

## Fonctions de deux variables (cours de sup.)

On se donne  $U$  ouvert de  $\mathbf{R}^2$ ,  $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ ;  $(x, y) \mapsto f(x, y)$  et  $m_0 = (x_0, y_0)$  un point de  $U$ .

### Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

#### Dérivées partielles en $(x_0, y_0)$

Sous réserve d'existence :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  est la dérivée en  $x_0$  de  $f(\cdot, y_0)$  en  $x_0$  ;
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  est la dérivée en  $y_0$  de  $f(x_0, \cdot)$  en  $y_0$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

**⚠ L'existence en  $(x_0, y_0)$  de dérivées partielles, n'assure pas la continuité en ce point !**

#### Définition

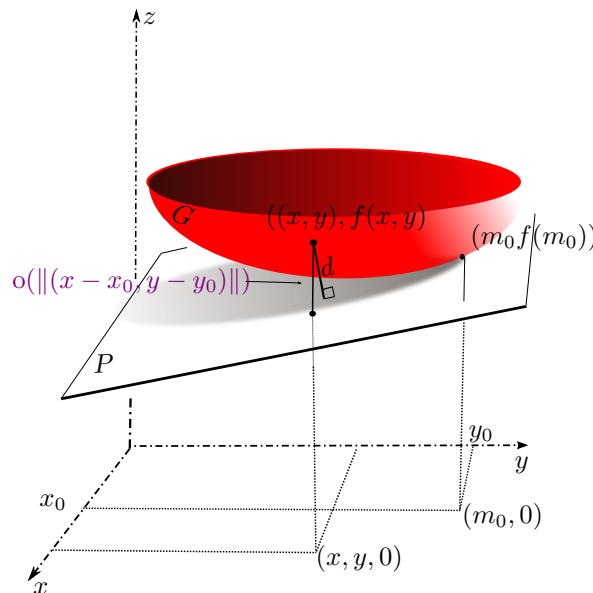
On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  si les applications  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont définies sur  $U$  et sont continues sur  $U$ .

☞ Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors elle est de classe  $\mathcal{C}^0$ .

**Fonction gradient.** Pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  on note  $\vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

**Développement limité à l'ordre 1 au voisinage de  $(x_0, y_0)$ .** JUSQU'À LA FIN  $f$  EST  $\mathcal{C}^1$

$$\underbrace{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}_{\text{accroissement de la fonction}} = \underbrace{h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_{\text{accroissement linéaire en } (h, k)} + \underbrace{o_{(h, k) \rightarrow (0, 0)}(\|(h, k)\|)}_{\text{négligeable devant } (h, k)}.$$



**FIGURE 1.** DISTANCE DU GRAPHE  $G$  DE  $f$  À SON PLAN TANGENT  $P$  EN  $((x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ .

$$P : z = f(m_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) ; \quad d := d((x, y, f(x, y)), P) = o(\|(x - x_0, y - y_0)\|).$$

Reformulation avec le gradient :  $f(m_0 + (h, k)) = f(m_0) + \langle \vec{\nabla} f(m_0), (h, k) \rangle + o_{(h, k) \rightarrow (0, 0)}(\|(h, k)\|).$

☞ Pour  $\|(h, k)\|$  fixée, au premier ordre, l'accroissement de  $f$  est maximum pour  $(h, k)$  positivement colinéaire à  $\vec{\nabla} f(m_0)$ .

## Composition d'applications de classe $\mathcal{C}^1$

**Notations :**  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  applications  $\mathcal{C}^1$  d'un intervalle  $I$  dans  $\mathbf{R}$  ;  $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2)$  ;  $F := f \circ \gamma$ .

### Règle de la chaîne

$F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et pour tout  $t \in I$  :

$$F(t) = f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)).$$

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t).$$

### Reformulation avec le gradient

$$(f \circ \gamma)'(t) = \left\langle \vec{\nabla} f(\gamma(t)) \mid \vec{\gamma}'(t) \right\rangle,$$

dérivée en  $t$  de  $f$  le « long de l'arc  $\gamma$  ».

**Définition.** Dérivée de  $f$  suivant  $\vec{v}$  en  $m_0$ , où  $\vec{v} \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ,  $D_{\vec{v}}f(m_0) := (f \circ \gamma_0)'(0)$ ; dans le cas particulier  $\gamma_0 : t \mapsto m_0 + t\vec{v}$ .

**Application.** Soient  $V$  un ouvert de  $\mathbf{R}^2$  et

$$g : V \rightarrow \mathbf{R}; (u_1, u_2) \mapsto f(\phi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2)),$$

$(\phi, \psi) \in \mathcal{C}^1(V, \mathbf{R}^2)$ ,  $(\phi, \psi)$  à valeurs dans  $U$ .

$$\frac{\partial g}{\partial u_1}(u_1, u_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2)) \frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u_1, u_2) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(u_1, u_2), \psi(u_1, u_2)) \frac{\partial \psi}{\partial u_1}(u_1, u_2)$$

$$D_{\vec{v}}f(m_0) = \left\langle \vec{\nabla} f(m_0) \mid \vec{v} \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) v_2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_{(1,0)}f(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_{(0,1)}f(x_0, y_0).$$

☞ Si  $\gamma(I)$  est inclus dans une ligne de niveau de  $f$  alors :

$$\vec{\nabla} f(\gamma(t)) \perp \vec{\gamma}'(t).$$

« Le vecteur gradient est normal aux lignes de niveaux », voir figure en bas à droite.

## Extremums locaux

**Proposition.** si  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  admet en  $m_0$ , point de l'ouvert  $U$  un extremum local, alors :

$$\vec{\nabla} f(m_0) = (0, 0) \text{ (point critique).}$$

⚠ **Résultat faux** lorsque  $f$  est la restriction à  $D$  non ouvert d'une application  $\mathcal{C}^1$ .

$$f_1 : D_f((0,0); 1) \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Maximum (global même) en  $(1, 0)$  et  $\vec{\nabla} f_1(1, 0) = (2, 0)$  (point non critique).

⚠ **La réciproque est fautive.**

$$f_2 : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}; (x, y) \mapsto x^2 - y^2.$$

Le point  $(0, 0)$  est critique et  $f_2$  n'y admet pas d'extremum.

