Devoir Maison de rentrée

À rédiger pour le lundi 4 septembre 2023.

Les résultats doivent être encadrés et les copies-doubles numérotées.

I. Autour des nilpotents

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E.
On dit que u est *nilpotent* s'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u^k = 0$, où u^k désigne $u \circ \cdots \circ u$ avec $k-1$ symboles de composition.
On peut alors définir le plus petit entier r tel que $u^r = 0$ qui est appelé *indice de nilpotence* de u.
On définit les notions analogues pour une matrice $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

1. Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que u n'est pas injectif.

2. Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice triangulaire supérieure stricte, *i. e.*, de la forme $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ & \ddots & * \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

   Montrer que M est nilpotente d'indice au maximum n.
   En notant $(\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n)$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$*, on pourra montrer par récurrence que pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ *et tout* $i \leqslant k$*, on a* $\mathrm{M}^k\mathrm{E}_i = 0$.

3. On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que A est nilpotente et préciser son indice.

   En déduire que l'équation $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ n'a pas de solutions dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{K})$.
   On pourra en raisonnant par l'absurde, montrer que M *serait nilpotente.*

4. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice r. Justifier l'existence d'un vecteur x_0 tel que $u^{r-1}(x_0) \neq 0$ et montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{r-1}(x_0))$ est libre.
   En déduire que si E est de dimension finie n, alors $r \leqslant n$.

5. Dans cette question, on suppose que $\dim \mathrm{E} = n$ et que u est nilpotent d'indice n.
   (a) On choisit comme précédemment un vecteur $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.
   Justifier que la famille $\mathscr{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E et donner la matrice de u dans cette base.
   En calculant par blocs, donner pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$ la matrice de u^k dans $\mathscr{B}$.
   (b) On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable* par un endomorphisme $v \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ si $v(\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{F}$.
   On peut alors définir un endomorphisme v_{F} de $\mathrm{L}(\mathrm{F})$ en posant pour tout $x \in \mathrm{F}$, $v_{\mathrm{F}}(x) = v(x)$. L'endomorphisme v_{F} est appelé endomorphisme *induit* par v sur F.
   Montrer que pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $\ker u^k$ est un sous-espace vectoriel de E stable par u et de dimension k.
   (c) Montrer que pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, si F est un sous-espace de dimension k stable par u, alors $\mathrm{F} = \ker u^k$.
   On pourra considérer l'endomorphisme induit par u *sur* F.

6. Soit $u \in \mathrm{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim \mathrm{E}$. Dans cette question, on montre que le *commutant* de u, *i. e.*, l'ensemble des endomorphismes v tels que $u \circ v = v \circ u$, noté $\mathrm{Com}(u)$, est égal à l'ensemble $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, u, \ldots, u^{n-1})$ que l'on notera $\mathbf{K}[u]$.
   (a) Montrer que $\mathbf{K}[u] \subseteq \mathrm{Com}(u)$.
   (b) Soit $\mathscr{B}$ une base de E de la forme $\mathscr{B} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0))$. Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$. On note $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ les coordonnées de $v(x_0)$ dans $\mathscr{B}$ et on pose $w = a_0 \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} + a_1 u + \cdots + a_{n-1} u^{n-1}$. Montrer que $v = w$ et conclure.

2. Polynômes générateurs en probabilité

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ et *prenant un nombre fini de valeurs*. À une telle variable aléatoire X, on peut associer la fonction polynomiale réelle

$$G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n) t^n$$

appelée *fonction génératrice* de la variable aléatoire X. Noter qu'à partir d'un certain rang N, les $\mathbf{P}(X = n)$ sont nuls, donc G_X est bien une fonction polynomiale (de degré inférieur à N).

1. Déterminer les fonctions G_X dans les cas suivants :
   — X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ où $p \in]0, 1[$.
   — X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(m, p)$ où $m \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0, 1[$.
   — X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, m\}$.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, donner l'expression de $\mathbf{P}(X = n)$ en fonction de la dérivée n-ième $G_X^{(n)}(0)$.
3. Montrer que l'espérance de X est donnée par la formule
$$\mathbf{E}(X) = G_X'(1).$$
4. Déterminer une formule qui donne la variance $\mathbf{V}(X)$ en fonction de $G_X'(1)$ et de $G_X''(1)$.
5. Retrouver ainsi la variance d'une loi binomiale.
6. Dans cette question, X et Y sont deux variables aléatoires *indépendantes*. Montrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
7. (a) Soit X, Y deux variables aléatoires. Montrer que si $G_X = G_Y$, alors X et Y suivent la même loi.
   (b) Application : déterminer la loi de $X_1 + X_2$ où X_1 suit une loi $\mathscr{B}(m_1, p)$, X_2 suit une loi $\mathscr{B}(m_2, p)$ et X_1, X_2 sont indépendantes.
   (c) Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes non constantes. On pose $X = X_1 + X_2$ et on suppose que X suit une loi $\mathscr{B}(m, p)$. Déterminer les lois de X_1 et de X_2.
8. Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on pose par convention $S_0 = 0$.
   Soit N une variable aléatoire telle que les X_n et N soient mutuellement indépendantes. On définit une variable aléatoire S en posant pour tout $\omega \in \Omega$,
$$S(\omega) = X_1(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$$
   ce qui s'écrit $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$,
$$G_{S_k} = (G_{X_1})^k.$$
   (b) Montrer que $G_S = G_N \circ G_{X_1}$.
   (c) En déduire que $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\,\mathbf{E}(X_1)$.
   (d) (*) Donner une égalité similaire pour la variance $\mathbf{V}(S)$.
9. Dans cette question, on montre qu'il n'est pas possible de piper deux dés à 6 faces de sorte que la somme de leurs scores suive la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.
   Pour $i \in [\![1, 6]\!]$, on note p_i la probabilité d'obtenir i avec le premier dé et q_i la probabilité d'obtenir i avec le second dé. On note X_1 le score obtenu en lançant le premier dé et X_2 le score obtenu en lançant le second dé et on suppose que X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes. Par l'absurde, on suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $\left(\sum_{i=1}^{6} p_i t^{i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{6} q_i t^{i-1}\right) = \frac{t^{11}-1}{t-1}$.
   (b) Justifier que $t \mapsto \sum_{i=1}^{6} p_i t^{i-1}$ admet une racine réelle (que l'on ne cherchera pas à calculer).
   (c) Conclure.

3. Calcul différentiel

Des éléments x, y, z,.... de $\mathbf{R}^2$ s'écriront aussi (x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)... L'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ est muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$, qui est, rappelons le, défini par

$$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2\,;$$

la norme euclidienne associée sera notée $\|\cdot\|$.

Soit f une application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On désigne par ∇f l'application gradient de f :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ désigne la première dérivée partielle de f, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ la seconde.

1. Soit $a = (a_1, a_2)$ un élément de $\mathbf{R}^2$. On considère l'application

$$\ell_a \;:\; \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,;\; x \mapsto (a|x).$$

   Montrer que ℓ_a est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer son gradient.

2. On suppose que :

$$f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty.$$

   (a) Montrer que f admet un minimum.
   on admettra qu'une fonction continue sur un disque fermé admet un minimum.

   (b) Montrer que le gradient de f s'annule.

3. On suppose à présent que f vérifie :

$$\frac{f(x)}{\|x\|} \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty.$$

   On se propose de montrer que ∇f est une surjection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

   (a) Montrer que

$$f(x) - (a|x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty.$$

   (b) Conclure en utilisant la question 2.