DS n$^{\text{o}}$5

Fonctions harmoniques

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être soulignés ou encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des s du pluriel et de 70% des accents est requis.

L'usage de la calculatrice est interdit.

On aura besoin des résultats suivants :

Proposition 1. *Soient $[a, b]$ un segment, I un intervalle non réduit à un point et une application*

$$f\ :\ I \times [a, b] \to \mathbf{R}\,;\ (x, t) \mapsto f(x, t).$$

Si f est continue sur $[a, b] \times I$, alors l'application

$$F\ :\ I \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$$

est continue.

Proposition 2. *Si* **de plus** *l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $I \times [a, b]$, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et*

$$F'\ :\ I \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t.$$

Si $f\ :\ \mathcal{U} \to \mathbf{R}\,;\ \mapsto f(x, y)$ est une fonction définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$, on appelle laplacien de f et on note Δf l'application

$$\Delta f\ :\ \mathcal{U} \to \mathbf{R}\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

On appelle fonction *harmonique* sur un ouvert $\mathcal{U}$ toute application définie sur $\mathcal{U}$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^2$, de laplacien nul.

Partie I

Fonctions harmoniques radiales

Soit f une application de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose qu'il existe une application F de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, telle que pour tout élément (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$f(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

On dit que f est *radiale*.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. On suppose dans cette question et la suivante que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
   a. Donner l'expression des dérivées partielles de f d'ordre 1, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en un point (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, en fonction de la dérivée de F au point $\sqrt{x^2+y^2}$.
   b. Donner l'expression des dérivées partielles de f d'ordre 2, en un point (x, y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ en fonction des dérivées première et seconde de F au point $\sqrt{x^2+y^2}$.
3. a. Montrer que Δf est l'application nulle sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ si et seulement si F' est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre homogène de la forme

   $$y'(r) = a(r)y(r),$$

   que l'on déterminera.
   b. Résoudre cette équation (avec la valeur de a trouvée dans la question précèdente).
   c. Donner la forme nécessaire et suffisante de f, pour que f soit harmonique.

Partie II

FONCTIONS HARMONIQUES ANGULAIRES

On considère $\mathcal{P}$ le demi-plan ouvert de $\mathbf{R}^2$ d'équation $y > 0$,

$$\mathcal{P} = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y > 0\right\}.$$

On définit la fonction G de $\mathcal{P}$ dans $\mathbf{R}$ par

$$G \ : \ \mathcal{P} \to \mathbf{R}\,; \ (x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right).$$

1. Montrer que G est une fonction harmonique sur $\mathcal{P}$.
2. Déterminer toutes les applications φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que l'application F, définie par

   $$F \ : \ \mathcal{P} \to \mathbf{R}\,; \ (x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

   soit harmonique sur $\mathcal{P}$.
3. Pour tout réel non nul t, démontrer l'égalité :

   $$\arctan t + \arctan\frac{1}{t} = \operatorname{sgn}(t)\frac{\pi}{2},$$

   où $\begin{cases} \operatorname{sgn}(t) = 1, & \text{si} \quad t > 0, \\ \operatorname{sgn}(t) = -1, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$
4. On définit, sur $\mathbf{C}^*$, la fonction Arg de telle sorte que
   - $\operatorname{Arg}(z)$ soit un argument du complexe non nul z ;
   - $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$.

   .

   Exprimer $G(x, y)$ à l'aide de $\operatorname{Arg}(x + iy)$, pour tout (x, y) de $\mathcal{P}$.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$. Calculer $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} G(x, y)$.

   On discutera selon x et on notera $g(x)$ cette limite.

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y g(t)}{(x - t)^2 + y^2} \mathrm{d}t$ existe pour tout (x, y) de $\mathcal{P}$ et l'exprimer à l'aide de $G(x, y)$.

Partie III

MOYENNES SPACIALE ET CIRCULAIRE D'UNE APPLICATION

Dans toute cette partie on considère une application f, définie sur $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour tout point (a,b) de $\mathbf{R}^2$ et tout réel $r>0$ note $\mathcal{D}_r$ le disque fermé de centre (a,b) et de rayon r, $\mathcal{C}_r$ le cercle de centre (a,b) et de rayon r et l'on pose :

$$m(a,b,r) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) r\mathrm{d}\theta, \text{ moyenne de } f \text{ sur } \mathcal{C}_r,$$

$$M(a,b,R) = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^{R}\left(\int_0^{2\pi} f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right) r\mathrm{d}r, \text{ moyenne de } f \text{ sur } \mathcal{D}_r.$$

On fixe dans cette partie un point (a,b) de $\mathbf{R}^2$. On notera de manière à simplifier $M(R)$ au lieu de $M(a,b,R)$ et $m(r)$ au lieu de $m(a,b,r)$.

1. Soit $\tilde{f}$, l'application

$$\tilde{f} \; : \; [0,+\infty[\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}\, (r,\theta) \mapsto f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta).$$

   Montrer brièvement que $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
   Exprimer, pour tout élément (r,θ) de $[0,+\infty[\times\mathbf{R}$,

$$\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta),\ \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\theta}(r,\theta)$$

   puis

$$\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta),\ \frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\theta^2}(r,\theta),$$

   en fonction de dérivées partielles de f au point $(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$.

2. Déduire de la question précédente que pour tout couple (r,θ) de $\mathbf{R}_+^*\times\mathbf{R}$,

$$\Delta f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) = \frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{f}}{\partial\theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta).$$

3. Montrer que l'application $m \; : \; \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\; R \mapsto m(R)$ est dérivable. Préciser sa dérivée.

   On pourra utiliser les résultats du préambule en en vérifiant soigneusement les hypothèses.

4. On suppose dans cette question f harmonique.

   (a) Montrer que l'application $g \; : \; \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\,;\; R \mapsto Rm'(R)$ est dérivable. Montrer que sa dérivée est nulle.

   (b) Déduire de ce qui précède, que pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$,

$$m(R) = f(a,b).$$

   (c) Montrer que pour tout élément R de $\mathbf{R}_+^*$, $M(R) = f(a,b)$.

5. On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $R \in \mathbf{R}_+^*$,
$$m(x, y, R) = f(x, y).$$
Montrer que f est harmonique.

Partie IV

Fonctions harmoniques bornées, principe du maximum

On munit $\mathbf{R}^2$ de sa structure euclidienne canonique, $\| \cdot \|_2$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^2$.

1. Soit f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, harmonique. On suppose f bornée (sur $\mathbf{R}^2$).
   Soit (x_0, y_0) un élément de $\mathbf{R}^2$. Soit r un réel strictement positif $\mathcal{D}_r$ le disque fermé de centre $(0, 0)$ de rayon r, $\mathcal{D'}_r$ celui de centre (x_0, y_0) de rayon r.
   Montrer qu'il existe un réel $d > 0$, tel que, pour r assez grand, l'aire de $\mathcal{D}_r - (\mathcal{D'}_r \cap \mathcal{D}_r)$ soit majorée par $\pi r d$.
   Montrer que f est constante.
2. On note $\mathcal{D}$ le disque fermé unité de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \|(x, y)\|_2 \leq 1\}$, $\mathcal{D}_\text{o}$ le disque ouvert unité de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{D}_\text{o} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \|(x, y)\|_2 < 1\}$ et $\mathcal{C}$ le cercle unité de $\mathbf{R}^2$, $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, \|(x, y)\|_2 = 1\}$. Soit h une application continue de $\mathcal{C}$ dans $\mathbf{R}$.
   On veut montrer qu'il existe au plus une application g_h de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$, continue et dont la restriction à $\mathcal{D}_\text{o}$ soit harmonique. et qui coïncide avec h sur $\mathcal{C}$.

   Soit f une fonction continue sur $\mathcal{D}$ à valeurs réelles et dont la restriction à $\mathcal{D}_\text{o}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

   (a) Montrer que si f admet en un point m de $\mathcal{D}_\text{o}$ un maximum local, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(m) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(m) = 0$ puis que $\Delta f(m) \leq 0$.
   On pourra étudier les deux applications partielles de f au point m,
   $$x \mapsto f(m + (x, 0)) \textit{ et } y \mapsto f(m + (0, y)).$$

   (b) On suppose f harmonique. Montrer que :
   $$\sup_{x \in \mathcal{D}} f(x) = \sup_{x \in \mathcal{C}} f(x).$$
   On pourra considérer $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ suffisamment petit.

   (c) Montrer qu'il existe au plus une application g_h de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$, continue et dont la restriction à $\mathcal{D}_\text{o}$ soit harmonique.

   (d) Peut-on retrouver le résultat de la sous-question (b) grâce à la question III.4.(c) ?

Correction DS n°5

Partie I
FONCTIONS HARMONIQUES RADIALES

1. — **Supposons que F soit de classe $\mathcal{C}^2$.**
L'application

$$p\ :\ \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

est de classe $\mathcal{C}^2$. En effet on peut montrer qu'elle admet des dérivées partielles jusque à l'ordre 2 continues, ou plus simplement dire qu'elle est polynomiale. Par ailleurs elle est <u>à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.</u> Le cours de sup. nous apprend que l'application

$$\rho\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\ ;\ t \mapsto \sqrt{t}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$. Par composition de p par ρ l'application

$$R\ :\ \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^2$. Toujours par composition, puisque $f = F \circ R$, on en déduit que <u>f est de classe $\mathcal{C}^2$.</u>

— **Supposons que f soit de classe** $\mathcal{C}^2$. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $F(t) = f(t,0)$. Comme l'application

$$\phi\ :\ \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}^2\ ;\ t \mapsto (t,0)$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ — elle est à composantes polynomiales (ou linéaire) — et à valeurs dans $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, par composition on déduit que :

<u>$F = f \circ \phi$ est de classe $\mathcal{C}^2$.</u>

<u>Au total, f est de classe $\mathcal{C}^2$ si et seulement si F est de classe $\mathcal{C}^2$.</u>

2. a. Pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),}$$

$$\underline{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).}$$

b. Pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} F''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right) F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

soit

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} F''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).}$$

De même,

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} F''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).}$$

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{yx}{x^2+y^2} F''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{yx}{(x^2+y^2)^{3/2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).}$$

Remarque : f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a $\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)}$, ce que redonne plus simplement ici la symétrie des rôles tenus par x et y.

3. a. Pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$\Delta f(x,y) = F''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} F'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Or l'application

$$\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$$

induit une **surjection de $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ sur $\mathbf{R}_+^*$**, donc Δf est nul si et seulement si pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$,

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) = 0,$$

autrement dit Δf est nul si et seulement si F' est solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle du premier ordre linéaire homogène

$$\underline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{r} y.} \tag{1}$$

b. L'équation (1) est du premier ordre, linéaire homogène, a est continue, le cours de sup. nous dit que l'ensemble de ses solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ est la droite vectorielle engendrée par

$$\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\ ;\ r \mapsto \exp\left(\int_1^r a(s)\mathrm{d}s.\right).$$

Donc puisque pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, $\displaystyle\int_1^r a(s)\mathrm{d}s = \ln\left(\frac{1}{r}\right)$, l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}_+^*$ de (1) est l'ensemble des applications de la forme

$$\underline{\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}\ ;\ r \mapsto \frac{A}{r}},$$

où A est un réel quelconque.

c. On a vu que Δf est l'application nulle sur $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$ si et seulement si il existe un réel A tel que pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, $F'(r) = \dfrac{A}{r}$, donc Δf est nul si et seulement si il existe des réels A et B tels que pour tout $r \in \mathbf{R}_+^*$, $F(r) = A\ln r + B$. Donc Δf est nul si et seulement si il existe des réels A et B tels que :*

$$\underline{f\ :\ \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbf{R}\ ;\ (x,y) \mapsto A\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + B.}$$

Partie II

Fonctions harmoniques angulaires

1. Soit $(x,y) \in \mathcal{P}$.

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = y\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2},\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = \frac{x.2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Finalement $\Delta G = 0$ sur $\mathcal{P}$. Donc $\underline{G \text{ est harmonique sur } \mathcal{P}}$.

2. Soit φ une application $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. L'application $q\ :\ \mathcal{P} \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto \frac{x}{y}$ est $\mathcal{C}^\infty$ (car rationnelle). Par composition F est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $(x,y) \in \mathcal{P}$.

$$F(x,y) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right),\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x}{y^2}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right).$$

Donc :

$$\Delta F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y^4}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2xy}{y^4}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Donc $\Delta F = 0$ si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathcal{P}$

$$(x^2+y^2)\varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + 2xy\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)\varphi''\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{2x}{y}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Première méthode. L'application q est surjective de $\mathcal{P}$ sur $\mathbf{R}$, donc F est harmonique sur $\mathcal{P}$ si et seulement si φ' est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients continus :

$$(1+u^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} + 2uy = 0. \tag{2}$$

Donc F est harmonique si et seulement si il exite $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que

$$\varphi' \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ u \mapsto \frac{\lambda}{1+u^2}.$$

Donc F est harmonique si et seulement si il exite des réels λ et μ tels que

$$\underline{\varphi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ u \mapsto \lambda \arctan(u) + \mu.}$$

Notons que F est harmonique si et seulement si il exite des réels λ et μ tels que $F = \lambda G + \mu$.

Méthode plus rusée et plus consise : L'application q est surjective de $\mathcal{P}$ sur $\mathbf{R}$, donc en identifiant X^2 et l'application polynomiale associée, F est harmonique si et seulement si $\big((1+X^2)\varphi'\big)' = 0$, soit, $\mathbf{R}$ étant un intervalle si et seulement si il exite des réels λ et μ tels que :

$$\underline{\varphi \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ u \mapsto \lambda \arctan(u) + \mu.}$$

3. Soit $T \ : \ \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$. $T_{|\mathbf{R}_+^*}$ est $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$T'(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{t^2}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2} = 0,$$

donc T est constante sur *l'intervalle* $\mathbf{R}_+^*$, de valeur $\arctan 1 + \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2}$. Par imparité de T on a, pour tout $t \in \mathbf{R}^*$,

$$\underline{\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \mathrm{sgn}(t)\frac{\pi}{2}.}$$

Remarque : Les champions de la trigo, peuvent montrer directement cette formule.

4. • Procédons d'abord maladroitement comme le veut l'énoncé. Soit $(x, y) \in \mathcal{P}$. Posons $\theta = \operatorname{Arg}(x + iy)$.

   Notons puisque $y > 0$, que $\theta \in]0, \pi[$. D'autre part $\tan\theta = \frac{y}{x}$. Donc $\theta \equiv \arctan(\frac{y}{x})[\pi]$.

   – PREMIER CAS : $x > 0$

     $\arctan(\frac{y}{x}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$. Donc d'après le 3.,

   $$G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(x + iy).$$

   – SECOND CAS : $x < 0$

     $\arctan(\frac{y}{x}) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ donc $-\pi + \theta = \arctan(\frac{y}{x})$. Donc d'après le 3.,

   $$G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(x + iy).$$

   Finalement,

   $$\underline{G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(x + iy),}$$

   formule vraie dans tous les cas, y compris — c'est évident — dans le cas $x = 0$.

   • De manière plus simple :

   $$\theta - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}((-i)(x+iy)) = \operatorname{Arg}(y - ix) = \arctan\left(\frac{-x}{y}\right) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right),$$

   En effet comme $y > 0$, on a $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}(y - ix) < \frac{\pi}{2}$. Donc Finalement,

   $$\underline{G(x, y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg}(x + iy).}$$

5. $\lim\limits_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} G(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 0, & \text{si} \quad x > 0, \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, & \text{si} \quad x = 0, \\ \frac{\pi}{2} - \pi, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$ Donc $\underline{g(x) = \operatorname{sgn}(x).\frac{\pi}{2}}$. En convenant que $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

6. Soit $(x, y) \in \mathcal{P}$.

   L'application $\psi \;:\; \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\; t \mapsto \dfrac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2}$ est continue par morceaux, d'après ce qui précède et parce que $(x-t)^2 + y^2 \geq y^2 > 0$, pour tout $t \in \mathbf{R}$.

   Pour t voisin de $+\infty$, $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$, est positive intégrable au voisinage de $+\infty$, donc ψ est intégrable au voisinage de $+\infty$, et par un même raisonnement, aussi au voisinage de $-\infty$.

   D'où l'existence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2 + y^2} \mathrm{d}t$.

Or, si $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,

$$\int_a^b \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t = \int_{x-a}^{x-b} -\frac{y}{u^2+y^2}\mathrm{d}u = -\left[\arctan\frac{u}{y}\right]_{x-a}^{x-b}.$$

donc en passant à la limite sur a et b,

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t = -G(x,y) + \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{y}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t = G(x,y) + \frac{\pi}{2}.$$

Finalement : $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yg(t)}{(x-t)^2+y^2}\mathrm{d}t = \pi.G(x,y).}$

Remarque : Il n'est pas nécessaire de prouver l'intégrabilité de ψ. L'existence de l'intégrale est assurée par par passage à la limite sur ses bornes. On peut aussi ne pas recourir à des bornes de sécurités a et b et invoquer le changement de variable bijectif de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'intégrale généralisée.

Partie IV

Moyennes spaciale et circulaire d'une application

(a,b) désigne un point quelconque de $\mathbf{R}^2$.

1. L'application $p \ : \ [0,+\infty[\times[0,2\pi]\,;\ (r,\theta) \mapsto (a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)$ est, grâce aux théorèmes de transfert, de classe $\mathcal{C}^2$, en effet, les applications

$$[0,+\infty[\times[0,2\pi]\,;\ (r,\theta) \mapsto r(\text{ car restriction d'une application linéaire }),$$

$$[0,+\infty[\times[0,2\pi]\,;\ (r,\theta) \mapsto \theta(\text{ car restriction d'une application linéaire }),$$

et les applications cosinus et sinus le sont. L'application f l'est également, par composition $\underline{\tilde{f} \text{ est donc de classe } \mathcal{C}^2.}$
Soit $(r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi]$,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta),$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta),$$

Puis en utilisant le théorème de Schwarz pour les applications $\mathcal{C}^2$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(p(r,\theta)\right) + 2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(p(r,\theta)\right) + \sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(p(r,\theta)\right),$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta) = r^2\sin^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(p(r,\theta)\right) - 2r^2\sin\theta\cos\theta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\left(p(r,\theta)\right) + r^2\cos^2\theta \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(p(r,\theta)\right)$$

$$r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}\left(p(r,\theta)\right) r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\left(p(r,\theta)\right).$$

2. Donc, d'après la question précédente,

$$\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta f(p(r,\theta)) - r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}\left(p(r,\theta)\right) r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}\left(p(r,\theta)\right).$$

D'où

$$\underline{\Delta f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta).}$$

3. On a $m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\cdot,\theta)\mathrm{d}\theta$; ainsi formulée, la définition de m s'étant à $\mathbf{R}_+$ et nous considérerons m définie sur $\mathbf{R}_+$.
Or $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (cf. 1) donc en particulier la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathbf{R}_+ \times [0,2\pi]$ est continue et $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ est définie sur $\mathbf{R}_+ \times [0,2\pi]$ et y est continue, donc par la proposition 2, l'application m (prolongée comme indiqué ci dessus) est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\underline{m' \ : \ \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}\,;\ R \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(R,\theta)\mathrm{d}\theta.}$$

4.(a) Mais — on l'a dit — $\tilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ donc la restriction de $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ à $\mathbf{R}_+^* \times [0,2\pi]$ et celle de $\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}$ sont continues donc par la proposition 2, pour tout réel $R > 0$,

$$m''(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(R,\theta)\mathrm{d}\theta,$$

et donc, en usant de 2.,

$$\begin{aligned} g'(R) =& Rm''(R) + m'(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}(R,\theta) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(R,\theta)\mathrm{d}\theta \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R\left(\Delta(f)(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(R,\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\ =& -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(R,\theta)\mathrm{d}\theta \\ =& -\frac{1}{2\pi R}\left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(R,\theta)\right]_0^{2\pi} \underline{= 0.} \end{aligned}$$

(3)

En effet pour tout réel $R > 0$, $\tilde{f}(R, \cdot)$ et donc $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(R, \cdot)$ sont 2π-périodiques.

(b) Par la question 4., $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+^*} m'$ est constante sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$. Mais la question 3. assure que m' est continue en 0 et donc $Rm'(R) \underset{R \to 0^+}{\longrightarrow} 0m'(0) = 0$.

Donc $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_+^*} m'$ est constamment nulle et donc l'application m' est nulle sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc sur $\mathbf{R}_+$, car continue.

L'application m (prolongée comme déjà mentionné) est donc constante sur l'intervalle $\mathbf{R}_+$. Donc

$$\underline{\forall R \in \mathbf{R}_+^*, m(R) = m(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a, b) \mathrm{d}\theta = f(a, b).}$$

(c) Soit $R \in \mathbf{R}_+^*$. En considérant toujours que m est définie et continue sur $\mathbf{R}_+$, grâce à (b),

$$\underline{M(a, b, R) = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi m(r) r \mathrm{d}r = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi f(a, b) r \mathrm{d}r = f(a, b).}$$

5. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. L'application $m(a, b, \cdot)$, toujours notée m, est donc constante et donc g puis g' (notations de l'énoncé) sont nulles sur $\mathbf{R}_+^*$.

Le calcul fait en 4.(a) donne pour tout $R \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} 0 = g'(R) =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R \left(\Delta(f)(R\cos\theta, R\sin\theta) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}(R, \theta) \right) \mathrm{d}\theta \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R\Delta(f)(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) \mathrm{d}\theta - \frac{1}{2\pi R} \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}(R, \theta) \right]_0^{2\pi} \\ =& \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta(f)(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) \mathrm{d}\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Mais alors la continuité de $\Delta(f)$ (l'application f est $\mathcal{C}^2$) et celle déja rencontrée de $((R, \theta) \mapsto (a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)$ conduisent à la continuité de :

$$\mathbf{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbf{R}\,;\ (r, \theta) \mapsto \Delta(f)(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta).$$

Donc, par la proposition 1,

$$0 = \int_0^{2\pi} \Delta(f)(a+R\cos\theta, b+R\sin\theta) \mathrm{d}\theta \underset{R \to 0^+}{\longrightarrow} \int_0^{2\pi} \Delta(f)(a, b) \mathrm{d}\theta = 2\pi \Delta(f)(a, b).$$

<u>Donc f est harmonique.</u>

Partie IV

FONCTIONS HARMONIQUES BORNÉES, PRINCIPE DU MAXIMUM

1. Supposons r suffisamment grand pour que (x_0, y_0) soit intérieur à $\mathcal{D}_r$. Notons c le point milieu des centres (x_0, y_0) et $(0,0)$ des deux disques et δ la distance entre ces centres. (on a donc $r > \delta$).
   Le disque D'' de centre c est de rayon $r - \frac{\delta}{2}$ est inclus dans l'intersection de $\mathcal{D}_r$ et $\mathcal{D}'_r$. Donc $\mathcal{D}_r - (\mathcal{D}'_r \cap \mathcal{D}_r)$ est inclus dans $\mathcal{D}_r - \mathcal{D}''_r$.

   PLACE POUR UNE FIGURE

   Passons aux aires :

   $$|\mathcal{D}_r - (\mathcal{D}'_r \cap \mathcal{D}_r)| \leq |\mathcal{D}_r - \mathcal{D}''_r| = \pi\left(r^2 - \left(r - \frac{\delta}{2}\right)^2\right) = \pi\left(\delta r + \frac{\delta^2}{4}\right) \leq \boxed{\pi\frac{5\delta}{4}r},$$

   puisque $\delta < r$.
   Pour tout réel $R > \delta$, on admet que

   $$|M(0,0,R) - M(x_0, y_0, R)| \leq \frac{1}{\pi R^2} \sup_{(x,y)\in|\mathcal{D}_r - (\mathcal{D}'_r \cap \mathcal{D}_r)|} |f(x,y|\ |\mathcal{D}_r - (\mathcal{D}'_r \cap \mathcal{D}_r)|.$$

   Alors, puisque f est bornée, pour tout réel $R > \delta$,

   $$|M(0,0,R) - M(x_0, y_0, R)| \leq \frac{\pi\frac{5\delta}{4}R}{\pi R^2}\|f\|_\infty.$$

   Donc en laissant tendre R vers $+\infty$ et d'après III 4., $|f(0,0) - f(x_0, y_0)| = 0$.
   Donc f est constante.

2.(a) On suppose que f admet en un point m de $\mathcal{D}_\text{o}$ un maximum local.
   Soient $f_1 : x \mapsto f(m + (x,0))$ et $f_2 : x \mapsto f(m + (0,y))$. Comme m est intérieur à D ces deux applications sont définies au voisinage de 0. De plus comme f est $\mathcal{C}^2$ elles sont elles-mêmes $\mathcal{C}^2$ et en particulier

   $$f_1'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(m)\,;\ f_2'(0) = \frac{\partial f}{\partial y}(m)\,;\ f_1''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m)\,; f_2''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m).$$

Les applications f_1 et f_2 présentent un maximum local en 0, donc puisqu'elles sont définies au voisinage de 0, leur dérivées en 0, sont donc nulles autrement dit :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(m) = \frac{\partial f}{\partial y}(m) = 0}$$

Supposons que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m)$ soit strictement positive. Par continuité de f_1'' en 0 l'application f_1'' est strictement positive au voisinage de 0 ; comme $f_1(0) = 0$ l'application f_1' présente en 0 un minimum strict, contredisant l'hypothèse :

x		0	
$f_1''(x)$	$+$	$+$	$+$
f_1'	$\nearrow$	0	$\nearrow +$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
f_1	$\searrow$	$f(m)$	$\nearrow$

Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(m) < 0$ et de même $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(m) < 0$. Donc :

$$\boxed{\Delta(f)(m) \geq 0}.$$

(b) D'abord $\sup\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$ est par compacité de $\mathcal{D}$ et continuité de f atteinte en un certain point c de $\mathcal{D}$. Pour les même raisons $\sup\limits_{x \in \mathcal{C}} f(x)$ est définie et par inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, inférieure ou égal à $\sup\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Supposons

$$\sup_{x \in \mathcal{C}} f(x) < \sup_{x \in \mathcal{D}} f(x).$$

On a donc $c \in \mathcal{D}_0$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x) - \sup\limits_{x \in \mathcal{C}} f(x))$

Soit $f_\varepsilon \ : \ D \to \mathbf{R}\,; \ x \mapsto f(x) + \varepsilon \|x\|^2$, pour $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$

On a $\sup\limits_{x \in \mathcal{C}} f_\varepsilon(x) = \sup\limits_{x \in \mathcal{C}} f(x) + \varepsilon \leq f(c) \leq f_\varepsilon(c)$.

Donc f_ε atteint sa borne supérieure en un point d intérieur à $\mathcal{D}$. Or f_ε est continue sur $\mathcal{D}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{D}_{\mathrm{o}}$ Donc par (a) :

$$0 \geq \Delta(f_\varepsilon)(d) = \Delta(f)(d) + 2n = 0 + 2n > 0.$$

Voila qui est absurde ! Donc

$$\boxed{\sup_{x \in \mathcal{C}} f(x) = \sup_{x \in \mathcal{D}} f(x).}$$

(c) Soient des applications g_h et γ_h de $\mathcal{D}$ dans $\mathbf{R}$, continues, telles que les restrictions à $\mathcal{D}_{\text{o}}$ soient harmoniques et qui coïncident avec h sur $\mathcal{C}$.

Posons $f = g_h - \gamma_h$. Cette application est continue sur $\mathcal{D}$ de restriction à $\mathcal{D}_{\text{o}}$ harmonique et est nulle sur $\mathcal{C}$. D'après (b), f atteint sa borne supérieure sur $\mathcal{C}$ et est donc négative. Symétriquement $\gamma_h - g_h$ est négative et donc : $\boxed{g_h = \gamma_h}$.

Remarque. l'existence d'une telle application est vraie ce problème porte le nom de problème de Dirichlet.

(d) Reprenons la question (b) et supposons comme précédement que $c \in \mathcal{D}_0$. Posons A l'ensemble des éléments p de $\mathcal{D}_{\text{o}}$ tels que $f(p) = f(c)$.

• L'ensemble A est un fermé relatif de $\mathcal{D}_{\text{o}}$ comme image réciproque du fermé $\{f(c)\}$ par l'application continue f.

• L'ensemble A est un ouvert (relatif) de $\mathcal{D}_{\text{o}}$. En effet soit $(a,b) \in A$. Prenons $\mathcal{D}_p$ un disque fermé de centre (a,b) et inclus dans $\mathcal{D}_0$ dont l'existence provient du caractère ouvert de $\mathcal{D}_0$. par III. 4. (c),

$$\begin{aligned} 0 &= f(a,b) - M(a,b,R) \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} f(a,b) - f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \mathrm{d}\theta \right) r \mathrm{d}r, \end{aligned}$$

Par positivité de $f(a,b) - f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$, pour tour $r \in [0,R]$ et tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$[0,R] \to \mathbf{R}\,;\ r \mapsto r \int_0^{2\pi} f(a,b) - f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \mathrm{d}\theta$$

et positive, de plus cette application est continue par la proposition 1, donc nécessairement nulle, puisque d'intégralle nulle. La continuité et la positivité, pour tout $r \in]0,R]$ de $f(a,b) - f(a + r\cos(\cdot), b + r\sin(\cdot))$ assure la nullité de cette application (trivialement nulle pour $r = 0$). Donc f est constante sur $\mathcal{D}_p$, donc $\mathcal{D}_p \subset A$.

Comme $\mathcal{D}_0$ est convexe, donc connexe par arcs, par ces deux points, A (qui est non vide) est $\mathcal{D}_0$ entier (cf. exercice de colles).

Donc f est constante sur $\mathcal{D}_0$ et par continuité sur $\mathcal{D}$.

Donc la borne supérieure de f est atteinte notamment sur la frontière.