DIAMÈTRE TRANSFINI D'UNE PARTIE DU PLAN

Soit Π un espace affine euclidien orienté de dimension 2. Il sera appelé brièvement *plan* Π. La distance de deux points A et B de Π est notée $d(A, B)$.

Une partie de Π désignée par la lettre E, avec ou sans indice, est un sous-ensemble de Π contenant une infinité de points. Les différentes figures géométriques considérées — segment, cercle — sont supposées posséder elles aussi cette propriété.

Soit un entier $n \geq 2$, et une partie E du plan Π ; pour toute suite finie de points de la partie E : $P_1, P_2, ..., P_n$, on note $g_n(P_1, P_2, ..., P_n)$ la moyenne géométrique des distances mutuelles de ces points, c'est-à-dire :

$$g_n(P_1, P_2, \dots, P_n) = \left(\prod_{i=1,\dots,n, j=1,\dots,n, i\neq j} d(P_i, P_j) \right)^{\frac{1}{n(n-1)}} = \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} d(P_i, P_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

Considérons maintenant l'ensemble des réels $g_n(P_1, P_2, ..., P_n)$ définis pour toute suite de points $P_1, P_2, ..., P_n$; si cet ensemble est borné, la borne supérieure de ces réels sera designée par $\delta_n(E)$:

$$\delta_n(E) = \sup\{g_n(P_1, P_2, ..., P_n) | P_i \in E, 1 \leq i \leq n\} ;$$

si au contraire cet ensemble de réels n'est pas borné, on convient que $\delta_n(E)$ est égal à $+\infty$.

Préliminaires

Nous allons démontrer un résultat utile dans la suite. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réel. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, par :

$$v_n = \frac{1u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2},$$

pour tout entier $n \geq 1$.

On suppose que la suite la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers ℓ. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers $\frac{\ell}{2}$.

Partie I
Quelques propriétés générales et exemples

1. (a) Montrer que si $\mathbf{E}$ est une partie bornée du plan $\delta_2(E) = \sup\{d(A, B) | A \in E, B \in E\}$.

   Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\delta_n(E)$ est fini et majoré par $\delta_2(E)$.

   (b) Soient deux parties E_1 et E_2 du plan telles que E_1 soit contenue dans E_2. Etablir pour tout entier $n \geq 2$, l'inégalité :

$$\delta_n(E_1) \leq \delta_n(E_2).$$

(c) Démontrer que si un sous-ensemble E de Π n'est pas borné, il existe pour tout réel $\rho > 0$ et tout entier $k \geq 2$, une suite finie de points $(P_1, P_2, ...P_k)$ de Π telle que pour tout couple (i, j) d'élément de $\{1 \dots k\}$ distincts, la distance de P_i à P_j soit supérieure ou égale à ρ : $d(P_i, P_j) \geq \rho$. En déduire que si E est non borné, alors; pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\delta_n(E)$ est infini.

(d) On dit qu'une suite $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de Π converge vers un point Q de Π si par définition :

$$d(Q_n, Q) \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Soit une partie E du plan Π. On note $\bar{E}$ l'ensemble des points qui sont limites d'une suite de point de E. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2

$$\delta_n(E) = \delta_n(\bar{E}).$$

2. Soient A et B des points de Π distincts. On désigne par I le segment $[A, B]$ et par a la longueur de I.
Soient P_1 et P_3 des points de I. Montrer qu'il existe un point P_2 de $[P_1, P_3]$ tel que $g_3(P_1, P_2, P_3) = \max\{g_3(P_1, P, P_3)\}, P \in [P_1, P_3]\}$.
En déduire $\delta_3(I)$.

3. Soient O un point de Π et C_R un cercle de centre O et de rayon R. Soit un repère orthonormé et direct $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ et trois points du cercle C_R, définis par leurs angles polaires, égaux respectivement à 0, θ et ϕ. :

$$0 = (\vec{i}, \overrightarrow{0P_1})\ \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{0P_2})\ \varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{0P_3})\ , 0 < \theta < \phi < 2\pi.$$

(a) Montrer que φ étant fixé, $g_3(P_1, P_2, P_3)$ est maximum pour $\theta = \frac{\varphi}{2}$.

(b) Pour quelles valeurs de φ et de θ, $g_3(P_1, P_2, P_3)$ est-il maximum .

(c) Déduire des sous-questions précédente $\delta_3(C_R)$.

Partie II

Étude de la suite $(\delta_n(E))_{n\geq 2}$

1. Soient E une partie bornée de Π et un entier $n \geq 2$.

(a) Soit une suite de $n+1$ points de E, $(P_1, P_2, ..., P_{n+1})$. Démontrer la relation :

$$(g_{n+1}(P_1, P_2, \dots, P_{n+1}))^{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1} g_n(P_1, \dots \cancel{P_i} \dots, P_{n+1}),$$

où pour $i = 1, \dots, n+1$, $g_n(P_1, \dots \cancel{P_i} \dots, P_{n+1})$ désigne $g_n(P_1, P_2, \dots P_{i-1}, P_{i+1}, \dots, P_{n+1})$.

(b) En déduire que $\delta_{n+1}(E) \leq \delta_n(E)$, puis montrer que la suite $(\delta_k(E))_{k\geq 2}$ converge. On notera $\Delta(E)$ sa limite.

2. Soit un entier $n \geq 2$.

(a) Soient z_i, $i = 0, 1, ..., n-1$ les n racines n^{e} de l'unité. Démontrer que pour tout : élément k de $\{0, 1, \dots, n-1\}$

$$\prod_{j=0,\dots,n-1,\ j\neq k} (z_k - z_j) = n(z_k)^{n-1}.$$

(b) Calculer, lorsque les points $P_1, P_2, \dots\ , ..., P_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle C_R de rayon R, la valeur de $g_n(P_1, P_2, ..., P_n)$.

(c) En déduire pour $E = C_R$, que la limite $\Delta(E)$ de la suite $(\delta_k(E))_{k\geq 2}$ est différente de 0.

Montrer que :

$$R \leq \Delta(E) \leq \sqrt{3}R.$$

Partie III

ÉTUDE DE LA SUITE $(\delta_n(E))_{n\geq 2}$

L'objet de cette partie et de relier $\Delta(E)$ à un réel $\mu(E)$ défini à l'aide de valeurs prises par des polynômes.

On considère un repère orthonormé direct $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$ du plan Π. A chacun des points P du plan Π on peut alors associé un nombre complexe : l'affixe de P.

Soit E une partie bornée de Π. On note $\mathcal{E}$, l'ensemble des affixes des points de E.

Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes complexes unitaires U de degré n.

1. (a) Justifier, pour tout polynôme complexe unitaire U, l'existence de la quantité

$$S(E, U) = \sup\{|U(z)|, z \in \mathcal{E}\}.$$

Justifier pour tout entier $n \geq 1$ l'existence de la quentité

$$\sigma_n(E) = \inf\{S(E, U), U \in \mathcal{U}_n\}.$$

(b) On admet que $\sigma_n(E)$ ne dépend pas du choix du repère $(O; (\vec{i}, \vec{j}))$. Oon pose

$$\mu_n(E) = \sigma_n{}^{\frac{1}{n}}(E).$$

Déterminer deux réels a et b strictement positifs tels que :

$$a\sigma_1(E) \leq \delta_2(E) \leq b\sigma_1(E).$$

2. CAS D'UN SEGMENT

Soit I le segment fermé joignant les points A et B de coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. L'intervalle $[-1, 1]$ sera identifié à $[A, B]$ et également désigné par I.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note T_n l'application

$$T_n \ : \ I \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos(x)).$$

(a) Montrer que pour tout $x \in I$,

$$T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - \frac{1}{4}T_n(x).$$

Indication : on pourra calculer $2^{n+1}T_{n+2} + 2^{n-1}T_n$.

(b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, T_n est une application polynômiale sur I, on note encore T_n le polynôme associé.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme T_n est unitaire de degré n.

Déterminer le maximum de l'application T_n sur I.

(c) Soit U un polynôme unitaire de degré n.
Montrer l'existence de $M_U = \max\{U(x) | x \in I\}$.
le but des sous-questions suivantes et d'établir que $M_U \geq \frac{1}{2^{n-1}}$

(d) Supposons que U soit réel et tel que, pour tout $x \in I$, :

$$|U(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1}$$

Déterminer les signes des valeurs prises par le polynôme $U - T_n$ aux points x_k définis pour $k = 0, 1, \ldots, n$, par : $x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. En déduire que l'hypothèse (1) est fausse.

(e) On ne suppose plus que U est réel. Démontrer que $M_U \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

(f) En déduire la valeur de $\mu_n(I)$. Démontrer que la suite $(\mu_k(I))_{k\in\mathbf{N}^*}$ admet une limite notée $\mu(I)$ à déterminer.

Nous repassons au cas général.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout couple (p, q) d'entiers strictements positifs,

$$u_{p+q}^{p+q} \leq u_p^p u_q^q. \tag{2}$$

(a) Montrer que pour tout k et tout p, entier strictement positifs, $u_{kp} \leq u_p$.

(b) Etablir l'existence de $\ell = \inf\{u_n | n \in \mathbf{N}^*\}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge.
Indication : on rappelle que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\ell \leq u_p < \ell + \varepsilon$$

et que tout entier n s'écrit de manière unique $n = pq_n + r - n$, avec $0 \leq r_n < p$.

(c) Soit E une partie bornée du plan Π. Montrer que pour tout couple (p, q) d'éléments de $\mathbf{N}^*$,

$$\sigma_{p+q}(E) \leq \sigma_p(E)\sigma_q(E).$$

(d) Soit $\mu(E)$ la borne inférieure de $\{\mu_n(E) | n \in \mathbf{N}^*\}$ Démontrer que la suite $(\mu_n(E))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente et de limite $\mu(E)$.
Vérifier cette propriété sur l'exemple du segment traité en 2.