on convient que S_0 est la variable aléatoire presque sûrement nulle. On considère par ailleurs la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0}.$$

On rappelle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{S_n=0} = \begin{cases} 1 \text{ si } S_n(\omega) = 0, \\ 0 \text{ sinon .} \end{cases}$

On rappelle le théorème suivant :

Lemme de coalition *Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\mathbf{N}^*$ toute application f de $\mathbf{R}^i$ dans $\mathbf{R}$, toute application g de $\mathbf{R}^j$ dans $\mathbf{R}$, les variables aléatoires*

$$f(X_1, X_2, ..., X_i) \text{ et } g(X_{i+1}, X_{i+2}, ..., X_{i+j})$$

sont indépendantes.

1. Que représente la variable aléatoire N ? Exprimer l'événement $\{N \neq 0\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
   Exprimer l'événement $\{N = +\infty\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.
2. Montrer que :

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n\geq 0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0).$$

3. On admet que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. Déterminer $\mathbf{P}(N = +\infty)$.
4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.

Indications pour le DM n$^{\mathrm{o}}$1

Exercice 1 —

1. Soit $k \in \mathbf{Z}$. Notons q_k le quotient dans la division euclidienne de k par p : $k = q_k p + r_k$ et $r_k < a$.
   On a :
   $$X^k = X^{q_k p + r_k} = (X^p)^{q_k} \times X^{r_k} = ((X^p)^{q_k} - 1) \times X^{r_k} + X^{r_k}.$$
   Or, d'une part, $\mathbf{R}[X]$ étant un anneau commutatif,
   $$(X^p)^{q_k} - 1 = (X^p - 1) \sum_{i=1}^{q_k - 1} X^i,$$
   et d'autre part, $\mathrm{d}^{\mathrm{o}} X^{r_k} < \mathrm{d}^{\mathrm{o}}(X^p - 1)$, donc,
   X^{r_k} est le reste dans la division euclidienne de $(X^p - 1)$ par X^k.
   Décomposer alors P dans la base canonique et utiliser ce qui précède....
2. Pour fixer les idées prenons $p \geq q$ et rappelons en quoi consiste l'algorithme d'Euclide appliqué à $X^p - 1$ et $X^q - 1$.

   On définie une suite $(R_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de polynômes par la relation de récurrence :
   - $R_0 = X^p - 1,\ R_1 = X^q - 1$,
   - pour tout $n \geq 1$,
     - si $R_n \neq 0$ alors, R_{n+1} est le reste dans la division euclidienne de R_{n-1} par R_n,
     - si $R_n = 0$ alors, $R_{n+1} = 0$.

   On montre qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$, tel que
   $$\mathrm{d}^{\mathrm{o}} R_0 > \mathrm{d}^{\mathrm{o}} R_1 > \mathrm{d}^{\mathrm{o}} R_2 > \cdots > \mathrm{d}^{\mathrm{o}} R_{n_0 - 1} > \mathrm{d}^{\mathrm{o}} R_{n_0} > -\infty, \tag{3}$$
   $$0 = R_{n_0+1} = R_{n_0+2} = R_{n_0+3} = \ldots \tag{4}$$
   R_{n_0}, dernier terme de la suite non nul, est le PGCD de $X^p - 1$ et de $X^q - 1$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n = X^{r_n} - 1$, où $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite fournie par l'algorithme d'Euclide dans $\mathbf{Z}$ appliqué à p et q...
3. Notons par ailleurs, pour m, élément de $\mathbf{N}^*$, $\mathcal{U}_m$ l'ensemble des racines m^{e} de l'unité. On a
   $$X^p - 1 = \prod_{z \in \mathcal{U}_p} (X - z)\,;\ X^q - 1 = \prod_{z \in \mathcal{U}_q} (X - z)$$
   Le PGCD de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ est donc $\displaystyle\prod_{z \in \mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q} (X - z)$.
   Montrer, en utilisant le théorème de Bezout et par double inclusion, que
   $$\mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q = \mathcal{U}_d.$$
   Donc le PGCD de $X^p - 1$ et $X^q - 1$ est
   $$\underline{\prod_{z \in \mathcal{U}_p \cap \mathcal{U}_q} (X - z) = \prod_{z \in \mathcal{U}_d} (X - z) = X^d - 1.}$$

Exercice 2

1. Pour tout élément t de $[0, \mathrm{sh}(1)]$,
$$\|\vec{\gamma}_0\,'(t)\| = ((\cos(t) - t\sin(t))^2 + (\sin(t) + t\cos(t))^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+t^2}.$$
Donc, $\vec{\gamma}_0\,'$ ne s'annulant pas, l'arc est régulier et sa longueur ℓ_0 est donnée par : $\ell_0 = \int_0^{\mathrm{sh}(1)} \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$; l'application sinus hyperbolique étant $\mathcal{C}^1$, il est loisible de faire le changement de variable « $t = \mathrm{sh}(u)$ » On trouve alors :
$$\ell_0 = \frac{1}{4}\mathrm{sh}(2) + \frac{1}{2}.$$
2. Soit $t \in [a, b]$, g est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composition de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ et d'après la le cours de MPSI :
$$g'(t) = \langle \vec{\nabla} f(\gamma(t) | \gamma\,'(t)\rangle.$$
Appliquer alors l'inégalité de cauchy-Schwarz ....
3. Posons $\phi\ :\ [a, b] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \exp\left(k\int_0^t \|\overrightarrow{\gamma}\,'(s)\|\mathrm{d}s\right)$ et $h = \frac{g}{\phi}$ de sorte que $g = h\phi$. *En fait ϕ est la solution de $y' = k\|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\|y$, pour une inéquation différentielle linéaire on procède au changement d'application inconnue utilisée pour résoudre l'équation linéaire avec second membre ; ce qui est normale puisque g est solution de*
$$y' = k\|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\|y + (g'(t) - k\|\overrightarrow{\gamma}\,'(t)\|g(t)).$$

   On a :
$$h'\phi + k\|\overrightarrow{\gamma}\,'\|h\phi \leq k\|\overrightarrow{\gamma}\,'\|h\phi,$$
soit $h'\phi \leq 0$ et la fin est simple.
4. Le résultat est immédiat si l'on dispose, pour tout point m de la couronne U, d'un arc paramétré $\mathcal{C}^1$ de support inclus dans U, d'extrémité initiale a et d'extrémité finale m..... La première question devrait suggérer des pistes....
5.

Exercice 3 .

1. Soit un élément R de $\mathbf{R}_+^*$, le support de l'arc (I, γ_R), est le demi-cercle ouvert de centre $(0,0)$ et de rayon R, intersection du cercle $\mathrm{C}((0,0), R)$ et du demi- plan ouvert d'équation $X > 0$.
2. • Hypothèse *Supposons f élément de S.*
Soit $\mathbf{R}_0 \in \mathbf{R}_+^*$. L'application $f \circ \gamma_R$ est $\mathcal{C}^1$, comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, et d'après le cours, pour tout $t \in I$:
$$(f \circ \gamma_R)'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$
Donc I étant un intervalle, $f \circ \gamma_R$ est constante.
• Hypothèse *Supposons que pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$ l'application $f \circ \gamma_R$ soit constante*
Soit (a, b) un élément de U. Posons $R = \|a, b\|$, de sorte que (a, b) soit élément du support de γ_R. pour tout $t \in I$:
$$0 = (f \circ \gamma_R)'(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Soit (a, b) élément de U et (r, t) élément de V.
Procéder par analyse et synthèse pour montrer que

$$p^{-1} \; : \; U \to V \; ; \; (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right).$$

On peut aussi passer par les nombres complexes en considérant $a + \mathrm{i}b$ *et utiliser que* $\exp(\mathrm{i}\,\cdot)$ *réalise une bijection de* $]-\pi, \pi]$ *sur le cercle unité de* $\mathbf{C}$.

Les applications $U \to \mathbf{R}\,;\; (x, y) \mapsto x$ et $U \to \mathbf{R}\,;\; (x, y) \mapsto x$ sont notoirement $\mathcal{C}^1$
Les applications $]-1, 1[\to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \arcsin(t)$ et l'application $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \sqrt{t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, donc par produit, somme quotient et composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, on a p^{-1} de classe $\mathcal{C}^1$.
ATTENTION, au départ il doit y avoir une application de DEUX variables

Soit $S' = \left\{ g \in \mathcal{C}^1(V, \mathbf{R}) | \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0_{V \to \mathbf{R}} \right\}$.

(a) Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$, $f \circ p \in \mathcal{C}^1(V, \mathbf{R})$ comme composée de deux applications $\mathcal{C}^1$.
Le plus simple et de deviner — et c'est pas bien difficile — la bijection réciproque et de vérifier que la composée dans un sens et dans l'autre de ces deux applications donne l'identité.

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R})$.
On note $g = \Phi(f)$
• Supposons $f \in S$. Pour tout $(r, \theta) \in V$,

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \text{....................................} = 0.$$

• Réciproquement supposons que g soit élément de S'. Alors le calcule précédent montre que f vérifie l'équation aux dérivées partielles qui définit S sur $p(V)$, or $p(V) = U$, donc $f \in S$.
D'où l'équivalence demandée.
Tout ceci est bien naturel, on a en effet vu en 2. que les éléments de S *sont les applications constantes sur les demi-cercles de* U *de centre* $(0, 0)$, *donc celles qui « exprimées en polaires »sont fonctions que de* r *et non de* θ.

(c) Soit g un élément de S', pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, l'application

$$I \to \mathbf{R}\,;\; \theta \mapsto g(r, \theta)$$

est constante sa dérivée qui est $\frac{\partial g}{\partial \theta}(\cdot, r)$ est nulle sur l'intervalle I ; notons $h(r)$ cette valeur.
On remarque l'application $h \; : \; \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\, r \mapsto h(r)$, est de calsse $\mathcal{C}^1$, car..............
Réciproquement, pour tout $h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, l'application

$$V \to \mathbf{R}\,;\; (r, \theta) \mapsto h(r)$$

est trivialement élément de S'.
Conclusion : $S' = V \to \mathbf{R}\,;\; (r, \theta) \mapsto h(r), h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$.
Utiliser $S = \Psi(S')$ on :

$$S = \text{.. ..}$$

Exercice 4 — Sommes de Riemann —

1. Pour tout entier naturel n non nul,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}.$$

L'application $[0,1] \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$ étant continue,

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\arctan(x) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \underline{\frac{\pi}{4} + \ln\left(\sqrt{2}\right).}$$

2. Même méthode.

3. *Ici I_n n'est pas une somme de Riemann, mais comme $\frac{k}{n^2}$ est majorée pour tout $k \in \{1,...,n\}$ par $\frac{1}{n}$, quantité qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on intuite que I_n se comporte lorsque n tend vers $+\infty$ comme la somme de Riemann que nous allons sur le champ introduire.*

   Posons pour tout entier naturel n non nul,

$$\tilde{I}_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

   Calculer $\tilde{I}_n$, puis montrer que $|\tilde{I}_n - I_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 x\sin x\,\mathrm{d}x$. On peut utilise pour tout $x \in \mathbf{R}_+$

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x.$$

EXERCICE 5

Les 3/2 admettrons la continuité de f.

1. Pour tout $\theta \in [0,\pi]$ Le trinôme $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ admet comme racines $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, et $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$. Donc pour tout $\theta \in]0,\pi[$ et tout réel x, $x^2 - 2\cos\theta x + 1 > 0$, et
   - si $\theta = 0$ alors le trinôme $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ admet une racine réelle double -1 ;
   - si $\theta = \pi$ alors le trinôme $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ admet une racine réelle double 1 ;
   - si $\theta \in]0,\pi[$ le trinôme $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ n'admet aucune racine réelle.

   Donc

$$g_x \;:]0,\pi[\to \mathbf{R}\,;\; \theta \mapsto \ln\left(x^2 - 2\cos\theta x + 1\right)$$

   est continue par morceaux et de plus :
   - si $x \neq \pm 1$ alors g_x se prolonge par continuité à $[0,\pi]$, puisque x n'est racine de $X^2 - 2\cos\theta X + 1$ pour aucune valeur de θ, ce qui assure pour les 3/2 l'existence de l'intégrale pour $x \notin \{1,-1\}$;
   - si $x = 1$ alors g_1 se prolonge par continuité à $]0,\pi]$;
   - si $x = -1$ alors g_{-1} se prolonge par continuité à $[0,\pi[$.

   Les 5/2 donnerons un équivalent $g_{-1}(\theta)$ au voisinage de π pour montrer que g_{-1} est intégrable au voisinage de π.

   De même g_1 est-il intégrable au voisinage de 0.

   Conclusion : pour tout réel x, g_x est intégrable sur $]0,\pi[$ et donc f est définie sur $\mathbf{R}$.

2.

3. (a) • Le changement de variable « $\pi-\theta$ »(bijectif $\mathcal{C}^1$ donc licite même lorsque l'intégrale donnant f est généralisée) assure la parité de f.

• Soit $x \in \mathbf{R}$, *le plus élégant est de partir de* $2f(x) = f(-x) + f(x) = ...$, *mais cela nécessiterait que l'on connût la réponse, ou d'avoir un interrogateur sympa...* Sinon, pour tout $\theta \in]0, \pi[$,

$$\begin{aligned}(X^2)^2 - 2X^2\cos\theta + 1 =& (X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}) \\ =& \Big((X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})\Big)\Big((X + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(X + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})\Big) \\ =& \left(X^2 - 2X\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1\right)\left(X^2 + 2X\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 1\right).\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x^2) = \text{...} = 2f(x).$$

• Enfin pour tout réel x non nul, facilement on trouve :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = 2\pi\ln(|x|) + f(x).$$

(b) Soit un réel x_0.

• Supposons $|x_0| < 1$. On vient de montrer que $f(x_0) = \frac{1}{2}f(x_0^2)$ et on a rapidement, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$:

$$f(x_0) = \frac{1}{2^n}f(x_0^{2n}). \tag{5}$$

Mais f est continue en 0, (admis pour les 3/2) $f(x_0) = f(0) = 0$.

• Supposons $|x_0| > 1$. Alors $f(x_0) = 2\pi\ln(|x_0|) + f\left(\frac{1}{x_0}\right)$ ...., et utiliser le premier point...

• Enfin $f(1) = f(1^2) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$, et par parité de f, $f(-1)$ itou.

Exercice 6 — Bernoullieries —

1. *Unicité*

Les polynômes P_n et $\tilde{P}_n$ coïncident sur $\cos(\mathbf{R}) = [-1, 1]$, qui est un ensemble infini, donc

$$\boxed{P_n = \tilde{P}_n}$$

2. *Méthode recourant aux nombres complexes*

Excluons le cas trivial $n = 0$.

(a) On a $\cos(n\theta) = \Re(\exp(in\theta) = \Re((\exp(i\theta)^n) = \Re\Big((\cos\theta + i\sin\theta)^n\Big)$.
D'après le binome de Newton,

$$\cos(n\theta) = \text{............}$$

$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta)$, où P_n est le polynôme :

$$P_n = \sum_{0\leq 2p\leq n} \left(\begin{array}{c} n \\ 2p \end{array}\right) (-1)^p(1-X^2)^p\, X^{n-2p}$$

(b) $\boxed{c_n = 2^{n-1}}$.

Notons que $P_0 = 1$ est bien de degré 0, mais $c_0 = 1$.

3. *Méthode recourant à une récurrence*

(a) Chacun sait (ou tout du moins devrait savoir) que :

$$\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta,$$

$$\cos((n-1)\theta) = \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta,$$

Par somme de ces deux égalités on a : ....
:

$$\boxed{\cos((n+1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos\theta - \cos((n-1)\theta)}$$

(b) Pour tout entier naturel n on note $(\mathbf{H}_n)$ la propriété :
Il existe un polynôme P_n tel que pour tout réel θ

$$\cos(n\theta) = P_n(\cos\theta),$$

de plus il est de degré n et de coefficient dominant $c_n = 2^{n-1}$,
On prouve la propriété par récurrence

— • $(\mathbf{H}_1)$ et $(\mathbf{H}_2)$ sont vraies avec $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$.
(*Il convient de vérifier pour le rang 1 et 2, car le passage au rang $p+1$ va exiger de supposer $(\mathbf{H}_{p-1})$ et $(\mathbf{H}_p)$ vraies.*)

— • Soit un entier $p \geq 2$. On suppose $(\mathbf{H}_{p-1})$ et $(\mathbf{H}_p)$ vraies............................

4. *Une propriété de minimisation*

(a) Soient un entier $n \geq 1$ et x un élément de $[-1, 1]$. $x = \cos(\arccos(x))$, donc

$$\underline{T_n(x) = \frac{1}{c_n} P_n\big(\cos(\arccos(x)\big) = \frac{1}{c_n}\cos\big(n\arccos(x)\big).}$$

(b) Soit $x \in [-1, 1]$, d'après (a), $|T_n(x)| \leq \frac{1}{c_n}$.
Par aileurs $|T_n(x)| = \frac{1}{c_n}$ si et seulement si $|\cos\big(n\arccos(x)\big)| = 1$ soit si et seulement si

$$n\arccos(x) = 0\ [\pi],$$

comme arccos est à valeur dans $[0, \pi]$, $|T_n(x)| = \frac{1}{c_n}$ si et seulement si $\arccos(x) = \frac{k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Finalement $\{|T_n(x)|, x \in [-1, 1]\}$ admet comme plus grand élément $\boxed{M_n = \dfrac{1}{c_n}}$ atteint en et seulement en $x_0, x_1, \ldots, x_n$, où pour tout $k = 0, \ldots, n$, $\boxed{x_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}$.

Plus précisément $T_n(x_k) = \frac{1}{c_n}$, pour k pair, $T_n(x_k) = -\frac{1}{c_n}$, pour k impair.
Notons que comme arccosinus est une bijection décroissante de $[-1, 1]$ sur $[0, \pi]$, on a :

$$-1 = x_n < x_{n-1} < \ldots x_1 < x_0 = 1. \tag{6}$$

(c) Utiliser le théorème de la borne atteinte.

(d) Supposons que $M'_n < M_n$ et notons V_n le polynôme $U - T_n$. Utiliser le théorème de la valeur intermédiaire pour montrer l'application V_n admet n racines ce qui pose problème au vu du degré de cette application polynomiale....

Exercice 7

1. Soit n un entier naturel.
Soit l'application $f_n \ : \ \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \tan x - x$. L'application f_n est dérivable et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$, différent de $n\pi$, $f'_n(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$, donc f_n est *strictement croissante* de plus f_n est *continue* sur l'*intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ donc f_n réalise un homéomorphisme (bijection continue de réciproque continue) de $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ sur $\left]\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}+n\pi} f_n, \lim\limits_{\frac{\pi}{2}+n\pi} f_n\right[= \mathbf{R}$. Donc l'équation $\tan x = x$ admet dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ une et une seule solution qui est

$$\boxed{x_n = f_n^{-1}(0)}$$

Espace offert pour faire une belle figure qui illustre la chose...

2. Comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
   a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 - \frac{\frac{\pi}{2}}{n\pi} \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \frac{\frac{\pi}{2}}{n\pi}$. Le lemme des gendarmes assure, puisque $\frac{\frac{\pi}{2}}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, que

$$\boxed{x_n \sim n\pi \ (n \to \infty)}$$

   b. Par π-périodicité de tan, $\tan(x_n - n\pi) = x_n$, de plus $x_n - n\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$x_n - n\pi = \arctan(x_n).$$

   C'est presque fini ! ....

c. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a vu que :

$$x_n = \tan(x_n - n\pi) = \tan\left(a_n + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos(a_n)}{\sin(a_n)}.$$

Etudier un équivalent du second membre.......

Exercice 9

1. N représente le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On justifie sans mal que
$$\{N \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbf{N}^*} \{S_k = 0\}.$$
Soit $\omega \in \Omega$. On a $N(\omega) = +\infty$ si et seulement si l'ensemble de $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $N(\omega) = 0$ n'est pas majoré, soit si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un entier $k \geq n$ tel que $S_k(\omega) = 0$. Résumons :
$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \{S_k = 0\}.$$

2. Partitionnons $\{N < +\infty\}$ en fonction du plus grand entier n tel que $S_n = 0$ « dernier instant de passage par l'origine » :
$$S_n = \biguplus_{n\in\mathbf{N}} \{S_n = 0, \forall p \in [\![n+1, +\infty[\![, S_p \neq 0\} = \biguplus_{n\in\mathbf{N}} \{S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1}+X_{n+2}+...X_{n+k} \neq 0\}.$$
Puis passer aux probabilités dans cette union disjointe
On utilisera, les X_n étant mutuellement indépendantes et de même loi, que
$$\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k} \neq 0) = \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0),$$
quantité indépendante de n, noté α.

3. On a donc :
$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \mathbf{P}(S_n = 0),$$
La série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$, on l'admet, diverge, donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc on a $\mathbf{P}(N < +\infty) = 0$. Donc :
$$\mathbf{P}(N = +\infty) = 1.$$

4. Posons pour tout $\in \mathbf{N}^*$, $X_n^* = \frac{X_n+1}{2}$, et $S_n^* = \sum_{k=1}^{n} X_k^*$ et $S_0^* = S_0$. Deux choses, d'abord les X_n^* suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et sont mutuellement indépendantes de sorte que $S_n^* \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, ensuite $S_n^* = \frac{S_n+n}{2}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(S_{2p+1} = 0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \mathbf{P}(S_{2p}^* = p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$
Utiliser la formule de Stirling pour montrer la divergence de la série est acquise.