Ce très court DM est là pour attendre que de nouvelles notions soient traitées. Il utilise essentiellement des connaissances et des raisonnements de sup. Il est à rendre pour le 14 septembre.

Indication pour le DM n°2

Exercice 1

1. **Écart à l'origine**

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ En premier lieux $\mathrm{E}(X_1) = 0$ et $\mathrm{V}(X_1) = 1$.
Ensuite utiliser la *linéraité* de l'espérance la *mutuelle indépendance* des X_i pour le calcule de la variance.

(b) Par (a), et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)\right.}{\varepsilon^2} = ...$$

(c) Utiliser l'inégalité de Taylor Lagrange.

Soit $t \in \mathbf{R}$. Par ce qui précède,

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!},$$

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-t)^k}{k!}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Comparer les coefficients devant t^n dans les deux sommes des séries pour conclure.

(d) Utiliser la formule du transfer et la question précédente.

$$\underline{\mathrm{E}(\exp(tX_1)) = \frac{1}{2}\exp(t \times 1) + \frac{1}{2}\exp(t \times (-1) = \mathrm{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

Le lemme de coalition fait que $\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)$,...,$\exp\left(\frac{tX_n}{n}\right))$ héritent de la mutuelle indépendance de X_1,...,X_n, donc

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right) =$$

etc.

(e) Soit un entier $n \geq 1$. La variable aléatoire $\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)$ est *positive* écrire l'inégalité de Markov.
Puis par croissance de l'exponentielle, pour tout réel t non nul

$$\left\{\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{tS_n}{n} \geq t\varepsilon\right\} \subset \left\{\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right) \geq \exp(t\varepsilon)\right\}$$

Reste à passer aux probabilités, et à optimiser en t, une rapide étude au brouillon d'un trinôme du second degré donne la meilleure valeur de t

(f) D'abord, $\left\{\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{-\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right\}$
Considérer alors les variables aléatoires $-X_1$,...,$-X_n$ ......

2. **Loi de S_n**

(a) $\boxed{X_n^* \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$ et le lemme de coalition assurant la mutuelle indépendance de X_1^*,X_2^*,...X_n^*,
$\boxed{S_n^* \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

(b) Pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 2S_n^* - n$, donc $S_n(\omega) = \{2k - n, k \in [\![-n; n]\!]\}$ .....

3. **Retour à l'Origine.**

(a) Soit $\omega \in \Omega$.
$N(\omega)$ représente <u>le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}^*}$</u> (nombre de « retours à l'origine »).
On a $N(\omega) = 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\{N \neq 0\} = ...$$

A l'oposé, $N(\omega) = +\infty$ si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un entier k supérieur ou égal à n tel que $S_k(\omega) = 0$; donc :

$$\{N = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \text{........................}$$

(b) Partitionnons l'événement $\{N < +\infty\}$ en fonction du dernière indice d'annulation n élément de $N^* \cup \{0\}$.

$$\{N < +\infty\} = \biguplus_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall p \in [\![n+1, +\infty[\![S_p \neq 0\} = ...$$

Pour conclure remarquer que les X_n étant mutuellement indépendantes et de même loi, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k} \neq 0) = \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0),$$

quantité indépendante de n, que nous baptiserons pour la suite α.

(c) On a donc :

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \mathbf{P}(S_n = 0),$$

La série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$, on l'admet, diverge, etc., etc., etc...

(d) D'après 2, $\mathbf{P}(S_{2p+1} = 0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \mathbf{P}(S_{2p}^* = p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$ (merci Stirling)....