DS n°1

Il sera, dans la notation, tenu compte de la présentation et de la qualité de la rédaction. Les résultats devront obligatoirement être encadrés *à la règle*, le texte et les *formules* ponctuées, un minimum de 80% des *s* du pluriel et de 70% des accents est requis.

Pénalités (jusqu'à 15% de la note) pour
— manque de soin ou de lisibilité ;
— formules mathématiques non ponctuées ;
— recours à des abréviations autres que ssi (tt, qqs, fct., ens...), ou symbloles logiques mélangés à du texte.

L'usage de la calculatrice est interdite.

EXERCICE

Notations. Pour une application d'un ouvert de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ on note $\partial_1 f$ la fonction dérivée partielle par rapport à la première variable et $\partial_2 f$ celle par rapport à la seconde.

Soit S_C l'ensemble des éléments f de $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ dont la restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et tels que pour tout $(t, x) \in (\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R})$:

$$\partial_1 f(t,x) + f(t,x)\partial_2 f(t,x) = 0. \tag{C}$$

Soit u une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ *croissante.*

1. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}^+$ et tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique réel $a(t,x)$ tel que :

$$x = a(t,x) + tu(a(t,x)).$$

On pourra pour tout réel $t > 0$, étudier l'application $\chi_t \ : \ \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,; y \longmapsto y + tu(y)$.
On admettra que la fonction $a \ : \ \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ainsi définie, est continue et que sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Exprimer les dérivées partielles de a en fonction de u de a et de u'.

On définit la fonction

$$f \ : \ \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \,; \ (t,x) \mapsto u(a(t,x)).$$

(c) Montrer l'égalité $f(0,x) = u(x)$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, puis montrer que la fonction f est élément de S_C.

(d) Application : On prend pour u l'application identité de $\mathbf{R}$. Déterminer f, vérifier que a est bien continue et que sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Soit g un élément de S_C. Soient (t_0, x_0) un point de $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et

$$F_{x_0} = \Big\{ (t, x_0 + (t - t_0) g(t_0, x_0)), t \in \mathbf{R} \Big\}.$$

(a) Identifier la nature géométrique de F_{x_0} et représenter pour $t_0 = 2$, F_1 et F_2 en supposant $g(0,1) = \frac{1}{2}$ et $g(0,2) = -1$.

(b) Identifier F_{x_0} et montrer que g est constante sur $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \cap F_{x_0}$.

3. (a) Montrer que pour tout réel $\tau > 0$, l'application de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}\,;\ x \mapsto g(\tau, x)$ est croissante, on pourra noter cette application $g(\tau, \cdot)$.

(b) En déduire que que $g(0, \cdot)$ est croissante.

(c) En prenant pour u l'application $g(0, \cdot)$, exprimer g au moyen de u et de l'application a définie comme 1.(a).