DM bis n°4

Objectif

L'objectif de ce sujet est l'étude de la gestion des erreurs dans un processus industriel.

On considère un processus industriel automatisé au cours duquel une tâche répétitive est effectuée à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs susceptibles de se produire à l'instant n. On admet que le système parvient à corriger ces erreurs et à maintenir son fonctionnement si le nombre total d'erreurs enregistrées jusqu'à l'instant n, noté $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, reste inférieur à une quantité de la forme amn où $a > 1$ est une constante fixée et m est le nombre moyen d'erreurs enregistrées à chaque instant. On est donc amené à estimer la probabilité $\mathbf{P}(S_n > nam)$, dans le but de montrer qu'elle tend vers 0 très rapidement lorsque n tend vers l'infini.

Dans la première partie, on étudie le cas particulier où les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre 1/2. Dans la deuxième partie, on démontre partiellement le théorème de Perron-Frobenius, qui permet, dans la troisième, d'étudier le cas où les variables aléatoires X_n forment une chaîne de Markov, c'est-à-dire où le nombre d'erreurs enregistrées à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celui enregistré à l'instant n.

I. Cas de la loi de Poisson

Dans cette partie, on étudie le modèle élémentaire où la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ du nombre d'erreurs aux instants successifs est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre 1/2. L'objectif de cette partie est de donner un équivalent de $\mathbf{P}(S_n > n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, afin de s'assurer que celle-ci converge vers 0 avec une vitesse de convergence exponentielle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et G_{X_n} la fonction génératrice de X_n.

I.A Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Q 1. Montrer que S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

Q 2. Expliciter le calcul de la fonction génératrice G_{X_1} de la variable aléatoire X_1.

Q 3. Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{S_n}(t) = \big(G_{X_1}(t)\big)^n$.

Q 4. Montrer que la variable aléatoire S_n suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

I.B

Q 5. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! \left(\frac{2}{n}\right)^n \mathbf{P}(S_n > n) = \mathrm{e}^{-n/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\frac{n}{n+k}\right)^k = \frac{n!\, n^k}{(n+k)!} \leqslant 1.$$

Q 7. Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$, où, pour tout $k \in N^*$, la fonction u_k est définie sur $[0, +\infty[$ par $u_k \colon x \longmapsto (1+kx)^{-k}(1/2)^k$, est normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

Q 8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{k\geqslant 1} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^{-k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1.$$

Q 9. En déduire que

$$\mathbf{P}(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-n/2}}{n!}\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

Q 10. À l'aide de la formule de Stirling, en déduire qu'il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\mathbf{P}(S_n > n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(\alpha^n)$.

II. Quelques résultats sur les matrices

L'objectif de cette partie est de démontrer un certain nombre de résultats d'algèbre linéaire qui serviront dans la partie suivante.

Notations

— n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

— Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on note $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. On note $\rho(A) = \max\left\{|\lambda|\,;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}$.

— On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* (resp. *strictement positive*) et l'on note $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

— Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ (identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est dit *positif* (resp. *strictement positif*) et l'on note $x \geqslant 0$ (resp. $x > 0$) si tous ses coefficients sont positifs (resp. strictement positifs).

— On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $A \geqslant B$ si $A - B \geqslant 0$.

— On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$ par $x \geqslant y$ si $x - y \geqslant 0$.

— On écrit de même $A > B$ si $A - B > 0$ et $x > y$ si $x - y > 0$.

— Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $|A|$ désigne la matrice $|A| = \left(|a_{i,j}|\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

— Si $x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, alors $|x|$ désigne le vecteur $|x| = \left(|x_i|\right)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$.

— On dit que $\lambda_0 \in \mathrm{Sp}(A)$ est une *valeur propre dominante* de A si $|\lambda_0| > |\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\lambda_0\}$.

On se propose de démontrer les deux propositions suivantes.

Proposition 1. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive, alors $\rho(A)$ est une valeur propre dominante de A. Le sous-espace propre associé $E_{\rho(A)}(A)$ est de dimension 1 et dirigé par un vecteur propre strictement positif.*

Proposition 2. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive diagonalisable sur $\mathbb{R}$, si Y est un vecteur positif non nul de $\mathbb{R}^n$, alors $\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$ converge, lorsque p tend vers $+\infty$, ou bien vers le vecteur nul, ou bien vers un vecteur directeur strictement positif de $E_{\rho(A)}(A)$.*

Dans toute cette partie II, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

II.A

Q 11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\begin{cases} x \geqslant 0 \Longrightarrow Ax \geqslant 0, \\ x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0 \Longrightarrow Ax > 0. \end{cases}$

Q 12. Montrer que $A^k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 13. En déduire que $\rho(A) > 0$, puis montrer que $\rho\left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right) = 1$.

Q 14. On suppose A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$.

Dans la suite du problème, on admettra que cette dernière implication est vraie que A soit diagonalisable ou non.

II.B On suppose, dans les sous-parties II.B et II.C, que A est une matrice strictement positive vérifiant $\rho(A) = 1$. On considère une valeur propre complexe λ de A de module 1 et x, un vecteur propre associé à λ. On se propose de démontrer que 1 est valeur propre de A.

Q 15. Montrer que $|x| \leqslant A|x|$.

Dans les questions 16 à 18, on suppose que $A|x| \neq |x|$ (*énoncé modifié*).

Q 16. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A^2|x| - A|x| \geqslant \varepsilon A|x|$ (*énoncé modifié*).

Q 17. On pose $B = \dfrac{1}{1+\varepsilon} A$. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, $B^k A|x| \geqslant A|x|$.

Q 18. Déterminer $\lim\limits_{k\to\infty} B^k$.

Q 19. Conclure.

II.C

Q 20. Montrer que A admet un vecteur propre strictement positif associé à la valeur propre 1.

Q 21. Montrer que 1 est la seule valeur propre de module 1 de A.

On pourra admettre sans démonstration que si $z_1, z_2, \dots z_k$ sont des nombres complexes, tous non nuls, tels que $|z_1 + \cdots + z_k| = |z_1| + \cdots + |z_k|$, alors, pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_j = \lambda_j z_1$.

Q 22. Montrer que $\dim E_1(A) = 1$.

Q 23. En regroupant les résultats des sous-parties II.B et II.C, justifier que l'on a prouvé la proposition 1.

II.D Dans cette sous-partie, on se propose de démontrer la proposition 2.
On suppose donc que $A > 0$ et que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on note $Y_p = \left(\dfrac{A}{\rho(A)}\right)^p Y$.

Q 24. Soit $\lambda \in S = \mathrm{Sp}(A) \setminus \{\rho(A)\}$. Soit $Y \in E_\lambda(A)$. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Q 25. Soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur positif. Montrer que la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté de Y sur $E_{\rho(A)}(A)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\lambda\in S} E_\lambda(A)$. Vérifier que, s'il est non nul, ce dernier vecteur (le projeté de Y) est strictement positif.

Dans la suite du problème, on admet que la proposition 2 se généralise à toute matrice A strictement positive, même non diagonalisable, et que, si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur strictement positif, alors la suite $(Y_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$converge vers un vecteur strictement positif dirigeant $E_{\rho(A)}(A)$.

II.E Cette sous-partie permet de déterminer la valeur propre dominant $\rho(A)$ d'une matrice carrée A strictement positive de taille $n \geqslant 2$.

Q 26. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$, A^k est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire, dont on précisera les coefficients diagonaux.

Q 27. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{\mathrm{tr}(A^{k+1})}{\mathrm{tr}(A^k)} = \rho(A)$.

III. Une inégalité relative aux chaînes de Markov

Dans toute cette partie III, N est un entier naturel non nul fixé et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'intervalle d'entiers $[\![0, N]\!]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(i_1, i_2, \dots, i_{n+1}) \in [\![0, N]\!]^{n+1}$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1) = \mathbf{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

On suppose que, pour tout $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, la probabilité $\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépend pas de n et est strictement positive. On note alors $q_{i,j} = \mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$.

On dit que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une *chaîne de Markov homogène sur $[\![0, N]\!]$ de matrice de transition* $Q = (q_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant N}$. On attire l'attention sur le fait que la numérotation des lignes et des colonnes de Q commence à 0 et que Q est une matrice carrée de taille $N + 1$.

Dans toute la suite, pour $n \geqslant 1$ fixé, on pose $\Pi_n = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(X_n = N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.A. Justification de l'existence des lois $(\Pi_n)_{n\geqslant 1}$

Q 28. Justifier que, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{N} q_{i,j} = 1$.

Q 29. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Pi_{n+1} = Q^\top \Pi_n$.

Q 30. En déduire que la loi de X_1 détermine entièrement les lois de toutes les variables aléatoires X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans toute la suite, on considère une telle chaîne de Markov et l'on pose

— $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;
— $a_{i,j}(t) = q_{i,j}\,\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $(i,j) \in [\![0, N]\!]^2$ et tout $t \in \mathbb{R}$;
— $A(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{0\leqslant i,j\leqslant N} \in \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$;
— $z_j(t) = \mathbf{P}(X_1 = j)\,\mathrm{e}^{jt}$ pour tout $j \in [\![0, N]\!]$ et tout $t \in \mathbb{R}$;
— $Z(t) = \begin{pmatrix} z_0(t) \\ \vdots \\ z_N(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$.

III.B Définition de la fonction de taux λ

Soient n un entier naturel non nul et t un réel fixé. On admet (*énoncé modifié*) que l'espérance de la variable aléatoire e^{tS_n} vaut

$$\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right) = \sum_{j=0}^{N} Y_j^{(n)}(t), \quad \text{où} \quad Y^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} Y_0^{(n)}(t) \\ \vdots \\ Y_N^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \big(A(t)^\top\big)^{n-1} Z(t).$$

Q 31. Justifier que $A(t)^\top$ possède une valeur propre dominante $\gamma(t) > 0$.

Q 32. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right)\right]}{n} = \lambda(t)$ où $\lambda(t) = \ln\big(\gamma(t)\big)$.

III.C Dans cette sous-partie, on étudie deux programmes écrits en langage Python. On suppose que la bibliothèque `numpy` a été chargée à l'aide de l'instruction `import numpy as np`.

On rappelle que les opérations suivantes (qui ne sont pas décrites en toute généralité, mais seulement pour l'usage qu'on en fera ici) sont alors disponibles. *La description ci-dessous diffère assez largement de celle du sujet original, fautive en plusieurs points.*

— `np.array(range(n))` crée un tableau uniligne dont les coordonnées sont les entiers de 0 à n ;
— `a.shape` renvoie un *tuple* donnant la taille du tableau `a` pour chacune de ses dimensions ;
— dans le cas où `a` est un tableau bidimensionnel carré, `a.trace()` en renvoie la trace ;
— `np.exp(a)` renvoie un tableau de mêmes dimensions que `a` dont chaque terme est l'exponentielle du terme correspondant du tableau `a` (exponentielle terme à terme) ;
— `np.dot(a, b)` calcule le produit matriciel des tableaux bidimensionnels `a` et `b` (sous réserve de compatibilité des dimensions) ;
— si `x` est un nombre et `a` est un tableau, `x * a` renvoie un tableau de même taille que le tableau `a`, dont tous les éléments ont été multipliés par `x` ;
— si `a` et `b` sont des tableaux de même dimension, `a * b` crée le tableau réalisant le produit terme à terme de `a` et de `b`. Si `a` est un tableau bidimensionnel et `b` un tableau unidimensionnel tels que les lignes de `a` et `b` soient de même longueur, `a * b` crée un tableau identique à celui qui serait créé par `a * b_1`, où `b_1` est le tableau de même taille que `a` dont toutes les lignes sont identiques et égales à `b`. C'est un cas particulier de ce que l'on appelle *broadcasting*.

Q 33. Écrire un langage Python une fonction `puiss2k` prenant en argument une matrice carrée M (sous la forme d'un tableau bidimensionnel `M`) et un entier naturel k et renvoyant la matrice M^{2^k} en effectuant k produits matriciels. On pourra exploiter le fait que $M^{2^{k+1}} = M^{2^k} \times M^{2^k}$.

Q 34. Expliquer ce que fait la fonction Python `maxSp` définie par :

```
def maxSp(Q:np.array, k:int , t:float) -> float:
    n = Q.shape[1]
    E = np.exp(t * np.array(range(n)))
    A = Q * E
    B = puiss2k(A, k)
    C = np.dot(A, B)
    return C.trace() / B.trace()
```

III.D. Une majoration théorique et son interprétation

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda^*(x) = \sup\limits_{t \geqslant 0} \big(tx - \lambda(t)\big)$. On admet que cette borne supérieure existe et que la convergence de la suite de fonctions $\left(t \longmapsto \dfrac{\ln\left[\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n})\right]}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction $t \longmapsto \ln\big(\gamma(t)\big)$ démontrée à la question 32 est uniforme sur $\mathbb{R}_+$. On admet également dans toute la suite l'existence de $m = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\mathbf{E}(S_n)$ et que $\begin{cases} \lambda^*(x) = 0 & \text{pour tout } x \leqslant m, \\ \lambda^*(x) > 0 & \text{pour tout } x > m. \end{cases}$

Dans toute la suite, ε désigne un réel strictement positif.

Q 35. Montrer qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow \ln\left[\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tS_n}\right)\right] \leqslant n\big(\lambda(t) + \varepsilon\big).$$

Q 36. À l'aide de l'inégalité de Markov appliquée à la variable aléatoire e^{tS_n}, montrer que, pour $a > 1$, $n \geqslant n_0$ et $t \geqslant 0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-ntam} \times \mathrm{e}^{n(\lambda(t)+\varepsilon)}.$$

Q 37. En déduire que, pour $n \geqslant n_0$,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant nam) \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda^*(am)-\varepsilon)}.$$

Q 38. Donner un sens concret à m en rapport avec le processus industriel étudié et interpréter l'inégalité précédente. On pourra établir un lien intuitif avec la loi des grands nombres.

III.E Cette sous-partie constitue une application numérique et peut être traitée en admettant les résultats précédents.

On dispose de deux suites finies de réels $0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_K$ ($K \geqslant 2$) et $x_1 < x_2 < \cdots < x_L$ ($L \geqslant 2$). La formule de la question Q 32 appliquée en t_i avec n suffisamment grand permet d'estimer $\lambda(t_i)$ par une valeur approchée $\hat{\lambda}(t_i)$.

Q 39. Justifier que, pour tout $i \in [\![1, L]\!]$,

$$\hat{\lambda}^*(x_i) = \max_{1 \leqslant j \leqslant K} \big(tx_i - \hat{\lambda}(t_j)\big)$$

constitue une valeur approchée raisonnable de $\lambda^*(x_i)$.

Le tableau ci-dessous donne ces valeurs pour $L = 20$.

x_i	4,50	$4,55$	$4,60$	$4,65$	$4,70$
$\lambda^*(x_i)$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$	$4,1 \times 10^{-12}$
x_i	4,75	$4,80$	$4,85$	$4,90$	$4,95$
$\lambda^*(x_i)$	$5,1 \times 10^{-4}$	$5,5 \times 10^{-3}$	$1,1 \times 10^{-2}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$2,1 \times 10^{-2}$
x_i	5,00	$5,05$	$5,10$	$5,15$	$5,20$
$\lambda^*(x_i)$	$2,6 \times 10^{-2}$	$3,1 \times 10^{-2}$	$3,6 \times 10^{-2}$	$4,1 \times 10^{-2}$	$4,6 \times 10^{-2}$
x_i	5,25	$5,30$	$5,35$	$5,40$	$5,45$
$\lambda^*(x_i)$	$5,1 \times 10^{-2}$	$5,6 \times 10^{-2}$	$6,1 \times 10^{-2}$	$6,6 \times 10^{-2}$	$7,1 \times 10^{-2}$

Tableau 1

Q 40. À l'aide du tableau 1, donner un encadrement approximatif de la valeur de m et la valeur d'un réel $h > 0$ tel qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\mathbf{P}(S_n > 1,1 \times nm) \leqslant \mathrm{e}^{-nh}.$$

• • • FIN • • •