DM n°3

1 Un exemple

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille. Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences. On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

- si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité $\frac{3}{4}$;
- si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Marseille avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$;
- si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité $\frac{1}{2}$, laissée à Lyon avec la probabilité $\frac{1}{4}$, et ramenée à Marseille avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

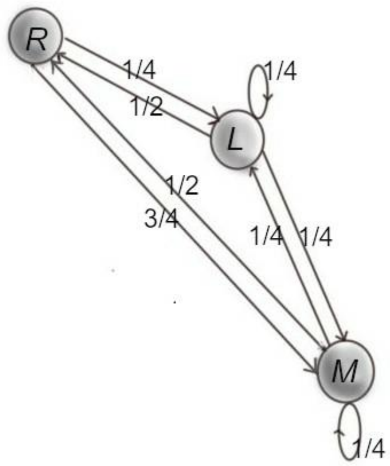

Figure 1 – Graphe représentant la transition d'un jour au suivant

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on note R_n (respectivement L_n, M_n) l'événement ≪ la voiture se trouve à Rennes (respectivement Lyon, Marseille) le soir du n^{e} jour ≫et l'on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire S_n qui vaut 1 si la voiture le matin du jour n est à Rennes, 2 si elle est à Lyon, 3 si elle est à Marseille..
On considère les probabilités suivantes :

$$r_n := \mathbf{P}(R_n),\ l_n := \mathbf{P}(L_n),\ m_n := \mathbf{P}(M_n)$$

ou si l'on préfère $r_n = \mathbf{P}(S_n = 1)$, $l_n = \mathbf{P}(S_n = 2)$, $m_n = \mathbf{P}(S_n = 3)$.

1. Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on définit la matrice colonne à trois lignes U_n par : $U_n = \begin{pmatrix} r_n \\ l_n \\ m_n \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on a la relation $U_{n+1} = BU_n$, où B est la matrice carrée d'ordre 3 suivante :
   $$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

   (b) Exprimer pour tout entier $n \geq 1$ le vecteur colonne U_n en fonction U_0 et de B.

2. Montrer sans calcul que 1 est valeur propre de B.
   On pourra considérer $B^\top$.

3. Déterminer la dimension de $\mathbf{E}_1(B)$.

4. On pose $U^* = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On suppose dans cette question que que $U_0 = U_*$.

   (a) Montrer qu'alors la probabilité que la voiture soit dans une des trois villes donnée est la même tous les jours.

   (b) Est-ce que les variables aléatoires S_0 et S_1 sont indépendantes ?

5. (a) En examinant le rang de B déterminer le spectre $\{1, \lambda, \mu\}$ de B, on vérifiera que $\lambda \neq \mu$. Montrer que B est diagonalisable.

   (b) Montrer que les espaces propres de B associés aux valeurs propres de B autres que 1, sont dans l'hyperplan H de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation :
   $$x + y + z = 0.$$
   On évitera de déterminer les espaces propres et on reviendra à la définition d'un vecteur propre

6. On note V et W des vecteurs propres associés respectivement à λ et μ. On pose $P = (U_*|V|W)$ et $D = \text{diag}(1, \lambda, \mu)$.

   (a) Montrer que (U_*, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, vérifier que la première coordonnée de U_0 dans cette base est 1.
   Exprimer pour tout $n \geq 0$ le vecteur U_n au moyen de P, U_0 et D.

   (b) Étudier le limite de U_n lorsque n tend vers $+\infty$.
   On évitera de calculer U_n.

2 Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

7. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.
8. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.
9. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.
10. Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

3 Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent* 1.

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ a_{i,j} \geq 0\,; \tag{3}$$

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

12. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.
13. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

14. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée [1] et convexe [2] de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ où les x_i sont les coefficients de X.

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les question 16 à 23, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et l'on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

16. Montrer que $\mathrm{Ker}(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
    On pourra raisonner comme dans la preuve du théorème d'Hadamard.
17. En déduire que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.
18. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.
19. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique de rang 1.
20. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne stochastique.
21. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.
22. Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.
23. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A. *On pourra utiliser la question 8.*
24. La matrice $B^\top$, où B est la matrice de la première partie est stochastique, donner une justification probabiliste de ce fait. Appliquer ce qui précède à l'exemple traité dans la première partie.

1. C'est-à-dire que pour toute suite de matrices stochastiques convergeante, sa limie est stochastique.
2. C'est-à-dire pour tout couple (A, B) de matrice stochastiques et tout élément t de $[0, 1]$, $tA + (1-t)B$ est stochastique.