Ce très court DM est là pour attendre que de nouvelles notions soient traitées. Il utilise essentiellement des connaissances et des raisonnements de sup. Il est à rendre pour le 14 septembre.

DM n$^{\text{o}}$2

Exercice 1

On étudie dans cet exercices quelques aspects d'une marche aléatoire symétrique en dimension 1. Une marche aléatoire symétrique en dimension 1 modélise les dépalcements successifs d'un point matériel sur une droite qui se font dans un sens ou dans l'autre avec la même probabilité.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes qui suivent la loi de Rademacher, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ [1]. On dit qu'une variable aléatoire suit une loi de Rademacher si elle prend comme valeurs 1 et -1 avec la même probabilité, autrement dit si elle suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$

On pose pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

1. **Écart à l'origine**

   On se donne un réel ε strictement positif.

   (a) Calculer pour tout entier naturel $n \geq 1$ l'espérance et la variance de S_n.

   (b) En utilisant la formule de Bienaymé-Tchebychev, majorer pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right)$.

   Donner un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99$.

   (c) Montrer que pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge de somme e^x.

   On pourra consulter les fiches de colles de MPSI.

   En déduire que pour tout réel t, $\mathrm{ch}(t) \leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.

   (d) Déduire de la question précédente que pour tout réel t et tout entier $n \geq 1$,

   $$\mathrm{E}(\exp(tX_1)) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

   puis que :

   $$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n}\right).$$

   (e) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2n} - t\varepsilon\right)$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

   $$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

   On pourra étudier le trinôme du second degré $\frac{1}{2n}X^2 - X\varepsilon$.

1. Les 3/2 ne se préoccuperons pas de ce qu'est un espace probabilisé.

(f) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).$$

En déduire un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99$.

2. **Loi de S_n**

(a) Pour tout entier $n \geq 1$ on définit les varaibles aléatoires

$$X_n^* := \frac{X_n + 1}{2}\ ;\ S_n^* = X_1^* + X_2^* + ... + X_n^*.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la loi de X_n^* et de S_n^*.

(b) En déduire la loi de S_n.

3. **Retour à l'Origine.**

On convient que S_0 est la variable aléatoire presque sûrement nulle. On considère par ailleurs la variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbf{R} \cup \{+\infty\}$,

$$N = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{1}_{S_n=0}.$$

On convient évidemment dans la définition de N que La somme d'une série à termes positifs divergente vaut $+\infty$ et on rappelle que pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbf{1}_{S_n=0} = \begin{cases} 1 \text{ si } S_n(\omega) = 0, \\ 0 \text{ sinon }. \end{cases}$

(a) Que représente la variable aléatoire N ?
Exprimer l'événement $\{N \neq 0\}$ au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$.

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ exprimer au moyen des événements $\{S_k = 0\}$, $k \in \mathbf{N}^*$, l'événement E_n défini par :

$$E_n = \{\omega \in \Omega | S_n(\omega) = 0 \text{ et } \forall k \in]\!]n, +\infty[\![, S_k(\omega) \neq 0\}.$$

Interpréter l'événement E_n.

(c) Exprimer l'événement $\{N < +\infty\}$ au moyen des E_n, $n \in \mathbf{N}$

(d) En déduire que :

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n \geq 0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0).$$

(e) On admet que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge. Déterminer $\mathbf{P}(N = +\infty)$.

(f) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(S_n = 0)$ diverge.
On pourra utiliser la formule de Stirling.

Exercice 2

Soit un entier $n \geq 2$

1. Soit l'ensemble :
$$\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = A\}.$$
Montrer que $\mathcal{P}$ est la réunion de classes de similitude dont on déterminera le nombre.
2. On suppose que n est pair et l'on pose $p = \frac{n}{2}$. Soit l'ensemble :
$$\mathcal{Q} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = 0_n\}.$$
   (a) Montrer que $\mathcal{Q}$ contient des matrices de rang $0, 1, ..., p-1$ et p et pas de matrices de rang différent. Soit A un élément de Q de rang r. Montrer que A est semblable à :
$$\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}.$$
   (b) Montrer que $\mathcal{Q}$ est la réunion de classes de similitude dont on déterminera le nombre.