DS sup. n°2 facultatif

Étude des matrices bistochastiques

Dans tout le problème, $\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et n un entier strictement positiif. On note $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des n-uplet $(x_1, ..., x_n)$ de réel. Pour $i = 1, \ldots, n$ la i^{e} composante d'un élément x de $\mathbf{R}^n$ sera noté x_i. Pour z et y dans $\mathbf{R}^n$, $z \cdot y$ désigne le produit scalaire canonique de z et de y, c'est-à-dire que l'on a $z \cdot y = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i y_i$. De même, $\|z\|$ désigne la norme euclidienne de z, c'est-à-dire que l'on a $\|z\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2$.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients réels. Une matrice $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite *bistochastique* si, pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$, on a

1. $a_{i,j} \geq 0$;
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$;
3. $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des matrices bistochastiques de dimension n. Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite de permutation si elle est bistochastique et si tous ses coefficients sont égaux à zéro ou un.

Pour tout couple de réels (i,j) , on note $\delta_{i,j}$ la quantité égale à 1 si $i = j$ et 0 sinon. Par ailleurs, on note e le vecteur de $\mathbf{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1.

La partie II est indépendante de la partie I et la partie IV des parties II et III.

I. Préliminaires

1. Montrer que si $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ est une matrice de permutation de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, alors il existe une permutation σ de $\{1, ..., n\}$ telle que pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$ on ait
$$a_{i,j} = \delta_{\sigma(i),j}.$$
2. Montrer que si A est une matrice de permutation alors A a un déterminant égal à 1 ou à -1. Déterminer l'inverse de A.
3. Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques est une matrice bistochastique.
4. Montrer que si A est une matrice bistochastique et a un vecteur ligne de A, alors $\|a\| \leq 1$ et que l'égalité n'est obtenue que si a est un vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
5. En déduire que les seules matrices bistochastiques d'inverse bistochastique sont les matrices de permutation.

II. Polyèdres convexes

Un demi-espace de $\mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble H pour lequel il existe un vecteur x de $\mathbf{R}^n$ et un réel a tels que $H = \{y \in \mathbf{R}^n | x \cdot y \leq a\}$. Pour entier $m \geq 1$, soit $S_m = \left\{\lambda \in \mathbf{R}^n | \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \text{ et } \forall i \in \{1 \cdot m\}, \lambda_i \geq 0\right\}$.

On rappelle qu'une partie K de $\mathbf{R}^n$ est dit convexe si pour tout entier $m \geq 1$, pour tout $\lambda \in S$ et toute famille $(x_i)_{i=1,\ldots,m}$ d'éléments de K on a $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i \in \mathbf{K}$.

Par ailleurs, si L est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on appelle *enveloppe convexe*, notée $\mathrm{co}(L)$, le plus petit convexe contenant L. C'est évidemment l'intersection de tous les ensembles convexes contenant L et on admettra que $\mathrm{co}(L)$ est l'ensemble des barycentres d'éléments de L à coefficients positifs :

$$\mathrm{co}(L) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i | m \in \mathbf{N}^*, (x_i)_{i=1,\ldots,m} \in L^m \text{ et } (\lambda_i)_{i=1,\ldots,m} \in S_m\right\}.$$

On dit qu'un sous-ensemble K de $\mathbf{R}^n$ est un polyèdre convexe si K est non vide, borné et si K est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces. On appelle dimension d'un polyèdre convexe la dimension de l'espace affine qu'il engendre. On dit que s est un sommet du polyèdre convexe K si $s \in K$ et si pour tout couple (y, z) d'éléments de K et tout $t \in]0, 1[$, si $s = ty + (1 - t)z$ alors $y = z = s$.

1. Montrer que S_n, est un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$. Déterminer sa dimension et ses sommets.
2. Soit K un polyèdre convexe de $\mathbf{R}^n$ et soit H un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ avec $H = \{y \in \mathbf{R}^n | x \cdot y = a\}$, où x est un élément de $\mathbf{R}^n$ et a un réel. On suppose que $H \cap K \neq \emptyset$ et que $K \cap \{y \in \mathbf{R}^n | x \cdot y > a\} = \emptyset$. Un tel H est appelé hyperplan d'appui de K.

   Montrer que l'ensemble des sommets du polyèdre $H \cap K$ est égal à l'intersection de l'ensemble des sommets de K et de H.
3. Soit k un point de la frontière de K, polyèdre convexe, montrer qu'il existe un hyperplan d'appui de K contenant k.
4. Montrer que K, polyèdre convexe, est égal à l'enveloppe convexe de sa frontière.
5. En déduire, par récurrence sur n, que tout polyèdre convexe est l'enveloppe convexe de ses sommets.

III. L'ensemble B_n, des matrices bistochastiques

Dans cette partie on identifie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $\mathbf{R}^{n^2}$ en identifiant une matrice $(a_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et le n^2-uplet de ses coefficients, énumérés par exemple une ligne après l'autre :

$$(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots\ldots, a_{n,1}, \ldots, a_{n,n})$$

On admet sans discussion que ce qui suit est indépendant du mode d'énumération.

1. Montrer que $\mathcal{B}_n$, est un polyèdre convexe de dimension au plus $(n - 1)^2$.
2. On se propose de montrer que l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}_n$, est égal à l'ensemble des matrices de permutation.
   (a) Montrer que toute matrice de permutation est un sommet de $\mathcal{B}_n$.
   (b) Soit M un élément de $\mathcal{B}_n$. On suppose qu'aucun coefficient de M n'est égal à 1. Montrer qu'il existe une matrice A dont la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne est nulle et telle que $M + A$ et $M - A$ soient éléments de $\mathcal{B}_n$, (Faute de mieux on pourra se limiter au cas $n = 2$).
   En déduire que si $S = (s_{i,j})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ est un sommet de $\mathcal{B}_n$, alors il existe un couple (i, j) d'éléments de $\{1, ..., n\}$ tel que pour tout élément k de $\{1, ..., n\}$ on a $s_{i,k} = \delta_{k,j}$ et $s_{k,j} = \delta_{i,k}$.
   (c) Conclure grâce à une récurrence.
3. Soit un entier $d \geq 1$. Montrer que si un élément x de $\mathbf{R}^d$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i,$$

   avec $(x_1, ..., x_m) \in (\mathbf{R}^d)^m$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_m) \in S_m$, alors il existe $\mu \in S_{d+1}$ et $(y_i)_{i=1,\ldots,d+1}$ une famille d'éléments de $\{x_1, \ldots, x_m\}$, (i.e. $\{y_1, \ldots, y_{d+1}\} \in \{x_1, \ldots, x_m\}$) tels que

$$x = \sum_{i=1}^{d+1} \mu_i y_i,$$

4. En déduire que toute matrice A de $\mathcal{B}_m$, il existe un entier naturel $m \leq (n-1)^2+1$ des matrices de permutation de taille n, A_1, A_2,...,A_m et $\lambda \in S_m$, tels que :
$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i.$$

IV. Orbite d'un vecteur x de $\mathbf{R}^n$

Dans cette partie il semble que l'énoncé considère $\mathbf{R}^n$ comme l'ensemble des vecteurs-colonnes à n lignes. Nous n'avons pas corrigé cette maladresse.

1. Soient $x \in \mathbf{R}^n$ tel que :
$$x_1 \leq x_2 \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n,$$
et i et j deux éléments de $\{1,\ldots,n\}$ tels que $i<j$. Soit un réel $\varepsilon > 0$ et soit $y \in \mathbf{R}^n$ tel que :
   - $y_i = x_i + \varepsilon \leq x_j$;
   - $y_j = x_j - \varepsilon \geq x_i$;
   - Pour tout élément k de $\{1,\ldots,n\}$ distinct de i et de j, $y_k = x_k$.

   Montrer qu'il existe $A_{i,j,\varepsilon} \in \mathcal{B}_n$ telle que $y = A_{i,j,\varepsilon}x$.
2. On rappelle que pour une fonction ϕ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convexe, pour tout entier $m \geq 1$, tout élément a de $\mathbf{R}^m$ et tout élément λ de S_m, on a :
$$\phi\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi(a_i)$$
Soient des éléments x et y de $\mathbf{R}^n$ et $A \in \mathcal{B}_n$, tels que $y = Ax$, montrer que pour toute fonction convexe ϕ on a :
$$\sum_{i=1}^{n} \phi(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i)$$
3. Supposons, à présent, que x et y soient deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que : $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_n$ et tels que pour toute fonction convexe ϕ on ait $\sum\limits_{i=1}^{m} \phi(x_i) \geq \sum\limits_{i=1}^{m} \phi(y_i)$. Montrer que l'on a alors :
   — Pour tout tout entier k tel que $1 \leq k < n$, $x_1 + \ldots + x_k \leq y_1 + \ldots + y_k$;
   — $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$.

   Lorsque deux vecteurs x et y vérifient ces dernières relations on dit que y domine x.
4. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbf{R}^n$ tels que $x_1 \leq \cdots \leq x_n$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_n$. L'objet de cette question est de démontrer, par récurrence sur n, la propriété **(P)** suivante :

   (P) Si y domine x alors il existe $A \in \mathcal{B}_n$, telle que $y = Ax$.

   On notera $a = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.
   (a) Vérifier la propriété **(P)** pour $n=1$ ainsi que dans le cas général si $x_1 = a$ ou $x_n = a$.
   (b) On suppose, à présent, que $x_1 < a < x_n$, et que la propriété **(P)** est démontrée pour tout entier strictement plus petit que n. Montrer que s'il existe un élément k de $\{1,\ldots,n_1\}$ et que $x_1 + \ldots + x_k = y_1 + \ldots + y_k$ alors il existe $A_k \in \mathcal{B}_k$ et $A_{n-k} \in B_{n-k}$ tels que $y(k) = A_k x_k$ et $y_{n_k} = A_{n_k} x_{n-k}$, où pour tout élément z de $\mathbf{R}^n$, z_k désigne le vecteur $(z_1, \ldots, z_k)$ et z_{n-k} le vecteur $(z_{k+1}, \ldots, z_n)$.
   Conclure dans ce cas.
   (c) On suppose à présent que toutes les inégalités sont strictes, c'est-à-dire que $z_l + \ldots + x_k < y_1 + \ldots + y_k$, pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $x_1 < a < x_n$. Soit i l'indice de la plus grande coordonnée de x inférieure strictement à a et j l'indice de la plus petite coordonnée de x strictement supérieure à a. Soit $\bar{\varepsilon}$ le plus grand réel ε tel que $A_{i,i\varepsilon}x$ soit dominé par y. Montrer que si $\bar{\varepsilon} \leq \min\{(x-a_i)(x-a_j)\}$ alors la propriété **(P)** est vraie, (on remarquera que, dans ce cas, $A_{i,j\varepsilon}x$ sature au moins l'une des inégalités).
   (d) Dans le cas contraire (c'est-à-dire si $\bar{\varepsilon} \geq \min\{(a-x_i)(x_j-a)\}$), montrer qu'il suffit alors de vérifier la propriété **(P)** pour un vecteur x' bien choisi ayant strictement plus de coordonnées égales à a que x. Conclure.
5. On note $\mathcal{I}_k$ l'ensemble des sous ensembles I de $\{1, \ldots, n\}$ à k éléments. Soient x et y dans R^n. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $A \in \mathcal{B}_n$, telle que $y = Ax$ est
$$\min_{I \in I_k} \sum_{i \in I} x_i \leq \min_{I \in I_k} \sum_{i \in I} y_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$