DM n°7

Nous allons édudier dans ce DM les séries de Fourier.
La première partie introduit la série de Fourier d'une application continue par morceaux périodique, la deuxième en exprime la somme partielle au moyen d'une intégrale. C'est dans la troisième partie que sera établi un résultat de convergence de la série de Fourier d'une application, sous des hypothèses fortes de régularité (théorème de Dirichlet), enfin la quatrième partie établit la convergence en moyenne de la série de Fourier. Une ultime partie s'adresse aux candidats aux ÉNS.

DÉFINITIONS ET RAPELS

Définition 1. *Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Une application f d'un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ dans est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux (continue par morceaux dans le cas où $k=0$) si par définition il existe une subdivision $(a_0, a_1, ..., a_n)$ de $[a,b]$, telle que pour $i = 0, ..., n-1$ la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable à $[a_i, a_{i+1}]$ en une application de classe $\mathcal{C}^k$.*
En particuier une application $\mathcal{C}^0$ par morceaux admet en tout point une limite à droite et à gauche.

Définition 2. *Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Une application f de $\mathbb{R}$ dans pérodique de période 2π est dite $\mathcal{C}^k$ par morceaux (continue par morceaux dans le cas où $k=0$) si par définition sa restriction à $[-\pi,\pi]$ l'est.*

Nous aurons besoin du résultat suivant vu en exercice.

Lemme de Lebesgue. *Soit g une application d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continue par morceaux. Notons $I(\lambda)$, pour tout réel λ, la quantité*

$$\int_{[a,b]} g\ \sin(\lambda\,.).$$

Alors

$$I(\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

I. SÉRIES DE FOURIER

on note e_n, pour tout élément n de , l'application

$$e_n\ :\ \mathbb{R} \to ;\ t \mapsto \exp(int).$$

1. calculer pour tout couple (p,q) d'élément de ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e_p e_q.$$

2. Soit $(c_n)_{n\in}$ une famille de complexes. On suppose que la série $c_0 e_0 + \sum\limits_{n\geq 1} c_{-n}e_{-n} + c_n e_n$ converge normalement de somme f.
   Montrer que f est 2π-périodique continue et que pour tout entier relatif n, $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e_{-n} f$.

Réciproquement si f est une application 2π périodique continue par morceaux on appelle série de Fourier de f la série d'applications

$$c_0(f)e_0 + \sum_{n\geq 1} c_{-n}(f)e_{-n} + c_n(f)e_n,$$

ou pour tout $n \in$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{[0,2\pi]} e_{-n}f$$

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ la somme partielle d'indice n de cette série d'applications.

Notons que la série de Fourier est définie sans présager de sa convergence, et dans le cas de convergence rien ne dit que sa somme soit f. C'est ces points qui feront l'objet de l'étude qui suit.

On note parfois encore la série de Fourier de f, $\sum\limits_{n\in} c_n(f)e_n$ et dans le cas de la convergence $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e_n$ l'application somme.

3. Montrer que pour tout application f de $\mathbb{R}$ dans continue par morceaux 2π-périodique, $c_n(f) \mapsto 0$ lorsque n tend vers $\pm\infty$.

II. NOYAU DE DIRICHLET

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans , 2π-périodique, continue par morceaux.

Donnons une forme intégrale de la somme partielle de la série de Fourier.

1. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ et tout réel x,

$$S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\ \mathrm{d}t.$$

où D_n désigne l'application

$$D_n : \mathbb{R} \to \mathbf{C},\ t \mapsto \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)\right),$$

avec la convention qu'une somme vide est nulle.

D_n s'appelle le noyau de Dirichlet.[1]

2. Montrer, pour tout réel x, que :

$$S_n(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-t)\, D_n(t)\ \mathrm{d}t.$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel x non congru à zéro modulo 2π,

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\ \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

4. Montrer que D_n est 2π-périodique, paire et que :

$$\int_0^{2\pi} D_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Il est malheureusement impossible sans hypothèses supplémentaires de prouver la convergence de $S_n(f)(x)$ vers $f(x)$. On construit même sans trop de difficultés des éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en un point

1. On dit que S_n est le produit de convolution de D_n par f, noté $D_n \star f$.

III THÉORÈME DE DIRICHLET

On désigne ici par f une application de $\mathbb{R}$ dans , 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On se propose de montrer que pour tout réel x,

$$S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{f(x_{+0})+f(x_{-0})}{2}.$$

En particulier en tout point x de continuité de f, $S_n(f)(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$.

Dans la suite x désigne un réel quelconque et l'on note $\tilde{f}(x) := \frac{f(x_{+0})+f(x_{-0})}{2}$.

1. Montrer le résultat dans le cas où f est une application de classe $\mathcal{C}^1$. On pourra montrer que pour tout réel x l'application
$$[-\pi,\pi]\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\,;\ t\mapsto \frac{f(x-t)-f(x)}{\sin(t/2)},$$
est prolongeable par continuité à $[-\pi,\pi]$ et utiliser le lemme de Lebesgue.

2. (facultatif)
   (a) que :
$$S_n(f)(x)-\tilde{f}(x)=\int_0^{\pi}\Big(f(x-t)-f(x_{-0})\Big)D_n(t)\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\Big(f(x+t)-f(x_{+0})\Big)D_n(t)\mathrm{d}t.$$
   (b) Soient les applications :
$$g_- \ :\,]0,\pi]\to\ ;\ t\mapsto\frac{f(x-t)-f(x_{-0})}{\sin(t/2)},$$
$$g_+ \ :\,]0,\pi]\to\ ;\ t\mapsto\frac{f(x+t)-f(x_{+0})}{\sin(t/2)}.$$
   Montrer rapidement que g_- et g_+ admettent un prolongement à $[0,\pi]$ continu par morceaux.
   (c) Montrer que l'on a bien :
$$S_n(f)(x)\underset{n\to+\infty}{\to}\frac{f(x_{+0})+f(x_{-0})}{2}.$$
   Indication : On utilisera le lemme de Riemann-Lebesgues.

IV. THÉORÈME DE FEJER

Pour une fonction f simplement continue on ne peut montrer la convergence de la série de Fourier vers f, l'obstacle principal est la non positivité du noyau de Dirichlet D_n. Nous allons montrer que par contre il y a convergence « en moyenne » de la série de Fourier vers $\tilde{f}$. La preuve ressemble à celle du théorème de Weierstrass vu dans le précédent TD.

1. Théorème de Fejér

   On pose pour tout entier strictement positif n et tout réel x :
$$M_n(f):=\frac{1}{n}\Big(S_0\,(f)\,(x)+S_1\,(f)\,(x)+...+S_{n-1}\,(f)\,(x)\Big).$$
   (a) Montrer qu'il existe pour tout entier strictement positif n et tout réel x une application 2π-périodique continue F_n telle que :
$$M_n(f)\,(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f\,(t)\,F_n\,(x-t)\ \mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}f\,(x-t)\,F_n\,(t)\ \mathrm{d}t,$$

pour tout réel x.

Montrer de plus que pour tout entier strictement positif n et tout réel x non congru à 0 modulo 2π :

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2\left(n\frac{x}{2}\right)}{n\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

F_n s'appelle le noyau de Fejér , exhibons les propriétés essentielles de ce noyau.

(b) Montrer que :

i. pour tout entier strictement positif n, F_n est 2π-périodique.

ii. Pour tout entier strictement positif n et pour tout réel x, $F_n(x) \geq 0$.

iii. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

iv. Pour tout élément δ de $]0,\pi[$, la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$converge uniformément vers l'application nulle sur $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

(c) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue en x. Montrer que :

$$M_n(f)(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(f(x-t) - f(x)\Big) F_n(t)\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout réel ε, strictement positif, il existe un réel δ, strictement positif, tel que :

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \Big(f(x-t) - f(x)\Big) F_n(t)\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En déduire, en utilisant le 2– b) point iv., que $M_n(f)(x)$ tend vers $f(x)$, lorsque n tend vers l'infini.

(d) Soit x un élément de $\mathbb{R}$. On ne suppose plus que f est continue en x. Montrer que $M_n(f)(x)$ tend vers $\frac{1}{2}\Big(f(x_{+0}) + f(x_{-0})\Big)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. (a) Dans cette question f est supposée continue sur un segment $[a,b]$. Montrer que la suite $(M_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

(b) En déduire que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans $\Big(\mathcal{C}_{2\pi}, \|.\|_\infty\Big)$. C'est le théorème de Weierstrass trigonométrique

3. On suppose que f est continue et que sa série de Fourier converge. Montrer que la somme de sa série de Fourier est f.

Figure 1 – Joseph Fourier (1768–1830)
Né dans une famille nombreuse d'Auxerre, orphelin à dix ans, il entre néanmoins à la toute jeune Ecole Normale Supérieure, où il suit les enseignements de Monge, Laplace et de Lagrange. À la création de L'Ecole Polytechnique, il devient l'assistant de Lagrange auquel il ne tarde pas à succéder. Suit alors une carrière de haut fonctionnaire au service de l'Empire qui ne l'empèche pas cependant de poursuivre ses recherches ; il rédige notamment en 1807 un mémoire sur la propagation de la chaleur qui lui vaut d'être couronné par l'académie des Sciences et de passer à la postérité : il y expose en effet le moyen de décomposer une fonction en une somme de ≪ sinus d'arcs multiples ≫. Les séries de Fourier étaient nées ...

V. DIVERGENCE DE LA SÉRIE FOURIER D'UNE APPLICATION CONTINUE (réservé candidats ENS)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans , 2π-périodique, continue. La somme partielle d'ordre n de sa série de Fourier sera notée $S_n(f)$. On a vu dans la partie I, que pour tout élément n de $\mathbb{N}$ et tout réel x,

$$S_n(f)(x) = \int_0^{2\pi} f\,(t)\, D_n\,(x-t)\ \mathrm{d}t,$$

où D_n désigne l'application

$$D_n : \mathbb{R} \to \mathbf{C},\ t \mapsto \frac{1}{2\pi}\left(1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kt)\right),$$

avec la convention qu'une somme vide est nulle.
D_n s'appelle le noyau de Dirichlet.
On a vu dans I que D_n est 2π-périodique, paire et que :

$$\int_0^{2\pi} D_n\,(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

1. Pour tout entier naturel n on considère la forme linéaire sur l'espace vectoriel des applications 2π-périodiques continues, $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},)$:

$$\Lambda_n\ :\ \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},) \to;\ f \mapsto S_n(f)(0).$$

On muni $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (définie par $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$) et du module. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Λ_n est continue et :

$$|\!|\!|\Lambda_n|\!|\!| \leq \|D_n\|_1,$$

$\|D_n\|_1$ vaut par définition $\int_0^{2\pi} |D_n(t)|$ṭ.

2. Montrer que $|\!|\!|\Lambda_n|\!|\!| = \|D_n\|_1$.
3. Montrer que $\|D_n\|_1 n + \infty$.

4. En utilisant Le théorème de Banach Steinhauss (voir TD n 4), Montrer qu'il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense G_0 de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},)$, tel que pour tout élément f de G_0 la série de Fourier de f diverge en 0, ou plus précisément, tel que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(S_n(f(0)) = +\infty$.
5. Montrer que pour tout réel x, il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense de G_x de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},)$, tel que pour tout élément f de G_x la série de Fourier de f diverge en x, ou plus précisément, tel que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(S_n(f(x)) = +\infty$.
6. Soit $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, 2\pi]$ dense. Montrer qu'il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense G de $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},)$ tel que pour tout f élément de G et tout élément p de $\mathbb{N}$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(S_n(f(x_p)) = +\infty$.
7. En déduire que pour tout f élément de G, il existe un $\mathcal{G}\delta$ dense de $\mathbb{R}$, g_f, tel que la série de Fourier de f diverge en tout point de g_f.

Bref, les séries de Fourier des applications continues convergent très mal