DS n°3

Les élèves traiteront un et un seul des trois sujets suivants

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :
— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,
— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,
— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.
L'usage de la calculatrice est interdit.

SUJET 1

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n > 0$ dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$ et la norme euclidienne associée est notée $\|.\|$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E. Pour tout endomorphisme u de E, on note u^i l'endomorphisme $u \circ u \circ ... \circ u$ (i fois) avec la convention $u^0 = Id_E$ (identité). L'ensemble vide est noté ?

L'espace vectoriel des matrices à coefficients réelles ayant n lignes et m colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{R})$On notera en particulier $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. La matrice transposée d'une matrice A à coefficient réels est notée $A^\top$. La trace de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

On note $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe linéaire des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversibles et $O_n(\mathbf{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n. On rappel que $O_n(\mathbf{R})$ est l'ensemble des éléments M de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que $M^\top M = I_n$, autrement dit qui sont inversibles et on pour inverse leur transpposée. L'ensemble $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

Les élément de $\mathbf{R}^n$ seront notés en colonne. On munit $\mathbf{R}^n$ de son produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ comme celui de E et on rappelle que pour tout X et tout Y éléments de $\mathbf{R}^n$,

$$\langle X | Y \rangle = X^\top Y.$$

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. Préliminaires sur les convexes

Si F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F.

1) Rappeler la définition d'une partie convexe de E.

On suppose que C est un convexe de $\mathbf{E}$, montrer que les combinaisons linéaires de la forme

$$\sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i,$$

où d est un entier supérieur ou égal à 1, x_1,...,x_d sont des éléments de C, λ_1,...λ_d des réels positifs ou nuls de somme 1 (barycentre à coefficients positifs) sont éléments de C

2) Soit F est un sous-ensemble quelconque de E, on appelle *enveloppe convexe* de F, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe de E (au sens de l'inclusion) contenant F.

Montrer que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des barycentre à coefficients positifs ou nuls de points de F (dont le nombre peut varier).

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i$ et on **admet** que $\mathrm{Conv}(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$ où $x_1, ..., x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$.

B. Préliminaires sur les matrices symétriques

On note $S_n(\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ formé des matrices symétriques. Une matrice $S \in S_n(\mathbf{R})$ est dite *définie positive* si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ *non nul*, on a $X^T S X > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

3) Soit U un élément de $M_2(\mathbf{R})$. On note C_1 et C_2 sa première et sa seconde colonne. Montrer que (C_1, C_2) est une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si U est élément de $O_2(\mathbf{R})$.

4) Soit M un élément de $S_2(\mathbf{R})$.

(a) Montrer que les valeurs propres de M sont réelles.

(b) On suppose que M admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2. On note U_1 un vecteur propre associé à λ_1,U_2 un vecteur propre associé à λ_2. Montrer que U_1 et U_2 sont des éléments de $\mathbf{R}^2$ orthogonaux.

Indication. On pourra calculer $\langle U_1 | M U_2 \rangle$.

(c) Montrer que M, qu'elle ait des valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes ou non, peut s'écrire :

$$M = P\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)P^\top,$$

avec P un élément de $O_2(\mathbf{R})$.

On **admet** que tout élément S de $S_n(\mathbf{R})$ a toutes ses valeurs propres réelles et peut s'écrire :

$$S = P\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^\top,$$

avec P un élément de $O_n(\mathbf{R})$.

5) Montrer qu'une matrice symétrique $S \in S_n(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbf{R}^{*+}$.

6) En déduire que pour tout $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$, il existe $R \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $S = R^T R$. Réciproquement montrer que pour tout $R \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, $R^T R \in S_n^{++}(\mathbf{R})$.

7) Montrer que l'ensemble $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est convexe.

C. Autres préliminaires

Les trois questions de cette partie sont mutuellement indépendantes.

8) Soit K un sous-ensemble compact de E et $\text{Conv}(K)$ son enveloppe convexe. On rappelle que $\mathcal{H}$ est l'ensemble des $(\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}^+)^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Définir une application ϕ de $\mathbf{R}^{n+1} \times E^{n+1}$ dans E telle que $\text{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$. En déduire que $\text{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E.

9) On désigne par g un endomorphisme de E tel que pour tous x, y dans E, si $\langle x|y\rangle = 0$ alors $\langle g(x), g(y)\rangle = 0$. Montrer qu'il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\,\|x\|$.

Indication. On pourra utiliser une base orthonormée $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E et considérer les vecteurs $e_1 + e_i$ et $e_1 - e_i$ pour $i \in \{2, ..., n\}$.

En déduire que g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal.

10) On se place dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A|B\rangle = \text{Tr}(A^T B)$. (On ne demande pas de vérifier que c'est bien un produit scalaire.)

Montrer que le groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.

D. Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un reel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

11) Montrer que cette suite n'admet aucune suite extraite convergente.

Soit K un sous-ensemble compact de E. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in E$ et de rayon r.

12) Montrer que pour tout réel $A > 0$, il existe un entier $p > 0$ et $x_1, ..., x_p$ éléments de E tels que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon)$. (On pourra raisonner par l'absurde.)

On considère une famille $(\Omega_i)_{\in I}$ de sous-ensembles ouverts de E, I étant un ensemble quelconque, telle que $K \subset \displaystyle\bigcup_{i\in I} \Omega_i$.

13) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i. (On pourra raisonner par l'absurde pour construire une suite d'éléments de K n'ayant aucune suite extraite convergente.) En déduire qu'il existe une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, ..., \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ telle que $K \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}$.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E contenus dans K et d'intersection vide : $\displaystyle\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$.

14) Montrer qu'il existe une sous-famille finie $(F_{i_1}, ..., F_{i_p})$ de la famille $(F_i)_{i\in I}$ telle que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} F_{i_k} = \emptyset$.

E. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et convexe de E. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$.

15) Montrer que N_G est bien définie, et que c'est une norme sur E.

16) Montrer en outre que N_G vérifie les deux propriétés suivantes :
- pour tous $u \in G$ et $x \in E$, $N_G(u(x)) = N_G(x)$;
- pour tous x, y dans E avec x non nul, $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ si et seulement si $\lambda x = y$ où $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Pour la seconde propriété on pourra utiliser le fait que si $z \in E$, l'application qui à $u \in G$ associe $\|u(z)\|$ est continue.

On considère un élément u de $\mathcal{L}(E)$ et on suppose que K est stable par u, c'est-à-dire que $u(K)$ est inclus dans K. Pour tout $x \in K$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)$. Enfin, on appelle diamètre de K le nombre réel $\delta(K) = \sup_{x,y \in K} \|x - y\|$ qui est bien défini car K est borné.

17) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est à valeurs dans K et en déduire qu'il en existe une suite extraite convergente vers un élément a de K. Montrer par ailleurs que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|u(x_n) - x_n\| \leq \dfrac{\delta(K)}{n}$. En déduire que l'élément a de K est un point fixe de u.

On suppose maintenant que le compact non vide convexe K est stable par tous les éléments de G. Soit un entier $r > 1$, $u_1, u_2, ..., u_r$ des éléments de G et $u = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i$.

18) Montrer que K est stable par u et en déduire l'existence d'un élément $a \in K$ tel que $u(a) = a$.

19) Montrer que $N_G\left(\dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \dfrac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$. En déduire que pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, on a $N_G(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a)) = N_G(u_j(a)) + N_G(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} u_i(a))$.

20) En déduire, pour tout $j \in \{1, ..., r\}$, l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \dfrac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$.

21) Déduire de la question précédente que a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, ..., r\}$.

22) En utilisant le résultat de la question 10, montrer qu'il existe $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$.

F. Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$

On se place à nouveau dans l'espace vectoriel euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle = Tr(A^T B)$. On rappelle que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ désigne le groupe linéaire et $O_n(\mathbf{R})$ le groupe orthogonal d'ordre n. Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Si $A \in G$, on définit l'application ρ_A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans lui-même par la formule $\rho_A(M) = A^T M A$. On vérifie facilement, et on l'admet, que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'application qui à $A \in G$ associe $\rho_A(M)$ est continue.

On note $H = \{\rho_A \ / \ A \in G\}$, $\quad \Delta = \{A^T A \ / \ A \in G\}$ et $K = \mathrm{Conv}(\Delta)$.

23) Montrer que $\rho_A \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ et que H est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$.

24) Montrer que Δ est un compact contenu dans $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et que K est un sous ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbf{R})$ qui est stable par tous les éléments de H.

25) Montrer qu'il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G$, $\rho_A(M) = M$. En déduire l'existence de $N \in \mathrm{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ tel que pour tout $A \in G$, $NAN^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$. En déduire enfin qu'il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbf{R})$ tel que $G = N^{-1}G_1 N = \{N^{-1}BN \ ; B \in G_1\}$.

Soit K un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ qui contient $O_n(\mathbf{R})$, et $N \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $NKN^{-1} \in O_n(\mathbf{R})$. On désigne par g l'automorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice N dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, par P un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ et par la symétrie orthogonale par rapport a P.

26) Montrer que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie, puis que c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbf{R}^n$. En déduire que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$. Montrer que g conserve l'orthogonalité et en déduire K.

Fin du problème

Type MINES-CENTRALE

SUJET 2

Type CCP

Ce sujet comporte deux exercices et un problème.

EXERCICE 1

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

.

On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier l'existence d'un réel $\rho > 0$ tell que :

$$\forall \lambda \in]0, \rho[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4) Application :
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) On supose A inversible. Montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

(b) En utilisant la question précédente, montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique, que A soit ou non inversible.

5) Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

EXERCICE 2

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit l'application f_n par :

$$f_n \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}},$$

et l'on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

1) pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Alors $u_0 = \displaystyle\int_{[0,1]} g' = g(1) - g(0) = \underline{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$.

2) On a $f_0 + f_1 = 1$, Donc $u_1 = 1 - u_0 =$, on pourra calculer $u_0 + u_1$.

3) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en déduire que cette suite converge. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

$$(f_n - f_{n+1})(x) = \frac{e^{-nx}(1-e^{-x})}{1+e^{-x}} \geq 0.$$

et donc par positivité de l'intégrale vient $u_n \geq u_{n+1}$. Donc $\underline{(u_n)_{n\in\mathbf{N}}\ \text{décroît}}$.
La positivité de f_n pour tout entier $n \geq 0$ assure que $u_n \geq 0$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0, donc convergente.

4) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n + u_{n-1} = \int_0^1 e^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}.$$

Donc $u_n + u_{n-1}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et, en même temps tend vers $\ell + \ell$. l'unicité de la limite donne $\boxed{\ell = 0}$.

PROBLÈME

Le but de ce problème est de démontrer le théorème du point fixe de PICARD, au moyen des séries, ce qui est l'objet de la partie I, et d'en voir plusieurs applications élémentaires dans les parties suivantes.

On désigne par E un espace vectoriel de **dimension finie**, il sera muni d'une norme $\|\cdot\|$.

On rappelle que si $\sum u_n$ est une série d'éléments de E, si la série réelle $\sum \|u_n\|$ converge alors la série $\sum u_n$ converge, c'est-à-dire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{E}$.

Une définition. Soit $k \in [0,1[$. On dira qu'une application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ est une *contraction stricte* de rapport k de l'espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, si pour tout $(x,y) \in \mathbf{E}^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Une notation. Pour tout entier naturel n et tout application f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$, on notera f^n l'application de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ définie par, pour tout $x \in \mathbf{E}$,

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois la fonction } f}, \text{ avec la convention } f^0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}.$$

Partie I : Le théorème du point fixe de PICARD

Soient $k \in [0,1[$, $f : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ une contraction stricte de l'espace vectoriel normée $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$, de rapport k, et a un point de $\mathbf{E}$.

On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout entier $n \geq 0$.

1) Exprimer x_n au moyen de a et de f, pour tout entier naturel n.

2) On pose pour tout entier naturel $u_n = x_{n+1} - x_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\|u_{n+1}\| \leq k\|u_n\|$, puis que :

$$\|u_n\| \leq k^n \|f(a) - a\|.$$

3) Déduire de la question précédente que la série $\sum u_n$ converge.

4) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément ℓ de $\mathbf{E}$.

5) Montrer que f est continue.

6) En déduire que ℓ est un point fixe de f.

7) Montrer que f n'a pas d'autre point fixe que ℓ.

On vient de prouver le résultat suivant :

Théorème du point fixe :*Une contraction stricte f de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ admet un et un seul point fixe ; pour tout élément a de $\mathbf{E}$, la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers ce point fixe.*

Partie II : Exemples et contre exemples

1) De la nécessité d'avoir une contraction stricte

On considère l'application g définie par :

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto t + \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

(a) Montrer que pour tout réel t, $|g'(t)| < 1$. En déduire que pour tout x et tout y réels,

$$|g(x) - g(y)| < |y - x|.$$

(b) Etudier et représenter l'application g.

(c) L'application g admet-elle un point fixe ? L'application g est-elle une contraction stricte de $(\mathbf{R}, |\cdot|)$?

2) Soit g une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout réel x, $|g'(x)| < \dfrac{1}{2}$. Soit f une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout réel x,

$$f(x) = f \circ g(x).$$

(a) Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout réel a, la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = a$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$, converge vers ℓ.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel x, $f(g^n(x)) = f(x)$.

(c) Montrer que f est constante.

3) Un système non linéaire dans $\mathbf{R}^2$

(a) On définit sur $\mathbf{R}^2$ les normes classiques $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, définie par

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|\ ;\ \|(x,y)\|_\infty = \sup\{|x|,|y|\},$$

pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

On va s'intéresser à la résolution sur $\mathbf{R}^2$ du système d'inconnue (x,y) suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 4x = \sin(x+y), \\ 3y = 3 + 2\arctan(x-y). \end{array}\right. \qquad (\dagger)$$

On considère également l'application ψ définie par :

$$\psi\ :\ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2\ ;\ (x,y) \mapsto \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

(b) Vérifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbf{R}^2$.

(c) Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

(d) Démontrer que pour tout a et tout b réels, on a :

$$|\sin b - \sin a| \leq |b-a| \text{ et } |\arctan b - \arctan a| \leq |b-a|.$$

(e) Prouver que ψ est une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_1)$.

(f) Montrer que le sustème $(\dagger)$ admet une et une seule solution dans $\mathbf{R}^2$.

(g) Déterminer $\|\psi\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) - \psi(0,0)\|_\infty$.

(h) L'application ψ est-elle une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$?
Quel commentaire peut on faire ?

Partie III : Un peu d'algèbre linéaire

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Si A, B, C etc. sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on notera pour tout $(i,j) \in \{1,...,n\}^2$, $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{i,j}$ etc., leurs coefficients respectifs d'indice (i,j). De même si X, Y, Z etc. sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on désigne pour tout élément i de $\{1,...,n\}$, par x_i, y_i, z_i etc., leurs coefficients respectifs situés sur la i^{e} ligne.

Dans la suite $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ est muni de la norme classique $\|\cdot\|_\infty$ définie par,

$$\|X\|_\infty = \sup_{i\in\{1,...,n\}} |x_i|,$$

pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sera muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|M\| = \sup_{i\in\{1,...n\}} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|,$$

pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On se propose d'étudier le système linéaire suivant d'inconnue X :

$$AX = B \qquad (\ddagger)$$

où B est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tel que, pour $i = 1, 2, ..., n$:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\in\{1,...n\}\setminus\{i\}} |a_{i,j}|.$$

1) Montrer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

2) Montrer que pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$\|MX\|_\infty \leq \|M\|\|X\|_\infty.$$

3) Montrer que (‡) admet une et une seule solution, on la notera Z_0.

4) Déterminer une matrice $\tilde{A}$, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, une matrice $\tilde{B}$, élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ telles que :

$$\tilde{A}Z_0 + \tilde{B} = Z_0\,;\, \|\tilde{A}\| < 1.$$

5) Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. On définit la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ par :

$$X_0 = U\,; \forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = \tilde{A}X_n + \tilde{B}.$$

En utilisant le théorème de PICARD, montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ à déterminer.

Montrer sans utiliser le théorème de PICARD que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers la limite précédemment trouvée.

⋆ ⋆
⋆

SUJET 3

Type ENS

NOTATIONS :

Dans tout le problème, $(E, \|.\|)$ désigne un espace vectoriel normé réel et E' l'ensemble des formes linéaires continues f de E dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E; \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

On dit qu'une partie non vide C de E est convexe si

$$\text{pour tous } x,\ y \in C \text{ et } t \in [0,1],\ tx + (1-t)y \in C.$$

Si U est une partie de E alors $\mathrm{Int}U$ et $\mathrm{Adh}U$ désignent respectivement l'intérieur et l'adhérence de U.

Les parties I) et II) sont indépendantes. La partie III) utilise les résultats de la partie II). La partie IV) utilise les résultats des parties précédentes. La dernière partie est indépendante des autres.

PRÉAMBULE

Définition. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans E est dite de* CAUCHY *si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$, tel que pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, si $p \geq q \geq n_0$ alors :*

$$\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

On dira que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si toute suite de CAUCHY *à valeurs dans E converge dans $(E, \|\cdot\|)$.*

1) Montrer que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans E convergente est de Cauchy.

2) On suppose E complet. Soit $(F_n)_{n\in N}$ une suite de fermés non vides de $(E, \|\cdot\|)$ décroissante (pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$) et telle que le diamètre δ_n de F_n tende vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$.

(a) On choisit pour tout élément n de $\mathbf{N}$, un élément x_n de F_n. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi construite est de CAUCHY.

(b) En déduire que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est un singleton.

3) Montrer que si E est de dimension finie, alors $(E, \|\cdot\|)$ est complet.
Indication : on pourra montrer pour commencer qu'une suite de Cauchy est bornée.

PREMIÈRE PARTIE : THÉORÈME D'EKELAND

Dans cette partie, A désigne une partie fermée non vide de E. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue et minorée et ε un réel strictement positif fixé.

1) Montrer qu'on peut construire une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ de parties de E et une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E telles que $K_0 = A$ et pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} \in K_n,\ f(x_{n+1}) \leq \inf_{K_n} f + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } K_{n+1} = \{x \in A \mid f(x) \leq f(x_{n+1}) - \varepsilon\|x - x_{n+1}\|\}.$$

2) Montrer que la suite (K_n) est décroissante.

3) Montrer que pour tous $n \geq 1$ et $x \in K_n$, $\|x - x_n\| \leq \dfrac{1}{2^n \varepsilon}$.

4) On suppose E de dimension finie. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point $x_0 \in A$ vérifiant : $\cap_{n\geq 0} K_n = \{x_0\}$.
Montrer en utilisant le préambule, que le résultat demeure en supposant l'espace E complet.

5) Montrer que pour tout $x \in A$,

$$f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|.$$

DEUXIÈME PARTIE : QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES CONVEXES

1) Soit C un convexe ouvert inclus dans E contenant 0. Pour tout $x \in E$, on pose :

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0, \frac{1}{\alpha}x \in C\right\}.$$

(a) Montrer que la définition ci-dessus a un sens et qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$.

(b) Montrer que $C = \{x \in E,\ p(x) < 1\}$.

(c) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in E$,

$$p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

(d) Montrer que pour tous x et $y \in E$,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

2) Soit K inclus dans E un convexe d'intérieur non vide.

(a) Montrer que $\mathrm{Int}K$ est convexe.

(b) Montrer que si K est fermé alors $\mathrm{Adh}(\mathrm{Int}K) = K$.

Troisième partie : Prolongement des formes linéaires et séparation des convexes

Dans cette partie, F désigne un espace vectoriel normé réel.

1) Soient $p\ : F \to \mathbb{R}_+$ une application vérifiant :

$$\forall x \in F,\ \forall \lambda > 0,\ p(\lambda x) = \lambda p(x) \tag{1}$$

$$\forall x, y \in F,\ p(x + y) \leq p(x) + p(y), \tag{2}$$

G un sous espace vectoriel strict de F (c'est-à-dire que $G \neq F$) et $g\ : G \to \mathbb{R}$ une forme linéaire sur G telle que pour tout $x \in G$, $g(x) \leq p(x)$. On fixe $u \in F \setminus G$ et on note $H = G \oplus \mathbb{R}u$ la somme directe de G et de la droite vectorielle engendrée par u.

(a) Montrer que pour tous $y', y'' \in G$, $p(y' + u) - g(y') \geq g(y'') - p(y'' - u)$.

(b) Montrer qu'il existe une application linéaire $h\ : H \to \mathbb{R}$ prolongeant g (i.e. pour tout $y \in G$, $h(y) = g(y)$) et vérifiant : pour tout $x \in H$, $h(x) \leq p(x)$.

Dans toute la suite du problème. on admettra le résultat de prolongement suivant :
Pour toute forme linéaire g définie sur un sous espace vectoriel G de F et vérifiant les hypothèses ci-dessus, il existe une forme linéaire $f\ : F \to \mathbb{R}$ prolongeant g et vérifiant : pour tout $x \in F$, $f(x) \leq p(x)$.

2) Soient A et B deux convexes non vides et disjoints inclus dans F. On suppose que A est ouvert. On note D l'ensemble $A - B = \{d \in F \mid \exists a \in A, b \in B \mid d = a - b\}$.

(a) Vérifier que D est un convexe ouvert et $0 \notin D$.

(b) Soit $x_0 \in D$ fixé. On note $C = D - \{x_0\}$. L'ensemble C est donc un convexe ouvert contenant 0 et on peut poser comme dans la partie II)

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0 \mid \frac{1}{\alpha}x \in C\right\}.$$

On note $G = \mathbb{R}x_0$ la droite vectorielle engendrée par x_0 et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(tx_0) = -t$. Montrer que pour tout $x \in G$, $g(x) \leq p(x)$.

(c) En déduire qu'il existe une forme linéaire f continue sur F, non nulle et telle que :

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in B} f(y).$$

On dira alors que f sépare A et B.

Quatrième partie : Théorème de Bishop-Phelps

Dans cette partie, l'espace E est supposé complet, Y désigne l'espace vectoriel produit $E \times \mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|(x, t)\|_Y = \|x\| + |t|$$

et Y' l'ensemble des formes linéaires continues sur Y.

1) (a) Montrer brièvement que l'application :

$$\varphi\ : \begin{cases} E' \times \mathbb{R} & \to & Y' \\ (\gamma, \alpha) & \mapsto & \Phi_{\gamma,\alpha} \end{cases}$$

définie par : $\Phi_{\gamma,\alpha}(x, t) = \gamma(x) + \alpha t$ est un isomorphisme.

(b) Calculer $\|\varphi(\gamma,\alpha)\|_{Y'}$ en fonction de $\|\gamma\|_{E'}$ et $|\alpha|$.

Dans la suite de cette partie, C désignera un convexe fermé borné non vide inclus dans E, f une forme linéaire continue sur E, ε un réel strictement positif fixé et $x_0 \in C$ un élément vérifiant :

$$\forall x \in C,\ f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|$$

(l'existence de x_0 a été établie dans la partie I)).

On notera :

$$C_1 = \{(x,t) \in E\times\mathbb{R} \mid t \leq f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|\} \text{ et } C_2 = \{(x,t) \in C\times\mathbb{R} \mid t \geq f(x)\}.$$

2) Montrer que $\mathrm{Int}C_1$ et C_2 sont deux convexes non vides disjoints de Y.

3) (a) Montrer en utilisant les résultats précédents qu'il existe $(h,\alpha) \in E'\times\mathbb{R}$ tel que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ soit non nulle et sépare $\mathrm{Int}C_1$ et C_2. La définition de la séparation de deux parties par une forme linéaire a été donnée dans la partie III.

(b) Montrer que la forme linéaire $\varphi(h,\alpha)$ sépare aussi C_1 et C_2.

4) Montrer que $\alpha \neq 0$. En déduire qu'il existe $g \in E'$ tel que la forme linéaire $\varphi(g,1)$ sépare C_1 et C_2.

5) Montrer que $\|g\|_{E'} \leq \varepsilon$ et que $f + g$ atteint son minimum sur C au point $x_0 \in C$.

6) En déduire que l'ensemble

$$E'_0 = \{\theta \in E' \mid \exists y_0 \in C,\ \theta(y_0) = \sup_{y\in C} \theta(y)\}$$

des formes linéaires continues qui atteignent leur maximum sur C est dense dans E'.

Cinquième partie : Quelques exemples

Dans cette partie C désigne la boule unité fermée de E :

$$C = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$$

et E'_0 l'ensemble des formes linéaires continues sur E qui atteignent leur maximum sur C :

$$E'_0 = \{f \in E' \mid \exists x_0 \in C,\ f(x_0) = \sup_{x\in C} f(x)\}.$$

1) On suppose que l'espace E est de dimension finie. Que peut-on dire de E'_0 ?

2) Dans cette question E désigne l'espace vectoriel des suites réelles $x = (x(k))_{k\geq 1}$ telles que $\lim\limits_{k\to+\infty} x(k) = 0$ muni de la norme $\|x\|_E = \sup\limits_{k\geq 1} |x(k)|$ et F l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u(k))_{k\geq 1}$ telles que la série $\sum |u(k)|$ converge muni de la norme $\|u\|_F = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |u(k)|$.

(a) Pour $u \in F$, montrer que l'on définit une forme linéaire continue ψ_u sur E en posant, pour tout $x \in E$,

$$\psi_u(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u(k)x(k)$$

et calculer $\|\psi_u\|_{E'}$.

(b) Montrer que l'application

$$\psi\ :\begin{cases} F & \to & E' \\ u & \mapsto & \psi_u \end{cases}$$

est une isométrie linéaire surjective.

(c) Quels sont les éléments $u \in F$ tels que $\psi_u \in E'_0$?

⋆ ⋆
⋆