n

MP* KERICHEN **2022-2023**

DS n$^{\text{o}}$2 pour les $\frac{3}{2}$

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 90% des *s* du pluriel et de 80% des accents est requis.

L'usage de la calculatrice est interdit.

UTILISATIONS DES MATRICES COMPAGNON

Notations et définitions :

Dans tout le problème K désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et n est un entier naturel non nul. Par ailleur on note :

Si u est un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E, on défini u^p, pour tout $p \in \mathbf{N}$, par récurrence :

$$u^0 = id_E,\ u^{p+1} = u^p \circ u.$$

On note :

— $K[X]_n$ la K-algèbre des polynômes de degré inférieur ou égal à n ;

— $\mathcal{M}_n(K)$ la K-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans K de matrice unité I_n et $\mathrm{GL}_n(K)$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$;

— $m_{i,j}$ le coefficient d'indice (i,j) d'un élément M de $\mathcal{M}_n(K)$;

— pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$, $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique et $\mathrm{Sp}\,(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres.

En outre, à tout $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$, polynôme unitaire de $K[X]_n$, on associe l'élément de $\mathcal{M}_n(K)$,

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(c'est-à-dire la matrice C_P est définie par $c_{i,j} = 1$, pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$, dans les autres cas).

Cette matrice s'appelle la **matrice compagnon de** P.

Les parties II. III. et IV. utilisent les résultats de la partie I. et sont indépendantes entre elles.

I. Propriétés générales

Dans cette partie on considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ élément de $K[X]_n$ et C_P sa matrice compagnon associée.

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P
3. Soit Q un polynôme de $K[X]_n$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\chi_A = Q$.
4. On note ${C_P}^\top$ la transposée de la matrice C_P.
   (a) Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}\,(C_P) = \mathrm{Sp}\left({C_P}^\top\right)$.
   (b) Soit λ élément de $\mathrm{Sp}\left({C_P}^\top\right)$, déterminer le sous-espace propre de ${C_P}^\top$ associé à λ.
   (c) Montrer que ${C_P}^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur K et a toutes ses racines simples.
   (d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que ${C_P}^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de Vandermonde $\begin{vmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$ est non nul.
5. *Exemples*
   (a) Soit M un élément de $\mathcal{M}_2(K)$. Montrer que $\chi_M(M) = O_2$.
   On admet le résultat pour n élément quelconque de $\mathbf{N}^*$ *:* $\chi_M(M) = O_n$.
   (b) Déterminer une matrice A (dont on précisera la taille n) vérifiant :
   $$A^{2002} = A^{2001} + A^{2000} + 1999 I_n.$$
   (c) Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E vérifiant : $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$; montrer que l'on peut trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon que l'on déterminera.
6. On dit qu'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique si il existe un élément X_0 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $(X_0, MX_0, ..., M^{n-1}X_0)$ soit libre.
   (a) Montrer que si M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est cyclique, alors elle est semblable à une matrice compagnon.
   (b) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est ouvert.
   (c) Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ diagonalisable et λ_1, λ_2,...,λ_n ses valeurs propre. Montrer que M est cyclique si et seulement si les λ_i, pour $i = 1, 2, ..n$, sont deux à deux distincts.
   Indication : on pourra considérer la somme des vecteurs d'une base de vecteurs propres.
   (d) Montrer que l'ensemble des matrices cycliques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est dense.

II. Localisation des racines d'un polynôme

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on pose pour tout entier $1 \leq i \leq n$:
$$r_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \text{ et } D_i = \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq r_i\}.$$

Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, on note $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

6. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(A)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à λ.

Montrer que pour tout entier $1 \leq i \leq n$ on a :

$$|\lambda x_i| \leq r_i \|X\|_\infty .$$

7. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbf{C}[X]$, établir que toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon R, où :

$$R = \max\{|a_0|, 1+|a_1|, 1+|a_2|, \ldots, 1+|a_{n-1}|\}.$$

8. *Application :*
Soit a, b, c et d quatre entiers naturels distincts et non nuls, montrer que l'équation d'inconnue n :
$$n^a + n^b = n^c + n^d$$
n'admet pas de solution sur $\mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$.

III. Suites récurrentes linéaires

On note $E = \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ l'espace vectoriel des suites de complexes et si u est une suite de E, on écrira $u(n)$ à la place de u_n pour désigner l'image de n par u.

On considère le polynôme $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \ldots + a_0$ de $\mathbf{C}[X]$ avec $a_0 \neq 0$ et on lui associe le sous-espace vectoriel F de E formé des éléments u vérifiant la relation :
$$\forall n \in \mathbf{N} : u(n+p) = -a_{p-1}u(n+p-1) - \ldots - a_0u(n).$$

10. Montrer que si λ est racine de P alors la suite $n \mapsto \lambda^n$ est élément de F.

11. Soit φ l'application de F vers $\mathbf{C}^p$ définie par : $u \mapsto (u(0), u(1), \ldots, u(p-1))$, montrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Quelle est la dimension de F ?

12. Pour tout entier $0 \leq i \leq p-1$ on définit les éléments e_i de F par :
$$e_i(i) = 1 \text{ et, lorsque } 0 \leq j \leq p-1 \text{ et } j \neq i,\ e_i(j) = 0.$$
   (a) Déterminer pour $0 \leq i \leq p-1$, la valeur de $e_i(p)$.
   (b) Montrer que le système de vecteurs $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$ est une base de F.
   (c) Soit u un élément de F, établir que $u = \sum_{i=0}^{p-1} u(i)e_i$.

13. Si u est un élément de E, on définit l'élément $f(u)$ de E par : $f(u) : n \mapsto u(n+1)$. Montrer que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E et que F est stable par f.

14. Soit g est l'endomorphisme de F induit par f, Déterminer la matrice de g dans la base $(e_0, e_1, \ldots, e_{p-1})$.

15. On suppose que P admet p racines non nulles et deux à deux distinctes : λ_0, λ_1, …, λ_{p-1}.
   (a) Déterminer une base de F formée de vecteurs propres de g.
   (b) En déduire que, si u est élément de F, alors il existe des constantes complexes k_0, k_1, …, k_{p-1} telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, u(n) = k_0\lambda_0^n + k_1\lambda_1^n + \ldots + k_{p-1}\lambda_{p-1}^n$.

16. *Exemple :* (On revient à la notation usuelle u_n)
Soit a, b et c trois réels distincts.
Déterminer une base de l'espace vectoriel des suites définies par u_0, u_1 et u_2 et par la relation de récurrence valable pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$u_{n+3} = (a+b+c)u_{n+2} - (ab+ac+bc)u_{n+1} + abc.$$

IV. Matrices vérifiant : $\mathrm{rg}(U-V)=1$

Dans cette partie, pour une matrice A, on notera C_A la matrice compagnon du polynôme χ_A.

On admet le résultat suivant qui sera vu en cours d'année et dont la forme matricielle a été admise en I.5.(a) :

Si f est un endomorphisme de $\mathbf{E}$, alors $\chi_f(f)$ est nul.

17. Une matrice A est-elle nécessairement semblable à la matrice compagnon C_A ?

    Pour tout couple (U,V) de matrices de $\mathrm{GL}_n(K)$, on considère les deux propositions suivantes, que l'on identifie chacune par un symbole :

    (*) : $\mathrm{rg}(U-V)=1$

    (**) : Il existe une matrice inversible P telle que $U=P^{-1}C_UP$ et $V=P^{-1}C_VP$.

18. Montrer qu'un couple (U,V) de matrices distinctes de $\mathrm{GL}_n(K)$ vérifiant (**) vérifie (*).
19. Déterminer un couple (U,V) de matrices de $\mathrm{GL}_2(K)$ $(n=2)$ vérifiant (*) mais ne vérifiant pas (**) et déterminer le plus grand commun diviseur des polynômes χ_U et χ_V.

    Dans la suite de cette partie, (U,V) est un couple de matrices de $\mathrm{GL}_n(K)$ vérifiant (*) et tel que χ_U et χ_V sont deux polynômes premiers entre eux.

    Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et de base B, on désigne par u et v les automorphismes de E tels que U (respectivement V) soit la matrice de u (respectivement v) dans la base B.

    Enfin on pose $H=\mathrm{Ker}(u-v)$.

20. Montrer que H est un hyperplan vectoriel de E.
21. Soit $F\neq\{0\}$ un sous-espace vectoriel de E stable par u et par v c'est-à-dire :
    $$u(F)\subset F \text{ et } v(F)\subset F.$$
    On notera u_F (respectivement v_F) l'endomorphisme induit par u (respectivement v) sur F.

    On rappelle que χ_{u_F} divise χ_u.

    (a) Montrer que F n'est pas inclus dans H.

    (b) On suppose que $F\neq E$, montrer que $F+H=E$ puis que l'on peut compléter une base B_F de F par des vecteurs de H pour obtenir une base B' de E. En utilisant les matrices de u et v dans la base B' montrer que l'on aboutit à une contradiction.

    (c) Quels sont les seuls sous-espaces stables à la fois par u et par v ?
22. Pour $j\in\mathbf{N}$, on note $G_j=\{x\in E, u^j(x)\in H\}$.

    (a) Montrer que les sous-espaces G_j sont des hyperplans vectoriels de E.

    (b) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j\neq\{0\}$.

    (c) Soit y un vecteur non nul de $\displaystyle\bigcap_{j=0}^{n-2} G_j$, on pose pour $0\leq j\leq n-1$: $e_j=u^j(y)$.

    Montrer que $B''=(e_0,e_1,\ldots,e_{n-1})$ est une base de E.

    (d) Montrer que la matrice de u (respectivement v) dans B'' est C_U (respectivement C_V).

    (e) Conclure.
23. *Application :*

    Soit u et v deux automorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension n vérifiant :
    $$\mathrm{rg}(u-v)=1,\ \chi_u(X)=(-1)^n(X^n+1) \text{ et } \chi_v(X)=(-1)^n(X^n-1).$$
    Montrer que le groupe engendré par u et v est fini de cardinal inférieur ou égal à $(2n)!$.

Fin de l'énoncé.

Correction du DS n°3

Partie I

1) En développant par rapport à la première ligne on trouve $\pm \det C_P = a_0 = P(0)$.
Donc C_p est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2)
Traité en T.D. et exercice de colle.

$$\boxed{\chi_{C_P} = P.}$$

3)
• Si Q est un polynôme caractéristique alors d'après le cours il est unitaire.
• Réciproquement si Q est unitaire, alors Q est le polynôme caratéristique de C_Q.
Au total : Q est un polynôme caratéristique si et seulement si il est unitaire.

4)a) Cf. cours.

4)b) on a ${}^tC_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

$X \in \mathrm{E}_\lambda(C_p^\top)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1, \\ x_3 = \lambda x_2, \\ \vdots \\ x_n = \lambda x_{n-1}, \\ -a_0 x_1 - \ldots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n. \end{cases}$$

Donc $X \in \mathrm{E}_\lambda({}^\mathrm{t}C_p)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda^1 x_1, \\ x_3 = \lambda^2 x_1, \\ \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1, \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1}) x_1 = \lambda^n x_1. \end{cases}$$

Or λ est valeur propre de $C_p^\top$ donc $(-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1}) = \lambda^n$. Donc

$$\boxed{\mathrm{E}_\lambda(C_p^\top) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\right)}$$

4c)

• Si P est scindé à racines simples alors $\chi_{C_P^\top}$ aussi et donc $C_P^\top$ est diagonalisable.

• Réciproquement, supposons que $C_P^\top$ soit diagonalisable. Alors $\chi_{C_P^\top}$ est scindé donc P aussi et, pour tout λ racine de P, on a $\lambda \in \mathrm{sp}(C_p^\top)$ et la multiplicité de λ est égale à $\dim(\mathrm{Ker}(C_p^\top - \lambda I_n))$. Or, on a vu au (b) que $\dim(\mathrm{Ker}\big(C_p^\top - \lambda I_n)) = 1$. Donc P est scindé à racines simples.

Ainsi $C_P^\top$ est-il diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

4d))

• Les colonnes du déterminant sont des vecteurs propres de $C_P^\top$ associées dans cet ordre à λ_1, λ_2...,λ_n, et les valeurs propres étant deux à deux distinctes, ces vecteurs propres sont indépendants et donc le déterminant (déteminant de ces vecteurs dans la base canonique) est non nul.

5a) Laissé en exercice.

5b)

L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton (cf. IV.) était utile dans cette question Mais pas indispensable.

Posons $P(X) = X^{2002} - X^{2001} - X^{2000} - 1999$. La matrice C_p, d'ordre 2002. vérifie par Cayley-Hamilton $\chi_{c_p} = 0_{2002}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{C_p^{2002} - C_p^{2001} - C^{2000} - 1999 I_{2002} = 0_{2002}},$$

$$C_p = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1999 \\ 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ & & & \\ 0 & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donnons une preuve sans Cayley-Hamilton.

Notons $(E_1, E_2, \ldots, .., E_{2002})$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2002,1}(\mathbf{K})$. On a :

$$C_pE_1 = E_2, C_pE_2 = E_3, ...C_pE_{2001} = E_{2002}, C_pE_{2002} = 1999E_1 + C_p^{2000}E_{2001} + C_p^{2001}E_{2002}.$$

Donc

$$E_2 = C_pE_1, E_3 = C_p^2E_1, ...E_{2002} = C_p^{2001}E_1, C_p^{2002}E_1 = 1999E_1 + C_p^{2000}E_1 + C_p^{2001}E_1$$

En multipliant successivement la dernière égalité, par C_p, C_p^2,...,C_p^{2001} on a, pour $i = 1, ..., 2002$,

$$C_p^{2002}E_i = 1999E_i + C_p^{2000}E_i + C_p^{2001}E_i.$$

Donc on retrouve que : $C_p^{2002} - C_p^{2001} - C_p^{2000} - 1999I_{2002} = 0_{2002}$.

5c)

6) Exercice de colle.

Déjà vu plusieurs fois cette année...

Partie II

6) Par hypothèse, on a pour $i = 1, \ldots, n$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i.$$

Donc par l'inégalité triangulaire,

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.|x_j| \leq r_i \|X\|_\infty.$$

7) Soit λ une racine de P, donc une valeur propre de C_P (cf. partie I) et X un vecteur propre associé à cette valeur propre. On a par 6,

$$|\lambda x_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |C_P(i,j)| \right) \|X\|_\infty \leq R \|X\|_\infty.$$

Soit i un indice tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$, On a alors, puis que $\|X\|_\infty$ est non nulle que $|\lambda| \leq R$, c'est à dire : λ est élément du disque fermé de centre O de rayon $\mathbf{R}$.
8) Une application amusante !
Supposons pour fixer les idées que a soit le plus grand des quatre entiers a, b, c, d Posons

$$P(X) = X^a + X^b - X^c - X^d$$

La matrice C_P ne contient que des $0, \pm 1$ et on a avec les notations de la question précédente $R = 2$.
Les seules racines éléments de $\mathbf{N}$ possibles sont donc $0, 1, 2$.
Or si 2 était racine de P, alors on aurait (avec par exemple $c > d$),

$$2^b(1 + 2^{a-b}) = 2^d(1 + 2^{c-d})$$

Ce qui est absurde puisque la valuation dyadique de $2^b(1 + 2^{a-b})$ est b qui est distinct de d, valuation dyadique de $2^d(1 + 2^{c-d})$.
Donc les seules racines dans $\mathbf{N}$ de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont 0 et 1.

Partie III

10) Supposons λ racine de P, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\lambda^{n+p} + a_{p-1}\lambda^{n+p-1} + \ldots + a_0 \lambda^n = \lambda^n P(\lambda) = 0.$$

La suite $(\lambda_n)_{n \in N}$ est donc élément de F.
11) • φ est linéaire (ses composantes sont des formes linéaires).
• φ est bijective.
En effet Soit $(a_0, a_1, \ldots a_{p-1})$ un élément de $\mathbf{C}^p$. La définition par récurrence d'un élément de F assure qu'il existe un et un seul élément u de F, qui vérifie $u(0) = a_0, \ldots . u(p-1) = a_{p-1}$, donc un et un seul antécédent de $(a_0, a_1, \ldots a_{p-1})$ par φ.
Donc φ est un isomorphisme.
Donc F, isomorphe à $\mathbf{C}^p$, est de dimension p.
12a) Pour $i = 0, \ldots, p-1$ on a : $e_i(p) = -a_{p-1}e_i(p-1) - \ldots - a_0 e_i(0) = -a_i$.
12b) la famille $(e_0, e_2, \ldots e_{p-1})$ est l'image de la base canonique de $\mathbf{C}^p$ par l'isomorphisme φ^{-1}. C'est donc une base de F.
12c)

$$u=\varphi^{-1}(u(0),...,u(p-1))=\varphi^{-1}\sum_{i=0}^{p-1}u(i)(\underbrace{0,0,...0,1}_{i+1},0,...0)=\sum_{i=0}^{p-1}u(i)\varphi^{-1}(\underbrace{0,0,...0,1}_{i+1},0,...0)=\sum_{i=0}^{p-1}u(i)e_i.$$

13)
f est clairement linéaire.
Soit $u \in F$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$f(u)(n+p)=u(n+1+p)=-a_{p-1}u(n+1+p-1)-...-a_0u(n+1)=-a_{p-1}f(u)(n+p-1)-...-a_0f(u)(n),$$

et donc $f(u) \in F$.
F est stable par f.

INDICATION POUR LA SUITE
ceci n'est plus une correction

14) Par **12a)** : $f(e_j)(p-1)=e_j(p)=-a_j$ et

$$f(e_j)=(0,0,0,\dots,0,1,0,\dots,-a_j,\dots) \quad \text{et} \quad \varphi(f(e_j))=(0,0,0,\dots,0,1,0,\dots,-a_j)$$

le 1 est en position $j-1$ pour $j \geq 1$ et n'existe pas si $j=0$.
On obtient que la matrice de g dans la base $(e_i)_{i=0,\dots,p-1}$ est $C_p^{\top}$.
15a) D'après **4c)**, $C_P^{\top}$ est diagonalisable et une base de vecteurs propres est $(V_1,V_2,...,V_n)$, où $V_i=(1,\lambda_i,...,\lambda_i^{n-1})$ Donc une base de F constitué de vecteur propre de g est $(v_1,....v_n)$, où $(v_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_j e_j$, comme $f(v_j)=\lambda_j v_j$ on a

$$v_j=(\lambda_j^n)_{n\in\mathbf{N}},$$

suite géométrique.
15b) Tout élément de F s'écrit dans cette base qui est constituée de suites géométriques. le résultat est immédiat.
16) Les racines de $P(X)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$ sont a,b et c.
Ces réels étant supposés distincts, tout est fini : une base de l'espace F est constituée par les trois suites géométriques $(a^n),(b^n),(c^n)$ et tout élément de F s'écrit

$$u_n=\alpha a^n+\beta b^n+\gamma c^n$$

où α,β,γ sont fonction des valeurs initiales u_0,u_1,u_2 (la matrice de passage entre ces paramètres étant de la forme V, cf. supra).

Partie IV

Notons que par la première partie, $\chi_A=\chi_{C_A}=(-1)^nP$.

17 Hé non : on peut s'inspirer du **5b)**, la matrice $C_A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&0\\1&0&&\vdots&\vdots\\0&1&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&&&&\\0&\dots&&1&0\end{pmatrix}$ convient avec $A=0_n$, matrice nulle ! Alors que C_A est de rang $n-1$.

18) Supposons $(**)$, c'est à dire que (U, C_U) et (V, C_V) soient simultanément semblables : comme le rang est invariant par changement de base, on a

$$\mathrm{rg}(U-V) = \mathrm{rg}(C_U - C_V) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & \dots & \bullet \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \bullet \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne peut être nulle : on aurait $\mathrm{rg}(U-V) = 0$ et donc $U = V$ ce qui est exclu. Donc elle est de rang 1, ce qui prouve $(*)$.

19) Prenons $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $C_U = C_V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ car $\chi_U = \chi_V = (X-1)^2$.
Néanmoins $U = I_2$ n'est clairement pas semblable à C_U, alors que V est semblable à C_V.
Comme les polynômes caractéristiques ont été choisis égaux, leur pgcd est leur valeur commune $(X-1)^2$.

20) Par le théorème du rang, H est un hyperplan.

21a) Si l'on avait $F \subset H$ on aurait $u_F = v_F$ et donc $\chi_{u_F} = \chi_{v_F}$. Mais $\chi_{u_F} | \chi_u$ et $\chi_{v_F} | \chi_v$, on aurait donc un diviseur commun non trivial contrairement à l'hypothèse que ces deux polynômes sont premiers entre eux.
Donc $F \not\subset H$.

21b) Soit $x \in F \setminus H$: alors H et x engendrent E puisque H est un hyperplan et $x \notin H$. Cela signifie que $F + H = E$ (mais pas $F \oplus H = E$!).
Il n'y a pas de théorème du cours qui permette de conclure immédiatement, même si cela paraît clair. On peut par exemple :

— utiliser deux fois le théorème de la base incomplète en partant d'une base de $F \cap H$ que l'on complètera dans F, puis dans H ;

— considérer les familles libres maximales de la forme $(B_F, h_1, \dots, h_k)$ où B_F est une base donnée de F et les h_i appartiennent à H. On vérifie qu'une telle famille engendre F et H (par maximalité), et donc c'est une base de E ;

— faire de bien d'autres façons.

On a donc par blocs

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 0 & \widetilde{U} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}(v) = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ 0 & \widetilde{V} \end{pmatrix},$$

où les sous-matrices $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ coïncident, puisque u et v agissent de la même façon sur H ! (en fait, même les sous-matrices *au dessus* de celles-ci sont égales).
Donc $\chi_{\tilde{U}} = \chi_{\tilde{V}}$ est un diviseur commun de χ_U et χ_V, contrairement à l'hypothèse qu'ils sont premiers entre eux.

21c) Finalement les seuls sous-espaces stables à la fois par u et v sont E entier et $\{0\}$.

22a) u^j est, comme u, un automorphisme, qui conserve la dimension : donc $G_j = u^{-j}(H)$ est, comme H, un hyperplan.

22b) On a $\dim G_0 = \dim H = n-1, \dim G_0 \cap G_1 \geq n-2, \dots \dim G_0 \cap \dots \cap G_{n-2} \geq n-1$ en vertu du

Lemme. Si H' est un hyperplan et F un sev, on a $\dim(F \cap H') \geq \dim F - 1$.
Démonstration du lemme : soit Δ une droite supplémentaire de H'. Alors $F = F \cap H' \oplus F \cap \Delta$, et $F \cap \Delta$ est au plus une droite, cqfd.

22c) Un tel y existe d'après la question précédente.
La famille $\mathrm{FE} = \{y, u(y), \dots, u^{p-1}(y)\}$ ne peut être libre pour toute valeur de p (au maximum elle peut avoir n éléments !), soit donc p maximal tel que la famille FE soit libre, cette famille est une base de l'espace F qu'elle engendre.
Nous voulons montrer que $F = E$ c'est-à-dire que $p = n$.

— D'abord notons que $e_0, e_1, \ldots, e_{n-2} \in H$ par définition même de y. Raisonnons dorénavant par l'absurde : si $p < n$, alors on a donc $F \subset H$.

— De plus F est stable par u car l'image par u de la base FE est encore dans F : en particulier, $u(e_{p-1})$ est combinaison linéaire de FE par maximalité de p.

— Enfin et triomphalement, pour tout $x \in F$ on a $v(x) = u(x) \in F$ puisque $F \subset H$ et $v_F = u_F$. Donc F est stable par v lui aussi.

Nous sommes arrivés à une impossibilité d'après **21c)**. Donc $F = E, p = n$ et $B'' =$ FE est une base de E.

22d) Utilisons Cayley-Hamilton : $\chi_u(u)(y) = 0 = (-1)^n(u^n(y) + a_{n-1}u^{n-1}(y) + \ldots + a_0 y)$ et donc :

— $u(e_k) = u^k(y)$ pour $k < n-1$;

— $u(e_{n-1}) = u(u^{n-1}(y)) = u^n(y) = -a_0 y - \ldots - a_{n-1}u^{n-1}(y) = -a_0 e_0 - \ldots - a_{n-1}e_{n-1}$.

Ce qui signifie que la matrice de u est bien C_u dans la base $B'' =$ FE. De même pour v pour les $n-1$ premières colonnes, la dernière est alors obligatoirement constituée des coefficients de χ_v par **2**.

22e) Récapitulons : on a montré que le changement de base vers FE change U (resp. V) en C_U (resp. C_V). Nous avons donc montré $(**)$.