CORRECTION DU SUJET 1

A. Préliminaires sur les convexes

1) Cours.

2) Vu en exercice de colle.

B. Préliminaires sur les matrices symétriques

3) Soit U un élément de $M_2(\mathbf{R})$. On note C_1 et C_2 sa première et sa seconde colonne. Montrer que (C_1, C_2) est une base orthonormée de $\mathbf{R}^2$ si et seulement si U est élément de $O_2(\mathbf{R})$. On a immédiatement :

$$M^\top M = \begin{pmatrix} C_1^\top \\ C_2^\top \end{pmatrix}(C_1|C_2) = \begin{pmatrix} \langle C_1|C_1\rangle & \langle C_1|C_2\rangle \\ \langle C_2|C_1\rangle & \langle C_2|C_2\rangle \end{pmatrix}.$$

Donc (C_1, C_2) est orthonormée si et seulement si $M^\top M = I_n$, soit si et seulement si M est orthogonale.

4) Voir TD.

5) Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$. Notons $\lambda_1, ...\lambda_n$ les n valeurs propres, distinctes ou non, de S, qui sont, l"'noncé le dit réelles.

• Hypothèse : S est définie positive. Soient λ uns valeur propre de S, et W un vecteur propre associé. Alors en particulier, puisque $W \neq 0$,

$$0 < W^\top SW = \lambda W^\top W = \lambda\|W\|^2.$$

Donc $\boxed{\mathrm{sp}(S) \subset \mathbf{R}_+^*}$.

• Hypothèse : *Supposons les valeurs propres de S strictement positives.*
On a admis disposer de $P \in O_n(R)$ tel que $S = P\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^\top$.
Soit X un élément de $\mathbf{R}^n$ non nul.

$$X^\top SX = X^\top P\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^\top X = (P^\top X)^\top \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)(P^\top X).$$

Notons pour $i = 1, ..., n$, x_i' la i^{e} coordonnée de $(P^\top X)$. Alors

$$X^\top SX = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {x_i'}^2.$$

Comme X est non nul et que $P^\top$ est inversible les x_i' ne sauraient être tous nuls et donc $X^\top SX > 0$.
Donc $\underline{S \text{ est définie positive.}}$

Donc $\underline{\text{une matrice symétrique est définie positive si et seulement si son spectre est contenu dans } \mathbf{R}^{*+}.}$

6) • Soit $S \in S_n^{++}(\mathbf{R})$. D'après ce qui précède elle s'écrit :

$$S = P^\top \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P,$$

où $P \in O_n(r)$ et λ_1,...,λ_n sont des réels strictements positifs. Posons $R = P^\top \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P$.
D'une part l'orthogonalité de P veut que $R^\top R = S$. D'autre part R est élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, puisque son déterminant qui est $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$ est non nul.

• Réciproquement Soit $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. Posons $S = R^\top R$
D'abord $S^\top = (R^\top R)^\top = R^\top {R^\top}^\top = R^\top R = S$. Donc S est symétrique. Ensuite pour tout X élément *non nul* de $\mathbf{R}^n$,

$$X^\top SX = X^\top R^\top RX = (RX)^\top RX = \|RX\|^2 > 0,$$

en effet l'inversibilité de R interdit que RX soit nul.
Finalement $\underline{S \in S_n^{++}(\mathbf{R})}$.

7) Soient A et B des éléments $S_n^{++}(\mathbf{R})$ et t un élément de $[0,1]$.
En premier lieu par linéarité de la transposition, $tA+(1-t)B$ est symétrique. Ensuite pour tout $X \in \mathbf{R}^n$,

$$X^\top(tA+(1-t)B)X = tX^\top AX + (1-t)X^\top BX \geq t\min(X^\top AX, X^\top BX) + (1-t)\min(X^\top AX, X^\top BX) = \min(X^\top AX, X^\top BX) > 0$$

Donc $S_n^{++}(\mathbf{R})$ est convexe.

C. Autres préliminaires

8) Vu en exercice de colle

9) *Boudons l'indication chronophage et qui ne saurait être utile en dimension infinie.*
Soit a un vecteur unitaire de E.
Soit x un vecteur non nul de E. Posons $n = \dfrac{x}{\|x\|}$. Un calcul simple (ou le cours de CM2 sur le losange affirme que $(n+a)\perp(n-a)$, donc

$$0 = \langle g(n+a), g(n-a)\rangle = \langle g(n)+g(a), g(n)-g(a)\rangle = \|g(n)\|^2 - \|g(a)\|^2.$$

Donc par linéarité de g,

$$\|g(x)\| = \|g(a)\|\|x\|,$$

égalité qui dégénère pour x nul en $0=0$.
Posons $k = \|g(a)\|$. On exclut le cas sans intérêt où $k=0$ et où donc g est nulle. On a que $\dfrac{1}{k}\mathrm{id}_\mathbf{E} \circ g$ conserve la norme donc est un endomorphisme f orthogonal. Donc

$$\boxed{g = k\mathrm{id}_\mathbf{E} \circ f}$$

autrement dit g est produit de l'homothétie de rapport k et de l'endomorphisme orthogonal f.

10) Exercice de colle.

D. Quelques propriétés de la compacité

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E pour laquelle il existe un reel $\varepsilon > 0$ tel que pour tous entiers naturels $n \neq p$, on ait $\|x_n - x_p\| \geq \varepsilon$.

11) Soit $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ une suite extraite. Supposons qu'elle converge vers ℓ. Alors pour tout entier $p \geq 0$, puisque $\phi(p) \neq \phi(p+1)$,

$$\varepsilon < \|x_{\phi(p)} - x_{\phi(p+1)}\|,$$

ce qui, en laissant p tendre vers $+\infty$, conduit à :

$$\varepsilon \leq \|\ell - \ell\| = 0.$$

Contradiction ! Donc aucune suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge.

12) Soit $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Supposons qu'aucune réunion finie de de boules ouvertes ne contienne K. Choisissons x_0 un point de K. Par hypothèse K n'est pas inclus dans $B(x_0,\varepsilon)$. Il est donc loisible de choisir un élément x_1 de $K \setminus B(x_0,\varepsilon)$. Comme K n'est pas davantage inclus dans $B(x_0,\varepsilon) \cup B(x_1,\varepsilon)$ on peut choisir x_2 élément de $K \setminus (B(x_0,\varepsilon) \cup B(x_1,\varepsilon))$. Plus généralement ont construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de K telle que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, x_{n+1} \notin \bigcup_{k=0}^{n} B(x_i,\varepsilon).$$

Par construction la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfait la propriété de la question précédente, puisque pour tout couple d'entiers (n,p) tel que $0 \leq n < p$, x_p n'est, en particulier, pas élément de $B(x_n,\varepsilon)$. Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dépourvue de valeur d'adhérence ce qui contredit la compacité de K.

Donc il existe un entier $p > 0$ et $x_1, ..., x_p$ éléments de E tels que $\boxed{K \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\varepsilon)}$.

13) • Supposons la propriété à prouver fausse. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, on dispose d'un élément x_n de K tel que $B(x_n, 2^{-n})$ ne soit incluse dans aucun des Ω_i, $i \in I$. La compacité de K fournit une extractrice ϕ telle que $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ converge vers un élément a de K. Ce dernier est dans un des ouverts Ω_i, disons Ω_{i_0}. On dispose donc par ouverture de Ω_{i_0} de $r \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $B(a, r) \subset \Omega_{i_0}$. Choisissons P tel que $2^{-P} < \dfrac{r}{2}$. La convergence de $(x_{\phi(p)})_{p\in\mathbf{N}}$ vers a fournit un entier $p_0 \geq P$ tel que $\|x_{\phi(p_0)} - a\| < \dfrac{r}{2}$. La boule $B(x_{\phi(p_0)}, 2^{-\phi(p_0)})$ est incluse dans $B(a, r)$, puisque $2^{-\phi(p_0)} \leq 2^{-p_0} \leq 2^{-P} < \dfrac{r}{2}$. Donc

$$B(x_{\phi(p_0)}, 2^{\phi(p_0)}) \subset \Omega_{i_0},$$

ce qui contredit la définition de $x_{\phi(p_0)}$.
Donc il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i.
• Pour un tel réel α la question précédente nous offre $x_1, ..., x_p$ éléments de E et même de K, tels que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{p} B(x_k, \alpha)$.
Pour $k = 1, 2, ...p$, le premier point fournit un élément i_k de I tel que $B(x_k, \alpha) \subset \Omega_{i_k}$, Alors

$$\boxed{K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B(x_k, \alpha) \subset \bigcup_{k=1}^{p} \Omega_{i_k}.}$$

14) Pour tout $i \in I$, notons Ω_i le compémentaire de F_i.
Ainsi pour tout $i \in I$, Ω_i est-il ouvert et $\bigcup\limits_{i\in I} \Omega_i = \mathbf{E}$. En particulier,

$$K \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i$$

La question précédente nous offre un partie finie J de I telle que :

$$K \subset \bigcup_{i\in J} \Omega_i$$

Donc en passant au complémentaire, $\bigcap\limits_{i\in J} F_i$ est incluse dans le complémentaire de K. Mais $\bigcap\limits_{i\in J} F_i$ est aussi incluse dans K (les F_i le sont), donc :

$$\boxed{\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset},$$

et J est FINI.

E. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ et K un sous-ensemble non vide, compact et convexe de E. Pour tout $x \in E$, on pose $N_G(x) = \sup\limits_{u\in G} \|u(x)\|$.

15) Soient x, y, des éléments de E et λ de $\mathbf{R}$.

i. L'application $u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto u(x) \in E$ est linéaire et $\dim(\mathcal{L}(E)) < +\infty$ donc elle est continue.
Ainsi cette application est bornée sur le compact G
donc $\{\|u(x)\|, u \in G\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}^+$
d'où l'existence dans $\mathbf{R}^+$ de $N_G(x) = \sup\limits_{u\in G} \|u(x)\|$.

ii. Pour tout $u \in G$, on a : $\|u(x + y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$.
donc $\|u(x + y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$,
La borne supérieure étant le plus petit des majorants, on a bien $N_G(x + y) \leq N_G(x) + N_G(y)$.

iii. Si $\lambda = 0$, on a l'égalité car $N_G(\lambda x) = 0 = |\lambda| \cdot N_G(x)$
On suppose $\lambda \neq 0$.
Soit $u \in G$. On a $\|u(\lambda x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leq |\lambda| \cdot N_G(x)$
Comme c'est vrai pour tout u de G, on obtient : $N_G(\lambda x)$
$leq|\lambda| \cdot N_G(x)$

On applique cette inégalité au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur λx : $N_G(x)$
$leq|1/\lambda| \cdot N_G(\lambda x)$
donc $N_G(\lambda x) \geq |\lambda| \cdot N_G(x)$
D'où l'égalité.

iv. On suppose $N_G(x) = 0$.
Donc en particulier, puisque G est un sous-groupe du groupe linéaire

$$\underline{\|x\| = \|\mathrm{id}_E(x)\| = 0}$$

On a montré que $\boxed{N_G \text{ est bien définie et que c'est une norme sur } E}$

16)
- Soit $u \in G$ et $x \in E$.
L'application $v \longmapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même de bijection réciproque $v \longmapsto v \circ u^{-1}$
donc $N_G(u(x)) = \sup\limits_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \sup\limits_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$.
Ainsi $\boxed{N_G(u(x)) = N_G(x)}$
- Soit $(x, y) \in E^2$ tel que x soit non nul.
Hypothèse : *On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.*
Pour tout $u \in G$, on a $\|u(x + y)\| = (1 + \lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1 + \lambda \geq 0$
En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient : $N_G(x + y) = (1 + \lambda)N_G(x)$
donc $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$ car $\lambda \geq 0$ et N_G est une norme
Hypothèse : *On suppose que $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$.*
Le théorème des bornes atteintes avec l'application continue définie sur le compact G : $u \longmapsto \|u(x)\|$ nous fournit $v \in G$ tel que $N_G(x + y) = \|v(x + y)\|$
On note $x' = v(x)$ et $y' = v(y)$ de sorte que : $N_G(x + y) = \|x' + y'\|$ et avec ce qui précède, on a $N_G(x) + N_G(y) = N_G(x') + N_G(y')$; donc

$$\|x' + y'\| = N_G(x') + N_G(y').$$

Ainsi $N_G(x') + N_G(y') \leq \|x'\| + \|y'\|$ en utilisant l'inégalité triangulaire pour $\| \cdot \|$ or $N_G(x') \geq \|x'\|$ et $N_G(y') \geq \|y'\|$ car $\mathrm{id}_E \in G$ donc

$$\|x' + y'\| = N_G(x') + N_G(y') = \|x'\| + \|y'\|.$$

L'égalité dans l'inégalité triangulaire fournit $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $\boxed{\lambda x' = y'}$.
$\boxed{N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y) \text{ si et seulement si } \lambda x = y \text{ où } \lambda \in \mathbf{R}^+}$

1) Soit $x \in K$.
Comme K est stable par u, on montre par récurrence sur i que $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n est-il le barycentre du système pondéré $\big((u^i(x), 1)\big)_{0 \leq i \leq n-1}$ à coefficients positifs, donc élément du *convexe* K.
Mais comme K est compact, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ qui est à valeurs dans K, admet une suite extraite convergente vers un élément a de K.
On a, pour tout entier $n \geq 0$, par téléscopage

$$\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n}\|u^n(x) - x\|,$$

et donc $\boxed{\|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}}$ car x et $u^n(x) \in K$
Notons ϕ une extractrice telle que $\big(x_{\phi(n)}\big)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers a. D'après la précédente inégalité, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $\|u(x_{\phi(n)}) - x_{\phi(n)}\| \leq \dfrac{\delta(K)}{\phi(n)}$ et de plus $\dfrac{\delta(K)}{\phi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
Par ailleurs, comme l'application $y \mapsto u(y) - y$ est continue (linéaire en dimension finie), et que la norme est continue, $\big\|u(x_{\phi(n)}) - x_{\phi(n)}\big\|$ converge vers $\|u(a) - a\|$.
Par unicité de la limite $\boxed{\text{l'élément } a \text{ de } K \text{ est un point fixe de } u}$

1) Soit $x \in K$. Comme $u(x)$ est le barycentre $((u_i(x), 1))_{1 \leq i \leq r}$ de points de K affectés de coefficients positifsn $u(x) \in K$ par convexité de K, ainsi $\boxed{K \text{ est-il stable par } u.}$
Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, par combinaison linéaire,
on peut appliquer 13, pour en déduire : $\boxed{\text{l'existence de } a \in K \text{ tel que } u(a) = a}$

2) Comme $u(a) = a$, on a $N_G\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = N_G\left(u(a)\right) = N_G(a)$ et d'après le premier point de 12, on a $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$, pour tout $1 \leq i \leq r$; d'où $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a)) = \frac{r}{r}N_G(a)$. On a bien

$$\boxed{N_G\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))}$$

Ainsi par homogénéité : $N_G\left(\sum_{i=1}^{r} u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^{r} N_G(u_i(a))$, car $r \geq 0$.

Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour N_G, on a :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leq N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) \leq \sum_{i=1}^{r} N_G\left(u_i(a)\right) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right),$$

donc on a bien $\boxed{N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right) = N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a)\right)}$

3) Soit $j \in \{1, \ldots, r\}$.

On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E.

En appliquant le deuxième point de 12, à la question précédente,

on obtient l'existence de $\lambda_j \geq 0$ tel que $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r} u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$, donc $ru(x) = \lambda_j u_j(a) + u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r > 0$

Dans un second temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E, alors $a = 0$, car $u_j \in GL(E)$.

et en prenant $\lambda_j = 1$ on a $u(a) = 0$ et $\frac{\lambda_j + 1}{r}u_j(a) = 0$ car u et u_j linéaires

$\boxed{\text{On a l'existence d'un nombre réel } \lambda_j \geq 0 \text{ tel que } u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r}u_j(a)}$ dans tous les cas.

4) On suppose par l'absurde qu'il existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que a ne soit pas un point fixe de l'endomorphisme u_i.

On a : $a = u(a) = \frac{\lambda_i + 1}{r}u_i(a)$ donc $u_i(a) = \mu a$ où $\mu = \frac{r}{\lambda_i + 1} > 0$ car $r > 0$ et $\lambda_i \geq 0$

On a donc $\mu \neq 1$ et $a \neq 0$.

PREMIER CAS : si $\mu > 1$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $u_i^k(a) = \mu^k a$. Comme K est stable par u_i, alors la suite $(u_i^k(a))_k$ est à valeurs dans K (récurrence immédiate). Comme K est bornée car compact, alors cette suite est bornée. Or $\|u_i^k(a)\| = \mu^k \cdot \|a\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.. Voila qui est absurde !

SECOND CAS : si $\mu < 1$, alors on a $u_i^{-1}(a) = \frac{1}{\lambda}a$ où $\frac{1}{\lambda} > 1$ et K est stable par l'automorphisme u_i^{-1}. En faisant comme dans le cas précédent avec u_i^{-1}, on arrive à une absurdité de façon analogue.

Ainsi $\boxed{a \text{ est un point fixe de tous les endomorphismes } u_i \text{ où } i \in \{1, \ldots, r\}}$

5) On note pour $u \in G$, $F_u = \{a \in K, u(a) = a\}$.

Comme pour $u \in G$, $u - \mathrm{id}_E$ est continue (linéaire en dimension finie),

alors $F_u = (u - \mathrm{id}_E)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue).

Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $F_u \subset K$, alors F_u est un fermé de E.

Remarque : on aurait pu aussi remarquer que $F_u = K \cap a \in Eu(a) = a$.

On suppose par l'absurde que : $\bigcap_{u\in G} F_u = \emptyset$.

La question 10, nous fournit $p \in \mathbf{N}^*$ et $u_1, \ldots, u_p \in G$ tels que $\bigcap_{i=1}^{p} F_{u_i} = \emptyset$

Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\bigcap_{u\in G} F_u \neq \emptyset$.

Ce qui nous fournit $a \in \bigcap_{u \in G} F_u$.

Ainsi $\boxed{\text{il existe bien } a \in K \text{ tel que pour tout } u \in G,\ u(a) = a}$