

DM n°4

Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder

Dans tout ce texte d désigne un entier supérieur ou égal à 1.

Ce problème est pour l'essentiel consacré au théorème de Brouwer dont sera déduit à la fin du sujet, le théorème de Schauder.

Théorème de Brouwer — Soient C un convexe compact non vide d'un espace euclidien \mathbf{E} de dimension d et f une application continue de C dans C . Alors f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe un élément x^* de C tel que $f(x^*) = x^*$.

Plan.

La première partie démontre un résultat technique classique et qui sera utilisé à la fin du problème : le théorème de projection sur un convexe. Toutes les questions de cette parties sont à connaître pour les concours. La deuxième s'intéresse au théorème de Brouwer et à une généralisation en dimension 1. La troisième partie démontre le théorème Brouwer dans le cas particulier où C est un triangle de \mathbf{R}^2 , par une méthode combinatoire. La quatrième partie déduit de la troisième le théorème de Brouwer en dimension 2, lorsque C est d'intérieur non vide. En admettant le résultat de la quatrième partie en dimension quelconque on montre enfin la forme générale du théorème dans la partie V. La sixième et ultime partie déduit du théorème de Brouwer le théorème de Schauder qui en est une généralisation en dimension infinie et un théorème crucial de l'analyse fonctionnelle.

Partie I

THÉORÈME DE PROJECTION SUR UN FERMÉ CONVEXE EN DIMENSION FINIE

- (a) Soient $(\mathbf{E}, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, \mathcal{K} un compact non vide de \mathbf{E} et x_0 un point de \mathbf{E} . Montrer qu'il existe un élément y_0 de \mathcal{K} tel que : $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, \mathcal{K})$.
- (b) On suppose maintenant que \mathbf{E} est de *dimension finie* et \mathcal{F} désigne un fermé non vide de \mathbf{E} . Soit x_0 un point de \mathbf{E} . Montrer qu'il existe un élément y_0 de \mathcal{F} tel que :

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, \mathcal{F}). \quad (1)$$

Montrer brièvement sur un exemple qu'il n'existe pas forcément un et un seul élément y_0 vérifiant (1).

- (c) On ne suppose plus que \mathbf{E} est de *dimension finie* mais \mathcal{F} désigne un fermé non vide de \mathbf{E} inclus dans un sous-espace vectoriel \mathbf{H} de \mathbf{E} de dimension finie. Montrer qu'il existe un élément y_0 de \mathcal{F} tel que :

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, \mathcal{F}).$$

- (d) On considère dans cette question \mathbf{E} espace vectoriel de dimension quelconque muni d'un produit scalaire, $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Soit \mathbf{H} un sous-espace vectoriel de \mathbf{E} de dimension finie et \mathcal{C} un fermé non vide de \mathbf{E} convexe et inclus dans \mathbf{H} . Montrer que pour tout élément x de \mathbf{E} , il existe un et un seul élément de \mathcal{C} tel que :

$$\|x - y\| = d(x, \mathcal{C}), \quad (2)$$

élément que dans la suite nous noterons $\pi_{\mathcal{C}}(x)$.

Pour $x \in \mathbf{E}$, $\pi_{\mathcal{C}}(x)$ s'appelle projeté de x sur \mathcal{C} , l'application

$$\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}; x \mapsto \pi_{\mathcal{C}}(x)$$

s'appelle projection sur \mathcal{C} .

Ce résultat se généralise dans le cadre d'espaces de Hilbert.

2. Etude de la projection sur un fermé convexe

Dans cette question on garde les notations de 1. (d)

- (a) Soit $x \in \mathbf{E}$. Montrer que pour tout élément y de \mathcal{C} , $\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x) \rangle \leq 0$.
Indication : on pourra considérer $N : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$; $t \mapsto \|x - (ty + (1-t)\pi_{\mathcal{C}}(x))\|^2$.
- (b) Réciproquement, montrer que si il existe un élément u de \mathcal{C} , tel que pour tout élément y de \mathcal{C} , $\langle x - u | y - u \rangle \leq 0$, alors $u = \pi_{\mathcal{C}}(x)$.
- (c) Montrer que pour tout x et tout y éléments de \mathbf{E} , $\langle x - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y) \rangle \geq \|\pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2$. En déduire que $\pi_{\mathcal{C}}$ est 1-lipschitzienne.

Partie II

THÉORÈME DE BROUWER EN DIMENSION 1

- Dans cette question on prend $d = 1$ et $\mathbf{E} = \mathbf{R}$.
- Montrer le théorème de Brouwer.
- Montrer que le théorème de Brouwer est encore vrai si l'on ne suppose plus f continue, mais croissante.
- Le théorème de Brouwer est-il encore vrai si l'on ne suppose plus f continue, mais décroissante.

Partie III

THÉORÈME DE BROUWER DANS LE CAS D'UN TRIANGLE

FACULTATIVE

On considère les trois points de \mathbf{R}^2 , $A = (-\frac{1}{2}, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, 0)$ et $C = (0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et T le triangle plein de sommets A , B et C , c'est-à-dire l'enveloppe convexe de ces trois points, encore noté $[A, B, C]$. Dans la suite le mot *triangle* désignera un triangle plein

Soit f une application continue de T dans T . Nous allons montrer que f admet un point fixe. Nous commencerons par des résultats de combinatoire qui fourniront le lemme de Sperner qui constitue en quelque sorte une version discrète du théorème de Brouwer.

- Soit \mathcal{G} un graphe non orienté. On note \mathcal{S} l'ensemble de ses sommets et \mathcal{R} celui de ses arêtes. Pour tout élément s de \mathcal{S} on note $\deg(s)$ et on appelle degré de s , le nombre d'arêtes dont s est une extrémité. On rappelle la formule due à Euler :

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} \deg(s) = 2|\mathcal{R}|.$$

Montrer que le nombre de sommets de degré impair est pair (lemme des poignées de mains).

- On note A' le milieu de $[B, C]$, B' celui de $[A, C]$ et C' celui de $[A, B]$. On dispose de 4 triangles équilatéraux de côté $\frac{1}{2}$, $[A, B', C']$, $[A', B, C']$, $[A', B', C]$ et $[A', B', C']$ et on note \mathcal{T}_1 l'ensemble de ces quatre triangles. en divisant alors de même façon chaque triangle de \mathcal{T}_1 en 4 triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{4}$, on obtient un ensemble \mathcal{T}_2 de 16 triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{4}$. Plus généralement on construit en répétant l'opération, pour tout entier $n \geq 1$, un ensemble \mathcal{T}_n de 4^n triangles équilatéraux de coté $\frac{1}{2^n}$ et l'on note \mathcal{T}_n l'ensemble de ces 4^n triangles, que l'on appelle triangulation d'ordre n de T .

- Représenter \mathcal{T}_3 .
- Soit $n_0 \in \mathbf{N}$. On définit une application c_{n_0} de l'ensemble \mathcal{N}_{n_0} des sommets de \mathcal{T}_{n_0} dans $\{1, 2, 3\}$ qui satisfait les propriétés suivantes :
 - $c_{n_0}(A) = 1, c_{n_0}(B) = 2, c_{n_0}(C) = 3$.
 - L'image par c_{n_0} d'un élément S de \mathcal{N}_{n_0} qui appartient à un des côté du triangle T est égal à l'une des deux valeurs que prend f_{n_0} en les extrémités de ce côté, par exemple si $S \in [A, B]$ alors $c_{n_0}(S) = 1$ ou 2 .

On dit d'une telle application que c'est un *bon coloriage de* la triangulation \mathcal{T}_{n_0} .

Par ailleurs on introduit le graphe non orienté \mathcal{G}_{n_0} dont l'ensemble des sommets est la réunion de \mathcal{T}_{n_0} et de $\{Z\}$, où Z est le complémentaire de l'intérieur de T , deux sommets de \mathcal{G} sont reliés par une arête s'ils ont en commun un côté telle que l'image par c_{n_0} d'une de ses extrémité soit 1, l'autre 2.

Attention! le mot *sommet* désigne dorénavant deux choses distinctes : les sommets du graphe \mathcal{G} , et les sommets des éléments de \mathcal{T}_{n_0} .

Montrer que le degré de Z est impair. Montrer que le degré d'un sommet de \mathcal{G} autre que Z est 2 ou 1 ou 0. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les images de ses sommets par c_{n_0} , pour que son degré soit 1.

- Montrer qu'il existe un élément de \mathcal{T}_{n_0} tel que c_{n_0} prenne sur ses sommets les trois valeurs 1, 2 et 3. Ceci constitue un cas particulier en dimension 2 du lemme de Sperner.

3. On note $g = f - \text{id}_T$, application de T dans \mathbf{R}^2 et l'on note g_1 sa première composante et g_2 sa seconde. Enfin on définit l'application

$$c : T \rightarrow \{1, 2, 3\}; (x, y) \mapsto \begin{cases} 3, & \text{si } g_2 < 0, \\ 1, & \text{si } g_2 \geq 0 \text{ et } g_1 \geq 0, \\ 2, & \text{si } g_2 \geq 0 \text{ et } g_1 < 0. \end{cases}$$

- (a) On suppose que f est sans point fixe. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction c_n de c à l'ensemble \mathcal{S}_n des sommets de \mathcal{T}_n est un bon coloriage.
 (b) En appliquant le lemme de Sperner à \mathcal{T}_n pour tout entier $n \geq 1$, déduire que f admet un point fixe.

On a montré la forme particulière du théorème de Brouwer :

Toute application de T dans T continue admet un point fixe.

Partie IV

THÉORÈME DE BROUWER DANS LE CAS D'UN COMPACT CONVEXE D'INTÉRIEUR NON VIDE

On se donne \mathbf{E} un espace vectoriel sur \mathbf{R} de dimension d .

Soit \mathcal{C} un convexe compact de \mathbf{E} . On suppose que $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$.

Pour tout élément x de \mathbf{E} , On pose

$$J(x) = \left\{ \alpha \in \mathbf{R}_+^* \mid \frac{1}{\alpha} \cdot x \in \mathcal{C} \right\}$$

1. Montrer que pour tout élément x de \mathbf{E} , l'ensemble $J(x)$ est non vide et minoré, de sorte qu'est bien définie la quantité

$$j(x) = \inf(J(x)).$$

2. Montrer que tout élément x de \mathbf{E} , **non nul**, l'ensemble $J(x)$ est l'intervalle $[j(x), +\infty[$.
 3. Montrer que pour tout x et tout y vecteurs de \mathbf{E} , tout réel $\lambda \geq 0$, on a $j(\lambda x) = \lambda j(x)$ et $j(x + y) \leq j(x) + j(y)$.
 4. Montrer qu'il existe des réels m et M strictement positifs tels que pour tout $x \in \mathbf{E}$, $m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|$.
 5. Montrer que $\mathcal{C} = \{x \in \mathbf{E} \mid j(x) \leq 1\}$.

6. On pose $h : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}; x \mapsto \begin{cases} \frac{j(x)}{\|x\|} \cdot x, & \text{pour } x \neq 0, \\ 0, & \text{pour } x = 0. \end{cases}$ Montrer que h réalise un homéomorphisme de \mathcal{C} sur la boule unité de \mathbf{E} , $B_{\mathbf{E}}(0, 1)$.

7. Montrer que Les convexes compacts de \mathbf{E} d'intérieurs non vides sont homéomorphes.
 8. Déduire de la question précédente que dans le cas où $d = 2$, toute application f d'un convexe compact de \mathbf{E} d'intérieur non vide dans lui-même, continue, admet un point fixe.

On admet dans la suite que ce résultat se généralise dans le cas où d est un entier naturel non nul quelconque

9. On suppose qu'en plus \mathcal{C} est symétrique par rapport à 0_E , c'est-à-dire que pour tout élément x de \mathcal{C} , on a $-x \in \mathcal{C}$.

Montrer qu'il existe une norme sur \mathbf{E} telle que \mathcal{C} soit la boule unité fermée de \mathbf{E} pour cette norme.

Partie V

THÉORÈME DE BROUWER DANS LE CAS GÉNÉRAL

1. Dans cette sous-question K désigne un convexe compact de \mathbf{R}^d contenant 0 et non réduit à un point. On note \mathbf{E}_K le sous-espace vectoriel engendré par K .

Montrer qu'il existe p éléments x_1, x_2, \dots, x_p de K linéairement indépendants tels que \mathbf{E}_K soit engendré par (x_1, x_2, \dots, x_p) .

Soit l'application $\theta : \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{E}_K; (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p$. Montrer que si l'on pose

$$\Delta = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbf{R}^p \mid \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_p > 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_p < 1\},$$

alors $\theta(\Delta) \subset K$,

2. Déduire de ce qui précède que K est d'intérieur non vide dans l'espace vectoriel \mathbf{E}_K .
 3. Démontrer le théorème de Brouwer.

Partie VII
THÉORÈME DE SCHAUDER
FACULTATIF

Dans cette partie on utilisera la forme général du théorème de Brouwer, pour le généraliser en dimension quelconque sous la forme suivante :

Théorème de Schauder — *Soit \mathbf{E} un espace vectoriel sur \mathbf{R} de dimension quelconque, muni d'un produit scalaire. Soient \mathcal{C} un convexe compact non vide de \mathbf{E} et f une application de \mathcal{C} dans \mathcal{C} , continue. Alors f admet un point fixe.*

Dans la suite \mathbf{E} désigne un espace vectoriel sur \mathbf{R} , $\langle \cdot | \cdot \rangle$ un produit scalaire sur \mathbf{E} , $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, \mathcal{C} un convexe compact non vide de \mathbf{E} et f une application de \mathcal{C} dans \mathcal{C} , continue.

1. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une famille finie (x_1, x_2, \dots, x_k) d'éléments de \mathcal{C} telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^k B_o(x_i, \varepsilon)$. On pourra raisonner par l'absurde.

2. Soit ε un réel strictement positif.

(a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel \mathbf{E}_ε de \mathbf{E} de dimension finie tel que si l'on pose $F_\varepsilon := \mathbf{E}_\varepsilon \cap \mathcal{C}$ on ait, pour tout élément x de \mathcal{C} , :

$$d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

(b) Montrer que F_ε est fermé. On désignera, cf. première partie par π_{F_ε} la projection sur F_ε .

(c) Montrer que $\pi_{F_\varepsilon} \circ f$ admet un point fixe.

3. En déduire le théorème de Schauder.

Le théorème de Schauder s'utilise dans la preuve d'existence de solutions d'équations différentielles.

* *

*

Correction du DM n°4

Théorèmes du point fixe de Brouwer et de Schauder

Partie I

THÉORÈME DE PROJECTION SUR UN FERMÉ CONVEXE EN DIMENSION FINIE

1. (a) L'application $K \rightarrow \mathbf{R}x \mapsto \|x_0 - x\|$ est continue car 1-lipschitzienne, sur le compact K non vide, elle atteint donc sa borne inférieure en un élément y_0 de \mathbf{K} on a :

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, \mathcal{K})$$

- (b) Soit f un élément de F , On note B la boule fermée de rayon $\|f - x_0\|$, centrée en x_0 , et l'on pose $F' := F \cap B$. Intersection de deux fermés, F' est fermé, inclus dans B , il est borné, \mathbf{R}^n étant de dimension finie, F' est un compact, qui de plus est non vide puisque $f \in F'$. Il existe donc d'après la question précédente $y_0 \in F'$ tel que $\|x_0 - y_0\| = \inf\{\|x_0 - y\|, y \in F'\}$.

Soit maintenant y élément de l'ensemble F . Deux cas :

— $y \in F'$. Alors la borne inférieure étant un minorant : $\|y_0 - x_0\| \leq \|y - x_0\|$;

— $y \notin F'$. Alors $y \notin B$ et donc $\|y - x_0\| > \|f - x_0\| \geq \|y_0 - x_0\|$, la dernière inégalité vient de $f \in F'$.

Donc dans tous les cas : $\|y_0 - x_0\| \leq \|y - x_0\|$. Donc

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, \mathcal{F})$$

On ne saurait trop conseiller au lecteur de faire un dessin.

- (c) Gardons les notations et la méthode de la question précédente.

L'ensemble F' est un fermé de l'e.v.n. E , donc à fortiori de l'espace vectoriel de dimension finie \mathbf{H} (comme le montre le critère de fermeture), il est de plus borné, dans \mathbf{E} donc dans \mathbf{H} , donc F' est un compact de \mathbf{H} , puisque H de dimension finie. On achève comme en (b).

On peut comme en TD. utiliser aussi une suite minimisante.

- (d) La question précédente assure qu'il existe au moins un élément y_0 de \mathcal{C} tel que $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, \mathcal{C})$. Supposons qu'il existe un autre élément y_1 de \mathcal{C} tel que $\|x_0 - y_1\| = d(x_0, \mathcal{C})$.

Alors l'inégalité du parallélogramme affirme

$$2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_0\|^2 = \|(x - y_1) + (x - y_0)\|^2 + \|(x - y_1) - (x - y_0)\|^2,$$

donc

$$d(x, \mathcal{C})^2 = \left\| \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_0 \right\|^2 + \frac{1}{4}\|y_0 - y_1\|^2$$

Or $\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_0$ est élément de \mathcal{C} car cet ensemble est convexe, donc donc

$$d(x, \mathcal{C})^2 \geq d(x, \mathcal{C})^2 + \frac{1}{4}\|y_0 - y_1\|^2.$$

Donc $\|y_0 - y_1\| = 0$ et donc $y_0 = y_1$.

Concluons. La distance de x à \mathcal{C} est atteinte en un et un seul point.

2. Etude de la projection sur un fermé convexe

Dans cette question on garde les notation de 1. (d)

- (a) Prenons $y \neq \pi_{\mathcal{C}}(x)$. Pour tout élément t de $[0, 1]$, \mathcal{C} étant convexe, $(ty + (1 - t)\pi_{\mathcal{C}}(x)) \in \mathcal{C}$ et donc $N(t) \geq \|x - \pi_{\mathcal{C}}(x)\|^2$, ce qui s'écrit :

$$t^2\|y - \pi_{\mathcal{C}}(x)\|^2 - 2t\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x) \rangle \geq 0.$$

et même en se limitant aux éléments t de $[0, 1[$

$$t\|y - \pi_{\mathcal{C}}(x)\|^2 - 2\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x) \rangle \geq 0.$$

En laissant tendre vers 0, t dans l'égalité précédente, par valeur strictement positives, on a donc :

$$\boxed{\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | y - \pi_{\mathcal{C}}(x) \rangle \leq 0}$$

Inégalité triviale pour $y = \pi_{\mathcal{C}}(x)$.

(Un petit dessin!)

(b) Soit $y \in \mathcal{C}$,

$$\|x - y\|^2 = \|x - u\|^2 + \|u - y\|^2 + \underbrace{2\langle x - u | u - y \rangle}_{\geq 0} \geq \|x - u\|^2.$$

Donc $\|x - u\| = d(x, \mathcal{C})$, et donc :

$$\boxed{u = \pi_{\mathcal{C}}(x)}$$

(c) En particulier puisque $\pi_{\mathcal{C}}(y) \in \mathcal{C}$, on a $\langle x - \pi_{\mathcal{C}}(x) | \pi_{\mathcal{C}}(y) - \pi_{\mathcal{C}}(x) \rangle \leq 0$, donc puisque $x - \pi_{\mathcal{C}}(x) = (x - y) + (y - \pi_{\mathcal{C}}(x))$:

$$\langle x - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y) \rangle \geq \langle \pi_{\mathcal{C}}(x) - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y) \rangle = \|\pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2 - \langle y - \pi_{\mathcal{C}}(y) | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y) \rangle.$$

Or d'après (a), $\langle y - \pi_{\mathcal{C}}(y) | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y) \rangle \leq 0$, puisque $\pi_{\mathcal{C}}(x) \in \mathcal{C}$. Ainsi

$$\|\pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\|^2 \leq \langle x - y | \pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y) \rangle.$$

Si $\pi_{\mathcal{C}}(x) \neq \pi_{\mathcal{C}}(y)$ alors il découle de l'inégalité de Schwarz que :

$$\boxed{\|\pi_{\mathcal{C}}(x) - \pi_{\mathcal{C}}(y)\| \leq \|x - y\|}$$

Ce qui est encore vrai si $\pi_{\mathcal{C}}(x) = \pi_{\mathcal{C}}(y)$.

Ainsi $\pi_{\mathcal{C}}$ est-elle lipschitzienne de rapport 1.

Partie II

THÉORÈME DE BROUWER EN DIMENSION 1

1. Dans cette question on prend $n = 1$ et $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Un convexe de \mathbf{R} est un intervalle, un convexe compact qui est de plus fermé et borné est donc un segment, donc \mathcal{C} est un segment $[a, b]$.

On exclut dans la suite le cas trivial où $a = b$.

2. Soit g l'application $f - id_{[a,b]}$. Cette application est *continue* de plus $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. Le théorème de la valeur intermédiaire affirme que g s'annule, c'est-à-dire :

f admet un point fixe.

3. PREMIER CAS : le point a est un point fixe de f .

SECOND CAS : Le point a n'est pas point fixe de f et donc $f(a) > a$. Posons $A := \{x \in [a, b] | f(x) > x\}$, cet ensemble est donc non vide, puisque comptant a parmi ses éléments, majoré par b , il admet une borne supérieure s élément de $[a, b]$.

La propriété caractéristique de la borne supérieure assure l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers s . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n < f(x_n)$ et f étant croissante : $x_n < f(x_n) \leq f(s) \leq b$ Par passage à la limite sur n :

$$s \leq f(s) \leq b.$$

• Supposons d'abord $s < b$. Alors pour tout $x \in]s, b]$, $f(x) \leq x$. En laissant tendre x vers s par valeurs strictement supérieures, puisque la croissance de f assure l'existence pour f d'une limite à droite qui est supérieure à $f(s)$, on a :

$$f(s) \leq f(s_+) \leq s.$$

• Supposons maintenant que $s = b$, alors $f(s) = f(b) \leq b = s$, car f à valeur dans $[a, b]$.

Donc dans les deux cas :

$$f(s) \leq s,$$

Si bien qu'au total $s \leq f(s) \leq s$, ce qui assure $f(s) = s$.

Finalement dans tous les cas f admet un point fixe.

4. Non ! l'application f de $[0, 1]$ dans lui-même qui à x associe 1, pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et 0, pour $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ apporte un cruel démenti à la réciproque.

Partie III

THÉORÈME DE BROUWER DANS LE CAS D'UN TRIANGLE

Partie IV

THÉORÈME DE BROUWER DANS LE CAS D'UN COMPACT CONVEXE D'INTÉRIEUR NON VIDE

1. Notons pour $x \in \mathbf{E}$, $J(x) = \{\alpha \in \mathbf{R}_+^* \mid \frac{1}{\alpha} \cdot x \in \mathcal{C}\}$. Comme $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, on dispose d'un réel $r > 0$ tel que la boule fermée de centre 0 de rayon r soit incluse dans \mathcal{C} . Donc $\frac{\|x\|}{r}$ est élément de $J(x)$, cet ensemble est donc non vide, minoré par 0, il admet une borne inférieure, ce qui assure la définition de j .

2. Soit $x \in \mathbf{E}$.

Remarque : trivialement $J(0) = \mathbf{R}_+^*$ et donc $j(0) = 0$. La réciproque est vraie, si $j(x) = 0$ alors $x = 0$, en effet en prenant $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'élément de $J(x)$ de limite 0 (suite minimisante), construite par la propriété de la borne inférieure $\left(\frac{x}{a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée car à valeurs dans \mathcal{C} , donc nécessairement $x = 0_{\mathbf{E}}$.

Supposons x non nul. Soit α un élément de $J(x)$. Soit alors un réel $\beta \geq \alpha$

$$\frac{x}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x}{\alpha} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) 0,$$

donc comme $\frac{\alpha}{\beta} \in [0, 1]$, par convexité de \mathcal{C} , on a $\beta \in J(x)$ ¹. Donc $J(x)$ est un intervalle d'extrémités inférieure $j(x)$ et supérieure $+\infty$. Mais en désignant toujours par $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite minimisante $\left(\frac{x}{a_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est à valeurs dans le FERMÉ \mathcal{C} , sa limite $\frac{x}{j(x)}$ est élément de \mathcal{C} , et donc

$$J(x) = [j(x), +\infty[.$$

3. Soit un réel $\lambda \geq 0$.

Soit $x \in E \setminus \{0\}$ on a $\frac{x}{\alpha} \in \mathcal{C}$ si et seulement si $\frac{\lambda x}{\lambda \alpha} \in \mathcal{C}$, donc $J(\lambda x) = \lambda J(x)$. Alors

$$[j(\lambda x), +\infty[= J(\lambda x) = \lambda J(x) = \lambda [j(x), +\infty[= [\lambda j(x), +\infty[.$$

Donc $\boxed{j(\lambda x) = \lambda j(x)}$, égalité qui se trivialise en $0 = 0$ si $\lambda = 0$, par la remarque.

Soit de plus $y \in \mathbf{E}$ non nul.

$$\frac{x+y}{j(x)+j(y)} = \frac{j(x)\frac{x}{j(x)} + j(y)\frac{y}{j(y)}}{j(x)+j(y)}.$$

comme $\frac{x}{j(x)}$ et $\frac{y}{j(y)}$ sont éléments de \mathcal{C} , par convexité de ce dernier $\frac{x+y}{j(x)+j(y)} \in \mathcal{C}$. Donc :

$$\boxed{j(x+y) \leq j(x) + j(y)}.$$

L'inégalité est trivialement une égalité si l'on remplace x ou y par 0.

4. Soit $x \in \mathbf{E}$ non nul.

• Le point 0 est intérieur à \mathcal{C} , donc nous disposons d'un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre 0 de rayon r soit incluse dans \mathcal{C} . On a $\|\frac{r}{2\|x\|}x\| < r$ donc $\frac{r}{2\|x\|}x \in \mathcal{C}$ donc $j(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$ (encore vrai si $x = 0$) : Posons $M = \frac{2}{r}$.

• Par ailleurs \mathcal{C} étant compact est borné : on dispose de $R > 0$ tel que \mathcal{C} soit inclus dans la boule ouverte de centre 0 de rayon R . On a $\|\frac{R}{\|x\|}x\| = R$ donc $\frac{R}{\|x\|}x \notin \mathcal{C}$ et $\frac{\|x\|}{R} \leq j(x)$. Posons $m = \frac{1}{R}$ on a donc $m\|x\| \leq j(x)$.

Par ces deux points, on a donc la double inégalité :

$$\boxed{m\|x\| \leq j(x) \leq M\|x\|},$$

inégalité qui dégénère si l'on remplace x par 0 en $0 \leq 0 \leq 0$.

5. Par définition de $J(x)$ on a : $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si $1 \in J(x) = [j(x), +\infty[$, soit si et seulement si $j(x) \leq 1$.

1. Avec un dessin on peut affirmer ceci sans l'égalité précédente

6. • D'abord h est bijective.

D'une part 0 est le seul antécédent de 0, puisque d'après la remarque faite en 2. j s'annule en et seulement en 0.

D'autre part soient x et y des éléments de \mathbf{E} non nuls.

Supposons que $h(x) = y$; on a alors $\|y\| = j(x)$ et $j(y) = \frac{j^2(x)}{\|x\|}$, ce par homogénéité de j (Q 3.), et donc au total $j(y) = \frac{\|y\|^2}{\|x\|}$; donc $\|x\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)}$. Par suite, nécessairement, $x = \frac{\|x\|}{j(y)}y = \frac{\|y\|}{j(y)}y$.

Réciproquement supposons $x = \frac{\|y\|}{j(y)}y$. Alors $j(x) = \|y\|$ et $\|x\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)}$ donc $h(x) = \|y\| \frac{j(y)}{\|y\|^2} \frac{\|y\|}{j(y)}y = y$.

Donc h est bijective de bijection réciproque $k : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}; y \mapsto \begin{cases} \frac{\|y\|}{j(y)} \cdot y, & \text{pour } y \neq 0, \\ 0, & \text{pour } y = 0. \end{cases}$

• Ensuite observons que j est continue. En effet Pour $x, y \in E$ on a $j(x) \leq j(x - y) + j(y)$ donc $j(x) - j(y) \leq j(x - y)$. Par symétrie des rôles de x et y , on a :

$$|j(x) - j(y)| \leq j(x - y) \leq M\|x - y\|,$$

c'est à dire que j est M -lipschitzienne, donc continue.

Comme j et la norme sont continues il est clair que h est continue en tout point de l'ouvert $\mathbf{E} - \{0\}$. La continuité en 0 résulte de la majoration

$$0 \leq \|h(x) - 0\| = j(x) \leq M\|x\|.$$

• De même la réciproque k de h est-elle continue en tout point de l'ouvert $\mathbf{E} - \{0\}$, (j ne s'annule qu'en 0) et aussi en 0, car $\|k(y)\| = \frac{\|y\|^2}{j(y)} \leq \frac{1}{m}\|y\|$.

Donc h est un homéomorphisme.

• Enfin pour tout $x \in \mathbf{E}$, on a $\|h(x)\| = j(x)$, donc $\|h(x)\| \leq 1$ si et seulement si $j(x) \leq 1$. Or $\mathcal{C} = \{x | j(x) \leq 1\}$. Donc h réalise un homéomorphisme de \mathcal{C} sur la boule fermée unité de \mathbf{E} , $B_f(0, 1)$.

7. Soit \mathcal{C} un convexe compact d'intérieur non vide. Choisissons un élément a de l'intérieur de \mathcal{C} et posons $\mathcal{C}_a = \mathcal{C} + \{-a\}$ (translaté de \mathcal{C} de vecteur $-a$). Comme $a \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, on dispose d'un réel $r > 0$ tel que la boule ouverte de centre a et de rayon r , $B_o(a, r)$, soit incluse dans \mathcal{C} . Alors $B_o(O, r) = B_o(a, r) + \{-a\} \subset \mathcal{C}_a$ et donc $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{C}_a}$. Donc d'après ce qui précède \mathcal{C}_a est homéomorphe à la boule fermée unité, et donc, la translation de vecteur $-a$ étant trivialement un homéomorphisme (affine) de \mathbf{E} sur \mathbf{E} , \mathcal{C} est homéomorphe à $B_f(O, 1)$.

Donc deux compacts d'intérieurs non vide de \mathbf{E} sont homéomorphes (car homéomorphes à $B_f(O, 1)$).

8. Soit \mathcal{C} un convexe compact d'intérieur non vide. La question précédente nous fournit un homéomorphisme h de \mathcal{C} sur T (cf. partie III.). Soit f une application continue de \mathcal{C} dans \mathcal{C} . Posons $h \circ f \circ h^{-1}$ est une application de T dans lui-même, qui hérite sa continuité de celle de f, h et h^{-1} . D'après III. elle admet un point fixe a . mais alors $f(h^{-1}(a)) = h^{-1}(a)$ c'est-à-dire :
 f admet un point fixe $(h^{-1}(a))$.

Partie V

THÉORÈME DE BROUWER DANS LE CAS GÉNÉRAL

1. Dans cette sous-question K désigne un convexe compact de \mathbf{R}^n contenant 0 et non réduit à un point. On note \mathbf{E}_K le sous-espace vectoriel engendré par K .

\mathbf{E}_K est un sous-espace de \mathbf{R}^n donc est de dimension finie non nulle $p \leq n$. De l'ensemble générateur K on peut donc extraire une base (x_1, x_2, \dots, x_p) .

θ est un isomorphisme d'espace vectoriel puisque (x_1, \dots, x_p) est une base de \mathbf{E}_K . C'est donc aussi un homéomorphisme (toute application linéaire est continue en dimension finie). Pour $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \Delta$ on a $\theta(\lambda) = (1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i)0 + \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$, barycentre de points de K à coefficients positifs, donc élément du convexe K . Ainsi $\theta(\Delta) \subset K$.

2. θ est un isomorphisme d'espace vectoriel, puisque (x_1, \dots, x_p) est une base de \mathbf{E}_K . C'est donc aussi un homéomorphisme (toute application linéaire est continue en dimension finie).

Δ , est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $(\mathbf{R}_+^*)^p \times]0, 1[$ par l'application continue car linéaire sur \mathbf{R}^p ,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_p, \sum_{i=1}^p \lambda_i).$$

Il est non vide car il contient $\frac{1}{p+1}(1, 1, \dots, 1)$. θ est un homéomorphisme donc $\theta(\Delta)$ est un ouvert (image réciproque de Δ par θ^{-1}), non vide de \mathbf{E}_K , inclus dans K donc l'intérieur de K est non vide dans \mathbf{E}_K .

3. On exclut le cas trivialissime où \mathcal{C} est un singleton. Par (e_1, \dots, e_n) on désigne une base de \mathbf{E} . Soit a un point de \mathcal{C} . L'application affine de \mathbf{R}^n dans \mathbf{E} définie par $L(x) = a + \sum_{i=1}^n x_i e_i$. L est bijective et c'est un homéomorphisme (toute application affine en dimension finie est continue). Notons $K = L^{-1}(\mathcal{C})$: K est non réduit à un point (bijectivité de L), il est aussi convexe car L^{-1} est affine, compact car L^{-1} est continue et enfin 0 , d'image a par L , est élément de K . La question 2. dit que K est dans le sous espace \mathbf{E}_K d'intérieur non vide.

$L^{-1} \circ f \circ L$ est une application de K dans lui-même continue donc continue pour la topologie induite par celle de \mathbf{E} sur \mathbf{E}_K . Elle admet donc un point fixe v d'après (e). Alors $L(v)$ est point fixe de f .

On a donc prouvé la forme générale du théorème de Brouwer.

Partie VI

THÉORÈME DE SCHAUDER

1. Soit ε un réel strictement positif. Supposons que pour toute famille finie (x_1, x_2, \dots, x_k) d'éléments de \mathcal{C} , \mathcal{C} ne soit pas inclus dans $\bigcup_{i=1}^k B_o(x_i, \varepsilon)$. Soit alors y_1 un point de \mathcal{C} , \mathcal{C} n'est pas inclus dans $B_o(y_1, \varepsilon)$ donc il existe $y_2 \in \mathcal{C}$ tel que $y_2 \notin B_o(y_1, \varepsilon)$. Comme \mathcal{C} n'est pas d'avantage inclus dans $B_o(y_1, \varepsilon) \cup B_o(y_2, \varepsilon)$ il est loisible de considérer un élément de \mathcal{C} qui n'est pas élément de $B_o(y_1, \varepsilon) \cup B_o(y_2, \varepsilon)$. plus généralement par récurrence on construit une suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'éléments de \mathcal{C} telle que pour tout entier $n \geq 2$, $y_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B_o(y_i, \varepsilon)$ à faire
D'où le résultat.

2. Soit ε un réel strictement positif.

- (a) D'après le 1. il existe une famille finie (x_1, x_2, \dots, x_k) d'éléments de \mathcal{C} , telle que $\mathcal{C} \subset \bigcup_{i=1}^k B_o(x_i, \varepsilon)$.

Soit alors E_ε le sous-espace vectoriel de E engendré par $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, et $F_\varepsilon = E_\varepsilon \cap \mathcal{C}$.

On a $x_1, x_2, \dots, x_k \in F_\varepsilon$; pour tout $x \in \mathcal{C}$ il existe i tel que $\|x - x_i\| < \varepsilon$ donc $d(x, F_\varepsilon) < \varepsilon$.

- (b) L'espace E_ε est de dimension fini donc il est fermé (cf. exercice de colle). Donc F_ε est fermé comme intersection des fermés F et E_ε .

- (c) F_ε est fermé et convexe (intersection de deux convexes). Comme F_ε est fermé inclus dans K compact, F_ε est convexe compact.

$\pi_\varepsilon \circ f|_{F_\varepsilon}$ est une application continue de F_ε dans lui-même. E_ε étant de dimension fini on peut appliquer le théorème de Brouwer : il existe $x_\varepsilon \in F_\varepsilon$ tel que :

$$\pi_\varepsilon \circ f(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$$

Soit une suite de réels strictement positifs $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tendant vers 0 et avec les notation de la précédente sous-question, $u_n = x_{\varepsilon_n}$. Quitte à opérer une extraction on peut supposer, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $u \in K$.

Alors $\|f(u_n) - u_n\| = \|f(u_n) - \pi_{\varepsilon_n} \circ f(u_n)\| \leq \varepsilon_n$ tend vers 0. Comme $(f(u_n))$ tend vers $f(u)$ (continuité de f), on a en laissant tendre n vers $+\infty$, $\|f(u) - u\| \leq 0$ donc $f(u) = u$.

On a ainsi établi que f admet au moins un point fixe dans K .