Corection du DM n°2

Exercice 1

1. **Écart à l'origine**

(a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ En premier lieux $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}(-1) = 0$ et $\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{E}(X_1^2) - E(X_1)^2 = \mathrm{E}(1) - 0^2 = 1$.

Ensuite par *linéraité* de l'espérance et comme les X_i suivent la loi de X_1, on a $\boxed{\mathrm{E}(S_n) = 0}$.

Enfin par *mutuelle indépendance* des X_i on a

$$\underline{\mathrm{V}(S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(X_i) = nV(X_1) = n.}$$

(b) Par (a), et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq \varepsilon\right) = \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{V}\left(\left(\frac{S_n}{n}\right)\right.}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{V}\left(S_n\right)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

Pour tout $\boxed{n \geq 10^4}$, on a $\frac{1}{n10^{-2}} \leq 10^{-2}$, et donc $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq 10^{-1}\right) \leq 10^{-2}$, donc, en passant à l'événement contraire,

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 1 - 10^{-2} = 0,99}.$$

(c) Montrer que pour tout réel x, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge de somme e^x.

Remarque. *Ce résultat au programme sera vu en cours d'année.*

Soit $x \in \mathbf{R}$.

Comme la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, sa dérivée $(n+1)^{\mathrm{e}}$ — qui est elle-même — est majoré sur $[0, x]$ par $\exp(|x|)$, par croissance de l'exponentielle, (l'écriture $[0, x]$ ne présage pas que x soit positif), l'inégalité de Taylor-Lagrange donne :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \text{ et } |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|)$$

Or par croissance comparée puissance/factorielle, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\exp(|x|) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$. Donc par encadrement $R_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ si bien que <u>la série $\sum \frac{x^k}{k!}$ converge de somme e^x.</u>

Soit $t \in \mathbf{R}$. Par ce qui précède,

$$\exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{2^k k!},$$

$$\mathrm{ch}(t)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-t)^k}{k!}\right)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Mais pour tout $k\in\mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{(2k)!}=\frac{1}{(1\times 2\times\ldots\times k)\times(k+1)\times(k+2)\cdots\times(k+k)}\leq\frac{1}{k!\underbrace{\times 2\times 2\cdots\times 2}_{k\text{ termes}}}=\frac{1}{k!2^k}.$$

Donc $\underline{\mathrm{ch}(t)\leq \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}}$.

(d) Soient un réel t et un entier $n\geq 1$, Par la formule du transfert,

$$\underline{\mathrm{E}(\exp(tX_1))=\frac{1}{2}\exp(t\times 1)+\frac{1}{2}\exp(t\times(-1)=\mathrm{ch}(t)\leq\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}.$$

Le lemme de coalition fait que $\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)$,...,$\exp\left(\frac{tX_n}{n}\right))$ héritent de la mutuelle indépendance de X_1,...,X_n, donc

$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right)=\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right)\underset{\perp\!\!\!\perp}{=}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right)=$$
$$\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)\right)^n\leq\exp\left(\frac{(\frac{t}{n})^2}{2}\right)^n=\underline{\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)}.$$

(e) Soit un entier $n\geq 1$. La variable aléatoire $\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)$ est positive l'inégalité de Markov s'énonce :

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\geq\exp(t\varepsilon)\right)\leq\frac{\mathrm{E}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\right)}{\exp(t\varepsilon)}\leq\frac{\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)}{\exp(t\varepsilon)}=\exp\left(\frac{t^2}{2n}-t\varepsilon\right),$$

par (d). Mais par croissance de l'exponentielle [1], pour tout réel $t>0$

$$\left\{\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right\}=\left\{\frac{tS_n}{n}\geq t\varepsilon\right\}\subset\left\{\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\geq\exp(t\varepsilon)\right\}$$

Donc en passant au probabilités, pour tout réel t non nul (et trivialement pour $t=0$), on a :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right)\leq\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{tS_n}{n}\right)\geq\exp(t\varepsilon)\right)\leq\exp\left(\frac{t^2}{2n}-t\varepsilon\right)}.$$

Optimisons en t : pour $t=\frac{\varepsilon n}{2}$, l'inégalité précédente devient :

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right)\leq\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right).}$$

(f) D'abord, $\left\{\frac{|S_n|}{n}\geq\varepsilon\right\}=\left\{\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right\}\cup\left\{-\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right\}$

Mais comme les variables aléatoires $-X_1$,...,$-X_n$ suivent la même loi respectivement que X_1,...X_n et restent mutuelllement indépendantes (lemme de coalition) $-S_n$ suit la loi de S_n, donc

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n}\geq\varepsilon\right)\leq\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right)+\mathbf{P}\left(\frac{-S_n}{n}\geq\varepsilon\right)=2\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\geq\varepsilon\right)\leq 2\exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2}\right),$$

1. La stricte monotonie accorde même, si l'on veut l'égalité.

par (e).

En particulier

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq 10^{-1}\right) \leq 2\exp\left(-\frac{n10^{-2}}{2}\right).$$

Or pour tout entier $n \geq 1060$, $2\exp\left(-\frac{n10^{-2}}{2}\right) \leq 10^{-2}$, et donc $\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} \geq 10^{-1}\right) \leq 10^{-2}$.

En passant à l'événement contraire, (cf. 1. (b)), pour tout entier $\boxed{n \geq 1060}$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{|S_n|}{n} < 10^{-1}\right) \geq 0,99.,$$

2. **Loi de S_n**

   (a) $\boxed{X_n^* \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$ et Le lemme de coalition assurant la mutuelle indépendance de X_1^*,X_2^*,...X_n^*, $\boxed{S_n^* \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)}$.

   (b) Pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = 2S_n^* - n$, donc $S_n(\omega) = \{2k - n, k \in [\![-n; n]\!]\}$ et pour tout $k \in [\![-n; n]$,

   $$\boxed{\mathbf{P}(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.}$$

   Remarque. *S_n ne prend que des valeurs de la parité de n.*

3. **Retour à l'Origine.**

   (a) Soit $\omega \in \Omega$.
   Alors $N(\omega)$ représente <u>le nombre (éventuellement infini) de termes nuls de la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbf{N}^*}$</u> (nombre de « retours à l'origine »).
   On a $N(\omega) = 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tels que $S_k(\omega) = 0$; donc :

   $$\boxed{\{N \neq 0\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} \{S_k = 0\}.}$$

   Remarque. A l'opposé, $N(\omega) = +\infty$ si pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il existe un entier k supérieur ou égal à n tel que $S_k(\omega) = 0$; donc :

   $$\boxed{\{N = +\infty\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \{S_k = 0\}.}$$

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$.

   $$E_n = \{S_n = 0\} \cap \bigcup_{k\geq n+1} \overline{\{S_k = 0\}}.$$

   L'événement E_n est « la suite $(S_k)_{k\in\mathbf{N}}$ prend la la valeur 0 pour $k = n$ et pour aucun autre indice strictement plus grand » de manière imagée, n est le dernier instant de passage par l'origine.

   (c) On a donc

   $$\boxed{\{N < +\infty\} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} E_n,}$$

   cette union est *une union disjointe*

(d) En modifiant légèrement l'expression des E_n,

$$\{N < +\infty\} = \biguplus_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall p \in [\![n+1, +\infty [\![S_p - S_n \neq 0\} =$$
$$\biguplus_{n=0}^{+\infty} \{S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k} \neq 0\}.$$

Donc

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0, \forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k} \neq 0).$$

Puis, comme le lemme de coalition assure l'indépendance [2] de S_n et $X_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0), \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k} \neq 0).$$

Mais les X_n étant mutuellement indépendantes et de même loi pour tout entier $n \geq 0$,

$$\mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_{n+1} + X_{n+2} + ...X_{n+k} \neq 0) = \mathbf{P}(\forall k \in \mathbf{N}^*, X_1 + X_2 + ...X_k \neq 0),$$

quantité indépendante de n, que nous baptiserons pour la suite α.

(e) On a donc :

$$1 \geq \mathbf{P}(N < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha \mathbf{P}(S_n = 0),$$

La série $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)$, on l'admet, diverge, donc nécessairement $\alpha = 0$ et donc on a $\mathbf{P}(N < +\infty) = 0$. Donc :

$$\boxed{\mathbf{P}(N = +\infty) = 1.}$$

(f) D'après 2, $\mathbf{P}(S_{2p+1} = 0)$ est nulle tandis que $\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \mathbf{P}(S_{2p}^* = p) = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi p}}$ (merci Stirling). Donc la série $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ diverge, mais pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}(S_k = 0) = \sum_{p=0}^{n} \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$$

mais comme $\sum \mathbf{P}(S_{2p} = 0)$ est une série positive divergente $\sum_{p=0}^{n} \mathbf{P}(S_{2p} = 0) \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} +\infty$.

Donc $\underline{\sum \mathbf{P}(S_n = 0) \text{ diverge}}$ (la suite de ses sommes partielles d'indice pair diverge).

Exercice 2

Soit un entier $n \geq 2$

2. En toute rigeur il faudrait travailler un peu plus pour prendre encomte la présence du « pour tout k », ce qui exigerait que l'on connût des résultats de spé. En général du reste dans la littérature, on se contente de cette évocation de l'indépendance.

1. Soit l'ensemble :
$$\mathcal{P} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) | A^2 = A\}.$$
Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $C(M)$ sa classe de similitude.
Les élément de $\mathcal{P}$ sont des matrices de projections, or l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé à une projection admet, dans une base adaptée à la supplémentarité de son noyau et de son l'image, comme matrice J_r, où r est son rang, donc celui de la matrice. Donc :
$$\mathcal{P} \subset \bigcup_{r=0}^{n} C(J_r).$$
Par ailleurs pour tout $r \in [\![0, n]\!]$ tout élément de de $C(J_r)$ est, comme J_r, idempotente donc élément de $\mathcal{P}$ Donc
$$\boxed{\mathcal{P} = \bigcup_{r=0}^{n} C(J_r)..}$$
Pour terminer remarquons que pour tout couple d'éléments distincts (r, r') de $[\![0, n]\!]$, on a $C(J_r) \neq C(J'_r)$ (deux matrices semblables ont même rang) ; donc $\mathcal{P}$ est la réunion d'exactement $n+1$ classes de similitudes (non vides).

2. On pose $N_r = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} & I_r \\ 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{pmatrix}$, pour tout $r \in [\![0, p]\!]$.

   (a) Soit $B \in \mathcal{Q}$. En identifiant B est l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ canoniquement associé on a $\mathrm{im}B \subset \ker B$ par définition de $\mathbf{Q}$, donc par la formule du rang :
   $$\mathrm{rg}(B) \leq \dim(\ker(B)) = n - \mathrm{rg}(B).$$
   Donc $\mathrm{rg}(B) \leq p$.
   D'autre part pour $r = 0, 1, ..., p$, la matrice N_r est trivialment élément de $\mathcal{Q}$,
   Concluons :
   $\mathcal{Q}$ contient des matrices de rang $0, 1, ..., p-1$ et p et pas de matrices de rang différent.

   Choisissons une base $(U_1, ...U_r)$ de $\mathrm{im}(A)$, complétons la en $(U_1...U_r, U_{r+1}, ...U_{n-r})$, base du noyau ($\mathrm{im}A \subset \ker A$) ; enfin choisissons U_{n-r+1}, U_{n-r+2},...,U_n des antécédants respectifs des éléments de l'image U_1,....U_r.
   Alors la famille $(U_1, ...U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. En effet, soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tels que :
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = 0_{n,1} \, ; \tag{1}$$
   cette égalité devient par multiplication par B,
   $$\lambda_{n-r+1}U_1 + \lambda_{n-r+2}U_2 + ... + \lambda_n U_r = O_{n,1},$$
   ce qui assure, (comme $(U_1, ..., U_r)$ est une base de $\mathrm{im}(B)$, que
   $$\lambda_{n-r+1} = \lambda_{n-r+2} = 1\lambda_n = 0$$
   et que (1) s'écrit
   $$\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i U_i = 0_{n,1},$$
   mais alors comme $(U_1, ..., U_{n-r})$ est une base de $\ker(B)$, les derniers, coefficients, $\lambda_1, ..., \lambda_{n-r}$ sont nuls.

Alors dans la base $(U_1, ..., U_n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice N_r. Donc :

$$\boxed{A \in C(N_r)}$$

(b) D'après (a),

$$\mathcal{Q} \subset \bigcup_{r=0}^{p} C(N_r).$$

Par ailleurs pour tout $r \in [\![0, p]\!]$ tout élément de de $C(N_r)$ est, comme N_r, nilpotente d'indice 2 donc élément de $\mathcal{Q}$ Donc

$$\boxed{\mathcal{Q} = \bigcup_{r=0}^{p} C(N_r).}$$

Remarquons que pour tout couple d'éléments distincts (r, r') de $[\![0, p]\!]$, on a $C(N_r) \neq C(N_r')$; donc $\mathcal{Q}$ est la réunion d'exactement $p + 1$ classes de similitude (non vides).