DM n$^{\text{o}}$5

EXERCICE 1 (facultatif)

Soit $\mathcal{U}$ le cercle unité de $\mathbf{C}$. On considère $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications de U dans $\mathbf{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire que $t \mapsto f(e^{it})$ est $\mathcal{C}^1$).

1. Soit $f \in \mathcal{C}$. Montrer qu'il existe une application θ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que pour tout réel t, $f(e^{it}) = e^{\theta(t)}$. Un telle application s'appelle relèvement de f.
2. Montrer que deux relèvements de f diffèrent d'une constante à préciser.
3. Soit θ un relèvement de f et t un réel. Montrer que la quantité

$$\frac{\theta(t+2\pi)-\theta(t)}{i2\pi}$$

   est un entier indépendant du choix de θ et de t. On le note $\mathrm{Ind}(f)$ (indice de f).
4. Déterminer $\mathrm{Ind}(f)$ dans les cas suivants :
   (a) f est la fonction associée au monôme X^n.
   (b) $f = f_1 \times f_2$, où f_1 et f_2 sont des éléments de $\mathcal{C}$.
   (c) f est à valeur dans $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$.
5. Soient f_1 et f_2 des éléments de $\mathcal{C}$ tels que $|f_1(t) - f_2(t)| < |f_1(t)|$, pour tout réel t. Montrer que $\mathrm{Ind}(f_1) = \mathrm{Ind}(f_2)$
6. Montrer que l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$, Ind est continue.
7. Soit f un élément de $\mathcal{C}$ d'indice n. Déterminer le plus grand connexe par arcs contenant f.

EXERCICE 2

On se propose d'étudier le reste de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une de réels qui jouit des propriétés suivantes :

i. Pour tout entier naturel n, $u_n > 0$;
ii. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$;
iii. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en décroissant vers 0 ;
iv. Pour tout entier naturel n, $u_{n+2} - u_{n+1} \geq u_{n+1} - u_n$.

1. Montrer que la série converge.

   Dans la suite on note $R_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|R_n| + |R_{n+1}| = u_n.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p(u_{n+p} - u_{n+1+p}).$$

   En déduire que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone, on précisera si elle croît ou décroît.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$,
$$\frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}$$
En déduire un équivalent de R_n, lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME

Partie A

1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose
$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln n.$$
Etudier la nature de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.
2. Pour tout élément x de $\mathbf{R}_+^*$ on considère l'application
$$h_x \ : \ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}.$$
(a) Soit x un réel strictement positif. Dresser le tableau de variation de h_x.

(b) montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3,
$$\int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{\ln n}{n}.$$
(c) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
$$\frac{\ln n}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t.$$
(d) Prouver que la série $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ est convergente. Converge-t-elle absolument ?

On note
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Les deux parties suivantes sont indépendantes

Partie B

On se propose dans cette partie de calculer S. Pour tout entier n supérieur ou égal à 3 on pose :
$$S_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln k}{k},$$
$$t_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k},$$
$$a_n := t_n - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

1. Démontrer que :
   (a) La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.
   (b) La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est convergente.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. montrer que :
$$S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln 2.$$
   En déduire une expression de S_{2n} où figure a_n, a_{2n} et u_n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et $\ln 2$. Déterminer S.

Partie C

On Considère l'application
$$F\ :]1,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$
Pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$, on considère l'application
$$\varphi_n\ :]0,+\infty[\to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

1. Pour tout élément n de $\mathbf{N}^*$ on considère les application v_n et w_n de $[1,+\infty[$ dans $\mathbf{R}$, définie par
$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x},\, w_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\mathrm{d}t,$$
   pour tout élément x de $[1,+\infty[$
   (a) Montrer que v_n est dérivable et donner sa dérivée.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \geq 1$, $0 \leq w_n(x) \leq v_n(x)$.
   (c) On considère la fonction W de la variable réelle x définie par
$$W(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x).$$
   Démontrer que W est définie sur $[1,+\infty[$. Les 3/2 admettrons la continuité de W sur $[1,+\infty[$, les 5/2 la montrerons.
   (d) Montrer que pour tout réel $x > 1$, $W(x) = F(x) + \dfrac{1}{1-x}$.
   Montrer que $F(x) + \dfrac{1}{1-x}$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement supérieures, et exprimer $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(F(x) + \dfrac{1}{1-x}\right)$ au moyen de γ.
2. Montrer que pour tout réel x stricrtement positif, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \varphi_n(x)$ converge. On notera $\varphi(x)$ sa somme. On dispose donc d'une application
$$\varphi\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(x).$$

(a) Les 3/2 admettrons que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout réel $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n{}'(x).$$

Ils vériferons cependant la convergence pour tout réel $x > 1$ de la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n{}'(x)$.

Les 5/2 montrerons ce résultat.

3. (a) Etablir que, pour tout réel $x > 1$, $\varphi(x) = (1 - 2^{1-x})F(x)$.

   (b) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $1 - 2^{1-x}$, puis un développement limité à l'ordre 1 de $\varphi(x)$, lorsque x tend vers 1.

   (c) En déduire la valeur de S.

Indication pour le DS n°5

PROBLEME

Partie A

1. $$0 \leq u_{n+1} - u_n = ... = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right),\ n \to +\infty.$$

   donc $\sum\limits_{n\geq 1}(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, donc converge.

   puis utiliser que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = u_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$,
2. Facile
3. Soit un entier n supérieur ou égal à 3. Utiliser la question (a).
4. Soit un entier n supérieur ou égal à 4. Utiliser la question (a).
5. Utiliser le théorème spécial sur les séries alternées.

   De $0 \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

   conclura que la série $\sum\limits_{n\geq 2}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ ne converge pas absolument.

Partie B

1. (a) D'après A. 2.(c) on conclut que : la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

   (b) Grâce à A. 2.(b), pour tout entier $n \geq 3$, (avec la convention usuelle sur une somme vide,)

   $$t_n \geq \sum_{k=3}^{n-1}\frac{\ln k}{k} \geq \sum_{k=3}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_3^n \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{(\ln(n))^2}{2} - \frac{(\ln(3))^2}{2},$$

   et donc $a_n \geq -\frac{(\ln(3))^2}{2}$. La suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est donc *minorée*, étant *décroissante*, elle converge.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Ohn montre facilement que :

   $$S_{2n} = 2\left(\frac{t_n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln(2)}{p}\right) - t_{2n}.$$

   Finalement :

   $$\boxed{S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\ln 2}$$

   Puis :

   $$S_{2n} = a_n - a_{2n} - \frac{(\ln 2)^2}{2} + u_n \ln 2$$

3. Immédiat

Partie C

1. (a)
   (b) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$. Utiliser la décroissance de l'application $\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \frac{1}{t^x}$
   (c) *Il faut simplement montrer la convergence de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} w_n(x)$, *pour tout* $x \geq 1$!
   utiliser le théorème de comparaison de séries à termes positifs,
   On admet la continuité de F[1].
   (d) Soit un réel $x > 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de Chasles donne

$$\sum_{k=1}^{n} w_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^x} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = ...$$

   Passer ensuite à la limite sur n

   Utiliser la continuité en 1 de W donne $\boxed{\lim\limits_{x\to 1^+}\left(F(x) + \frac{1}{1-x}\right) = W(1)}$

   Montrer que $W(1) = \gamma$.
   Conclusion : $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(F(x) + \dfrac{1}{1-x}\right) = \gamma$

2. (a) Soit un réel $x > 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée, de plus : $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial sur les séries alternée,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n\geq 1} \varphi_n(x) \text{ converge.}$$

   Utiliser encore le théorème spécial sur les séries alterné.

3. (a) Soit $x \in]1, +\infty]$. Utiliser que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n^x} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^x} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)^x}.$$

   et

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{n^x} = -\frac{1}{2^x}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^x} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p-1)^x}.$$

   En laissant tendre n vers $+\infty$, il vient :

$$\varphi(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) F(x)$$

   (b)

$$1 - 2^{1-x} = -\ln 2(1-x) - \frac{\ln 2}{2}(1-x)^2 + \mathrm{o}((1-x)^2),\ x \to 1$$

   Or d'après C.1. (d), $F(x) = \gamma - \frac{1}{1-x} + \mathrm{o}(1),\ x \to 1^+$, etc.

1. Les 5/2 eussent pu la montrer en prouvant la convergence normale donc uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$.

(c) La continuité de φ en 1 assure $\varphi(x) \underset{x\to 1+}{\to} \varphi(1) = -S$.

Donc d'après (b), $\boxed{S = \ln 2}$.

EXERCICE 2

1. C'est tout simplement le théorème spécial sur les séries alternées.
2. Le théorème spécial sur les séries alternées Donne le signe des restes

$$R_{2p} \geq 0 \text{ et } R_{2p+1} \leq 0.$$

Donc, pour tout entier $p \geq 0$,

$$|R_{2p}| + |R_{2p+1}| = R_{2p} - R_{2p+1} = (-1)^{2p} u_{2p} = u_{2p}.$$

$$|R_{2p+1}| + |R_{2p+2}| = -R_{2p+1} + R_{2p+2} = -(-1)^{2p+1} u_{2p+1} = u_{2p+1}.$$

3. Pour tout entier naturel n,

$$|R_n| - |R_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p (u_{n+p} - u_{n+1+p}).$$

Raisonner comme dans la question précédente.
La série $\sum(-1)^n(u_n - u_{n+1})$ est alternée, la valeur absolue de son terme général est d'après iii., $u_n - u_{n+1}$, quantité qui d'après iv., décroît et d'après iii., tend vers 0. Donc d'après le théorème spécial sur les séries alternées, le signe de son reste est connu.
On en déduit que la suite $(|R_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

4. D'après les deux précédentes questions

$$\frac{u_n}{2} \leq |R_n| \leq \frac{u_{n-1}}{2}.$$