DM n$^{\text{o}}$9

Problème 1

Reprendre le DS 8 : Partie II questions 22 et 23, et toute la partie III.

PROBLÈME 2 : PROCESSUS DE GALTON-WATSON

Introduction

FRANCIS GALTON *un proche parent de* CHARLES DARWIN*, s'interroge à la fin du 19*$^{\text{e}}$ *siècle sur l'extinction des patronymes. Après des travaux en météorologie, (on lui doit le mot d'anticyclone), il se consacre à la génétique et sa formation ne lui permetait pas de résoudre lui-même ce problème. Il fait donc appel à un ami mathématicien* WILLIAM WATSON*. Tous les deux publient un article en 1874 qui, suite à une regrétable erreur conclut de façon fautive à l'inévitable disparition des patronymes [Bacaër, 2008].*

Nous proposons ici une étude moderne et plus général du problème qui — on l'espère — est exempte d'erreurs.

On se donne une famille $(Y_{n,i})_{(n,i)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mutuellement indépendantes et de même loi. On note pour simplifier $Y := Y_{0,1}$, $m := \mathrm{E}(Y)$ et pour tout entier $k \geq 0$, $p_k := \mathbf{P}(Y = k)$. On suppose que p_0 n'est ni nul, ni égal à 1 :

$$0 < p_0 < 1.$$

Pour tout entier naturel n, et tout entier $i \geq 1$, si à la n^{e} génération il y a au moins i membres masculins de la famille que l'on se propose d'étudier, alors $Y_{n,i}$ représente dans le modèle historique, le nombre de déscendants mâles probable du i^{e} membre.

On considère sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, la varable aléatoire Z_0 qui vaut presque sûrement 1 et la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par récurrence par :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} Y_{n,i},$$

ce en convenant comme d'ordinaire qu'une somme vide vaut 0.

1. FONCTION GÉNÉRATRICE DE Z_n On note g la fonction génératrice de Y et pour tout $n \in \mathbf{N}$, G_n la fonction génératrice de Z_n.
   (a) Que modélise pour un entier naturel n la variable aléatoire Z_n ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$G_{n+1} = G_n \circ g,$$
   en déduire l'expression de G_n en fonction de g.
2. ÉTUDE DE g
   (a) Montrer que g est strictement croissante sur $[0, 1]$.
   (b) On suppose que $p_0 + p_1 \neq 1$. Montrer que g est strictement convexe.
   (c) On suppose que $p_0 + p_1 = 1$. Que dire de g ?
3. EXTINCTION DES PATRONYMES
   On note A l'événement *la suite* (Z_n) *s'annule*, qui caractérise l'extinction du patronyme,
   $$A = \{\exists n \in \mathbf{N} | Z_n = 0\}.$$
   (a) Montrer que $G_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbf{P}(A)$. En déduire que $\mathbf{P}(A)$ est un point fixe de g.
   Pour la suite on introduit l'application $\phi\ :\ [0, 1] \to \mathbf{R}\,;\ s \mapsto g(s) - s$.

(b) On suppose $m < 1$. En étudiant les variations de ϕ, montrer que $\mathbf{P}(A) = 1$.
Conclusion : *le patronyme s'éteint presque sûrement.*

(c) On supose à présent que $m > 1$. Montrer que la restriction de g à $]0,1[$ admet un et un seul point fixe v. Montrer que $G_n(0) \underset{n\to+\infty}{\to} v$.

(d) On suppose que $m = 1$. Montrer que g est strictement convexe. On suppose que la restriction de g à $]0,1[$ admet un point fixe v. Montrer que g coïncide avec l'identité sur $[v,1]$. En déduire que $\mathbf{P}(A) = 1$.

PROBLÈME 3 : EXPONENTIELLE DE MATRICE

Exponentielle de matrice —
On admet les rsultat de TD sur la décomposition de Dundford.
On rappelle le résultat au programme : *Soient A et B des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ qui commutent entre eux, alors* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

On désigne par n un entier ≥ 1 et par M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

1. déterminer $\mathrm{Det}(\exp(M))$.
2. Montrer que si M est diagonalisable, alors $\exp(M)$ l'est.
3. **Facultatif.**
   (a) Donner la décomposition de Dundford de $\exp(M)$.
   (b) Montrer que MA est diagonalisable si et seulement si $\exp(M)$ l'est.
4. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbf{C}[X]$ tel que $\exp(M) = P(M)$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P_0 tel que pour tout élément $A \in \mathcal{M}_n\mathbf{C}$, $\exp(A) = P_0(A)$
5. (a) Soit N une matrice élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente. Montrer qu'il existe élément de A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\exp(A) = I + N$.
   (b) **Facultatif.** En déduire que $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On pourra utiliser la décomposition par blocs d'une matrice.
6. L'exponentielle de matrice est-elle injective de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$?
7. Montrer que la restriction de l'exponentielle de matrice au sous-espace vectoriel des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonalisables est injectif.
8. Montrer que l'exponentielle de matrice définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})^+$ mais est non surjectif de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.
9. Étude de $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ **Facultatif.**
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On suppose que A est diagonalisable. Montrer qu'il existe $p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $\exp(p(A)) = A$.
   (b) En utilisant la décomposition de Dundford, montrer qu'il existe $p \in [\mathbf{C}]$ tel que $\exp(p(M)) = M$, avec toujours $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Retrouver le résultat de la question 7.
   (c) Déduire de ce qui précède que :
   $$\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})) = \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}), \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), A = B^2\right\}.$$
   (d) Montrer que le groupe G engendré par $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}))$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est $\mathrm{GL}_n^+(\mathbf{R})$.

Références

[Bacaër, 2008] Bacaër, N. (2008). *Histoires de mathématiques et de populations.* Cassini Paris.