Bases de $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{K}[X]_n$

Par $\mathbf{K}$ on désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et par n un élément de $\mathbf{N}^*$.

Bases tayloriennes

Soient $a \in \mathbf{K}$, $\boxed{\mathscr{B}_c = \left(X^i\right)_{i\in\mathbf{N}}}$, $\boxed{\mathscr{B}_a = \left(\dfrac{(X-a)^i}{i!}\right)_{i\in\mathbf{N}}}$ et $\boxed{\mathscr{B}_{a,n} = \left(\dfrac{(X-a)^i}{i!}\right)_{i=0,\ldots,n}}$.

Bases

Les familles $\mathscr{B}_c$ et $\mathscr{B}_a$ sont des bases de $\mathbf{K}[X]$ la première est dite canonique.

La famille $\mathscr{B}_{a,n}$ est une base de $\mathbf{K}[X]_n$.

Pour $i \in \mathbf{N}$, on pose $\boxed{T_i = \dfrac{(X-a)^i}{i!}}$. Alors pour tout $j \in \mathbf{N}$, $\boxed{T_i^{(j)}(a) = \delta_{i,j}}$. D'où :

Isomorphismes réciproques ϕ et ψ :

$$\mathbf{K}[X]_n \underset{\overset{\psi}{\longleftarrow}}{\overset{\phi}{\longrightarrow}} \mathbf{K}^{n+1}$$

$$\phi \;:\; P \longmapsto (P^{(0)}(a), P^{(1)}(a), ..., P^{(n)}(a))$$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \frac{(X-a)^i}{i!} \longleftarrow\!\shortmid (c_0, c_1, ..., c_n) \;:\; \psi$$

$\mathscr{B}_{a,n}$ est l'image par ψ de la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$.

Décomposition dans $\mathscr{B}_a$. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) T_i = \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) \frac{(X-a)^i}{i!} \text{ (formule de Taylor)}}$$

☞ **On utilise les bases tayloriennes dans les exercices qui font appel aux valeurs du polynôme et de ses dérivées en un point.**

Produits scalaires $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (HP)

L'application

$$\Phi_a \;:\; \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}\,;\; (P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} P^{(i)}(a) Q^{(i)}(a)$$

est un produit scalaire. La base $\mathscr{B}_a$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

L'application

$$\Psi \;:\; \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] \to \mathbf{R}\,;\; (P,Q) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} \frac{Q^{(i)}(0)}{i!}$$

est un produit scalaire. La base canonique est une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\mathrm{i}p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \delta_{0,p}$ d'où :

Expression intégrale d'un polynôme (HP)

Soient P et Q des éléments de $\mathbf{R}[X]$, $P = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} p_j X^j, Q = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} q_j X^j$.

$$\boxed{\Psi(P,Q) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j q_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\exp(\mathrm{i}\theta)) P(\exp(-\mathrm{i}\theta))\,\mathrm{d}\theta} \quad \boxed{p_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\exp(\mathrm{i}\theta)) \exp(-\mathrm{i}j\theta)\,\mathrm{d}\theta = \Psi(P, X^j)}$$

Bases lagrangiennes

Soient $a_0, a_1, ..., a_n$ des éléments de $\mathbf{K}$ deux à deux distincts. On pose pour $i = 0, 1, ..., n$,

$$\boxed{L_i = \prod_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}} \text{ et } \boxed{\mathscr{L} = (L_i)_{i=0,\dots,n}}$$

Pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, on a $\boxed{L_i(a_j) = \delta_{i,j}}$

Base

La famille $\mathscr{L}$ est une base de $\mathbf{K}[X]_n$ (base des polynômes de Lagrange aux points $a_0, a_1, ..., a_n$).

Isomorphismes réciproques f et g :

$$\mathbf{K}[X]_n \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} \mathbf{K}^{n+1}$$

$$f \ : \ P \longmapsto (P(a_0), P(a_1), ..., P(a_n))$$

$$\sum_{i=0}^{n} b_i L_i \longleftarrow\!\shortmid (b_0, b_1, ..., b_n) \ : \ g$$

$\mathscr{L}$ est l'image par g de la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$.

Polynôme d'interpolation

Soit $(b_0, b_1, ..., b_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, il existe un et un seul élément P de $\mathbf{K}[X]_n$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], P(a_i) = b_i,$$

$$\text{c'est } \boxed{P = g(b_0, ..., b_n) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i}.$$

Décomposition dans $\mathscr{L}$.

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i}$$

Cas particulier : $1 = \sum_{i=0}^{n} 1 \times L_i$, $X = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i$, plus généralement $X^k = \sum_{i=0}^{n} a_i^k L_i$, pour $k = 0, ..., n$.

$$\text{Matrice de passage : } \mathrm{P}_{\mathscr{L}}^{(X^0,\dots,X^n)} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \text{ (matrice de Vandermonde).}$$

☞ **On utilise les bases lagrangiennes dans les exercices qui font appel aux valeurs du polynôme en $n+1$ points.**

Produits scalaires $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ (HP)

L'application

$$\Psi_L \ : \ \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X]_n \to \mathbf{R}\,; \ (P, Q) \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} P(a_i) Q_(a_i)$$

est un produit scalaire. La base $\mathscr{L}$ est une base orthonormée pour ce produit scalaire.