PROBLÈME

Les différentes parties sont indépendantes.

Ce problème traite des applications de la notion de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel, et de ses applications tant en algèbre qu'en analyse ou en géométrie.

Les théorèmes du cours utilisés lors de la résolution de ce problème devront être énoncés avec précision, leurs hypothèses devront être soigneusement vérifiées.

Dans ce texte, $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ représente l'ensemble des fonctions numériques, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. D'autre part, pour deux espaces vectoriels E et F, $\mathcal{L}(E, F)$ représente l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

I. Deux exemples simples de supplémentaires.

1. Soit $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et soit F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions paires. Donner un supplémentaire de F dans E.

2. Soit $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et F le sous-espace vectoriel constitué des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$.
   Montrer qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2, que l'on déterminera explicitement, telles que tout élément f de F se décompose de manière unique sous la forme :
   $$f = \alpha_f f_1 + \beta_f f_2 \quad \text{avec} \quad (\alpha_f, \beta_f) \in \mathbf{R}^2.$$

3. Déterminer l'unique matrice A telle que l'on ait, pour tout $f \in F$,
   $$\begin{pmatrix} \alpha_f \\ \beta_f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $G = \{g \in E | g(0) = g'(0) = 0\}$ est un supplémentaire de F dans E.

II. Supplémentaires, stabilité et diagonalisation.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est :

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 5 & -6 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Montrer que f est diagonalisable.

6. Montrer que le plan (P) d'équation $x - y + z = 0$ est stable par f.

7. Déterminer un supplémentaire de (P) stable par f.

8. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

   i. L'endomorphisme f est diagonalisable.

   ii. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par f.

III. Supplémentaires et calcul différentiel.

Notations.

– Si f une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ on notera $\partial_1 f$ sa dérivée partielle par rapport à la première variable et $\partial_2 f$ sa dérivée partielle par rapport à la seconde.

– Si $\partial_1 f$ est $\mathcal{C}^1$, on notera $\partial^2_{1,1} f$ sa dérivée partielle par rapport à la première variable et $\partial^2_{2,1} f$ sa dérivée partielle par rapport à la seconde, et on définit de même $\partial^2_{1,2}$ et $\partial^2_{2,2}$ les dérivées partielles de $\partial_2 f$.

– Si ces quatre dérivées partielles sont continues, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

– On admet que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\partial^2_{2,1} f = \partial^2_{1,2} f.$$

– On définit plus généralement par récurrence une application de classe $\mathcal{C}^n$, pour un entier $n \geq 1$, l'application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^n$ si $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.

– Une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, pour tout entier $n \geq 0$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'ensemble des applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^2}$ qui dans ce sujet sera noté E. On admet que E est stable par produit.

– Pour $(i,j) \in \mathbf{N}^2$, on définit la fonction

$$f_{i,j} \ : \ \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\,; (x,y) \mapsto x^i y^j.$$

Ces applications sont éléments de E, on ne demande pas de vérifier ce point élémentaire.

Soit F le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f_{i,j},\ (i,j) \in \mathbf{N}^2)$. On pose

$$\Delta \ : \ \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \partial^2_{1,1} f - \partial^2_{2,2} f \end{cases} \quad \text{et} \quad \Phi \ : \ \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \partial^2_{1,2} f \end{cases}.$$

– Pour $g \in F$, on note gF l'ensemble des fonctions qui s'écrivent gf avec $f \in F$.

9. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}^2}$.

10. Prouver que la famille $(f_{i,j}, (i,j) \in \mathbf{N}^2)$ est libre.

11. Montrer que les restrictions $\tilde{\Delta}$ (respectivement $\tilde{\Phi}$) de Δ (respectivement Φ) à F sont des endomorphismes de F.

12. Déterminer $\ker(\tilde{\Phi})$.

13. Montrer que $F = f_{1,1} F \oplus \ker(\tilde{\Phi})$.

14. LE CHANGEMENT DE VARIABLES. Soit l'application

$$w \ : \ \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \to & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \end{cases}.$$

ainsi que l'application

$$L \ : \ \begin{cases} F & \to & E \\ f & \mapsto & f \circ w \end{cases}.$$

Montrer que L est un automorphisme de F.

15. a) Soient $f \in F$ et $g = L(f)$. Donner l'expression de $\partial_1 g(x,y)$ et $\partial_2 g(x,y)$ en fonction de $\partial_1 f(w(x,y))$ et $\partial_2 f(w(x,y))$, pour tout élément (x,y) de $\mathbf{R}^2$.
    b) Montrer que $L(\ker(\tilde{\Delta})) = \ker(\tilde{\Phi})$.

16. Montrer que $L[(f_{2,0} - f_{0,2})F] = f_{1,1} F$.

17. Déterminer un supplémentaire de $\ker(\tilde{\Delta})$ dans F.

IV. Supplémentaires et géométrie.

18. Soient trois $\mathbf{R}$-espaces vectoriels : E, F et G. On suppose G de dimension finie. On se donne $g \in \mathcal{L}(E,G)$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$.
    Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

    i. Il existe $h \in \mathcal{L}(G,F)$ tel que $f = h \circ g$.

    ii. $\ker(g) \subset \ker(f)$.

19. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et $(k+1)$ formes linéaires non nulles notées f_1, f_2,...,f_{k+1}. On pose pour $i = 1, 2, ...k+1$, $H_i = \ker(f_i)$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

    i. L'inclusion suivante est satisfaite :

    $$\bigcap_{i=1}^{k} H_i \subset H_{k+1}.$$

    ii. Il existe $(a_1, \ldots, a_k) \in \mathbf{R}^k$ tels que

    $$f_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i.$$

    Indication : on utilisera éventuellement l'application

    $$\phi \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} E & \to & \mathbf{R}^k \\ x & \mapsto & (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \end{array} \right.$$

    ou on raisonnera par récurrence sur k...

20. On considère, dans cette question, l'espace $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne canonique, que l'on rapporte à un repère orthonormé. Soit D) l'ensemble définie par

    $$D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | z = 0, \ y = x\}.$$

    Soit également S l'ensemble d'équation

    $$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y - 4z + 10 = 0.$$

    a) Montrer que D est une droite dont on précisera un point et un vecteur directeur.

    b) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

    c) En utilisant ce qui précède, déterminer les équations cartésiennes des plans contenant D et tangents à S.

FIN DU PROBLEME