# Correction du DS n°1

## EXERCICE

1. (a) Soit réel $t \geq 0$. Considérons la fonction $\chi_t\ :\ y \longmapsto y + tu(y)$, définie sur *l'intervalle* $\mathbf{R}$ ; elle est *strictement croissante* et *continue*, elle réalise donc un homéomorphisme de $]-\infty, +\infty[$ sur $\chi_t(]-\infty, +\infty[)$. Mais $u$ croissante donc $u(y) \underset{y\to+\infty}{\to} \ell \leq +\infty$, donc $\chi_t(y) \underset{y\to+\infty}{\to} +\infty$, de même montre-t-on que $\chi_t$ admet $-\infty$ comme limite en $-\infty$ ; donc $\chi_t(]-\infty, +\infty[) = ]-\infty, +\infty[$, et donc $\chi_t$ est un homéomorphisme[1] de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
Donc pour tout réel $x$, il existe un unique réel noté $a(t, x)$, tel que :

$$\boxed{x = a(t,x) + tu(a(t,x))},$$

c'est $\chi_t^{-1}(x)$.

(b) Comme pour tout $(t, x) \in \mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}$,

$$x = a(t,x) + tu(a(t,x)),$$

par dérivation partielle,

$$0 = \partial_1 a(t,x) + u(a(t,x)) + tu'(a(t,x))\partial_1 a(t,x)\,;\ 1 = \partial_2 a(t,x) + tu'(a(t,x))\partial_2 a(t,x),$$

et donc, puisque $1 + tu'(a(t,x)) \geq 1 > 0$ :

$$\boxed{\partial_1 a(t,x) = -\frac{u(a(t,x))}{1 + tu'(a(t,x))},\ \partial_2 a(t,x) = \frac{1}{1 + tu'(a(t,x))}}.$$

(c) Par composition $f$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. De plus, pour $(t, x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$,

$$\partial_1 f(t,x) = \frac{-u'(a(t,x))u(a(t,x))}{1 + tu'(a(t,x))}$$

$$\partial_2 f(t,x) = \frac{u'(a(t,x))}{1 + tu'(a(t,x))}.$$

Donc $\boxed{\partial_1 f + f\partial_2 f = 0}$.
De plus on a, par définition de $a$, $a(0, x) = x$, donc $\boxed{f(0,x) = u(x)}$.

(d) Application. Pour tout réel $t \geq 0$ et tout réel $x$, l'équation en $y$ : $x = y + ty$, admet comme unique solution $\frac{x}{1+t}$ et donc $\boxed{f(t,x) = \dfrac{x}{1+t}}$ sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$.
Les applications $(t, x) \mapsto t$ ou $x$ sont linéaires donc de classe $\mathcal{C}^1$. Les théorèmes de transfert assurent que $f$ est continue et que sa restriction à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Le mot n'est pas au programme, il signifie que l'application est une bijection continue, de bijection réciproque continue.

2. (a) On aura reconnu en $F_{x_0}$ la droite passant par $(t_0, x_0)$ de pente $g(t_0, x_0)$.
*Place pour un dessin*

(b) Soit l'application

$$\Phi \ : \ \mathbf{R}_+^* \ ; \ t \mapsto g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)).$$

Par les théorèmes de transfert, $\Phi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout réel $t > 0$,

$$\Phi'(t) = \partial_1 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)) + g(t_0, x_0)\partial_2 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)),$$

soit compte tenu de l'appartenance de $f$ à $S_C$,

$$\Phi'(t) = -\partial_2 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0))\Big(g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0)) - g(t_0, x_0)\Big).$$

Donc $\Phi - \Phi(t_0)$ est LA solution sur $\mathbf{R}_+^*$ du problème de Cauchy linéaire

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = -\partial_2 g(t, x_0 + (t - t_0)g(t_0, x_0))Y \ ; \ Y(t_0) = 0,$$

c'est-à-dire l'application nulle.
Ainsi $g$ est-elle constante sur $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \cap F_{x_0}$.

3. (a) Soit $\tau \in \mathbf{R}_+^*$. Supposons $g$ non croissante. Alors on dispose de $x_1$ et $x_2$ tels que :

$$x_1 < x_2 \text{ et } g(\tau, x_1) > g(\tau, x_2).$$

Mais alors les droites $F_{x_1}$ et $F_{x_2}$ définie comme en 2. avec en place de $t_0$ le réel $\tau$ se coupent en un point $M$ d'abscisse strictement positif (cf. dessin). Mais par 2.b), $g$ est constante sur $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \cap F_{x_1}$ et $(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}) \cap F_{x_2}$ et de plus prend la même valeur sur ces deux ensembles car ils se partagent le point $M$. En particulier $g(\tau, x_1) = g(\tau, x_2)$, et voilà une contradiction.
Conclusion : $\boxed{g(\tau, \cdot) \text{ croît}}$.

(b) Soit un couple $(x, y)$ de réels tel que $x < y$. On a par a), pour tout réel $t > 0$

$$g(t, x) \leq g(t, y).$$

Donc par continuité de $g$ sur $\mathbf{R} + \times \mathbf{R}$, en laissant tendre $t$ vers 0, on a :

$$g(0, x) \leq g(0, y).$$

Donc $g(0, \cdot)$ croît.

(c) Posons (avec quelque idée en tête) $g \ : \ \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}\,; \ (t, x) \mapsto u(a(t, x))$.
Soit $(x, t) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$. l'application $g$ est constante sur $\mathcal{F}_{a(t,x)}$ avec $t_0 = 0$; mais

$$\mathcal{F}_{a(t,x)} = \{(\tau, a(t, x) + \tau g(0, a(t, x)), \tau \in \mathbf{R}\} = \{(\tau, a(t, x) + \tau u(a(t, x)), \tau \in \mathbf{R}\}.$$

En particulier :

$$\tilde{g}(t, x) = g(0, a(t, x) = g\left(t, a(t, x) + tu(a(t, x))\right) = g(t, x).$$

Donc $\boxed{g = g = u \circ a}$. Ce qui établit la réciproqie du 1.