DS n$^{\text{o}}$4

SUJET 1

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités :

— Moins de 80% des *s* du pluriel ou moins de 70% des accents : -3 points,

— Formules mathématiques non ponctuées : -1 point,

— Recours à des abréviations (tt, qqs, fc., ens...) : -2 points.

L'usage de la calculatrice est interdit.

Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit I un intervalle de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

— le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ constitué des applications de I dans $\mathbb{C}$ de classe C^∞ ;

— la partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n \,\mathrm{d}t$$

et si $f \in \mathcal{E}$, on note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de I dans $\mathbb{C}$ définies par les formules

$$\forall x \in I,\ u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x\sin(t)) \,\mathrm{d}t,$$

$$\forall x \in I,\ v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x\sin(t)) \,\mathrm{d}t.$$

A. Préliminaires

1. Justifiez que l'ensemble $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.
2. **Proposition 1.** *Soit g une application de I dans $\mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note G l'application*

$$G \ :\ I \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{C}, (x, t) \mapsto g(x\sin(t)).$$

Alors $u(g)$ est indéfiniment dérivable de plus, pour tout $x \in I$ et tout entier $n \geq 1$,

$$(u(f))^{(n)}(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,t),$$

on désigne par $\frac{\partial^n G}{\partial x^n}(x,t)$ la valeur en x de la dérivée d'ordre n de $I \to \mathbb{C}\,;\ x \mapsto G(x,t)$.

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, $u(f)$ et $v(f)$ sont bien définies et appartiennent à $\mathcal{E}$, et que l'on définit ainsi des endomorphismes u et v de $\mathcal{E}$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par u.
4. Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ une relation simple entre W_{n+2} et W_n. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

B. Etude de la continuité de u et v

On considère la norme M de $\mathcal{E}$ définie pour tout $f \in \mathcal{E}$ par la formule

$$M(f) = \max_{x\in I} |f(x)|.$$

6. Montrer que l'application $M\ :\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+\,;\ f \mapsto M(f)$ est une norme.

   On admet dans cette partie le résultat (au programme) suivant dont la preuve fera l'objet de la partie E.

   Proposition 2. *L'ensemble $\mathcal{P}$ est une partie dense de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{C}), M)$.*
7. Vérifier que u est une application continue de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même.
8. L'application v est-elle continue de $(\mathcal{E}, M)$ dans lui-même ?
9. Vérifier que l'application $N\ :\ \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ définie par $N(f) = M(f) + M(f')$ est une norme sur $\mathcal{E}$, et montrer que v est continue de $(\mathcal{E}, N)$ dans $(\mathcal{E}, M)$.
10. Les normes N et M sont-elles équivalentes ?
11. Soient $f \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathcal{P}$ tel que $p(0) = f(0)$ et $|f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in I$. En déduire que $\mathcal{P}$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{E}, N)$.

C. Etude de l'inversibilité de u et v

12. Déterminer les restrictions de $u \circ v$ et $v \circ u$ à $\mathcal{P}$.
13. Déterminer $(u \circ v)(f)$, pour tout $f \in \mathcal{E}$. Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme v ?
14. Déterminer également $(v \circ u)(f)$ pour tout $f \in \mathcal{E}$. Conclure.

Applications.

15. Pour tout $f \in \mathcal{E}$, donner une relation liant $v(f)$ et $u(f')$. Calculer $u(\arctan')$ à l'aide du changement de variable $z = \tan(t)$ et en déduire $u(\mathrm{argsh}'')$ [1].
16. Montrer que $f \in \mathcal{E}$ est paire (resp. impaire) si et seulement si $u(f)$ l'est. Qu'en est-il pour v ?

1. La fonction est la bijectiion réciproque de la fonction *sh*.

D. Etude des valeurs propres de u et v

17. Soit λ un élémenr de $\mathbb{C}^*$. Montrer que λ est une valeur propre de v si et seulement si $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u. Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?

On considère une valeur propre λ de u, de vecteur propre associé $f \in \mathcal{E}$.

18. Vérifier que si $n \in \mathbb{N}$, le nombre $m_n = \max_{t\in I} |f^{(n)}(t)|$ est bien défini, et établir que pour tout $x \in I$,
$$|\lambda| \cdot |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}$$
En déduire que $f \in \mathcal{P}$.
19. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u et v.
20. L'espace vectoriel $\mathcal{E}$ admet-il une base de vecteurs propres de u ? De v ? L'ensemble des valeurs propres de u (resp. de v) est-il une partie fermée de $\mathbb{C}$?

E. Théorème de Weierstrass

Nous nous proposons de donner la preuve de la proposition 2.

Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ continue. Pour tout entier $n \geq 1$, nous considèrerons le polynôme :
$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k},$$
n^{e} polynôme de Bernstein associé à f.

1. Soient x un élément de $[0,1]$, n un entier naturel et Y une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathbf{P})$ qui suit la loi binomiale de paramètre (n,x) : $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(Y=k)$ est maximum pour $k = \lfloor (n+1)x \rfloor$

   On considère dans la suite un élément x de $[0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes, toutes de même paramètre x. Notons pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
3. Donner pour tout entier $n \geq 1$, l'espérance de la variable aléatoire $f\left(\frac{S_n}{n}\right)$, au moyen des polynômes de Bernstein associés à f. Donner sa valeur dans le cas particulier où f est l'identité.
4. Donner la variance de $\frac{S_n}{n}$.
5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,
$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq E\left(\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right).$$
6. Pour tout réel $h > 0$, on pose :
$$\omega(h) = \sup\{|f(x) - f(y)|, (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \text{ et } |x_1 - x_2| \leq h\},$$
$$A_h = \left\{\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \leq h\right\}.$$
Le compléméntaire de A_h sera désigné par $\bar{A}_h$.

   Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $h > 0$,
$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\mathbf{P}(\bar{A}_h)\|f\|_\infty + \mathbf{P}(A_h)\omega(h)$$

7. Soit η un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(\bar{A}_\eta\right) \leq \frac{1}{4n\eta^2}.$$

   On peut utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
8. Montrer que f est la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}), M)$.
9. Démontrer la proposition 2.