indication pour le DM n°3

1 Un exemple

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le système (R_n, L_n, M_n) est complet par la formule des probabilités totales on a donc :

$$\begin{aligned} r_{n+1}\mathbf{P}(R_{n+1}) =& \mathbf{P}(R_n)\mathbf{P}(R_{n+1}|R_n) + \mathbf{P}(L_n)\mathbf{P}(R_{n+1}|L_n) + \mathbf{P}(M_n)\mathbf{P}(R_{n+1}|M_n) \\ =& ...... \\ =& 0 \times r_n + \frac{1}{2}l_n + \times\frac{1}{2}m_n. \end{aligned} \tag{1}$$

De même

$$l_{n+1} = \frac{1}{4}r_n + \frac{1}{4}l_n + \times\frac{1}{4}m_n.$$

$$m_{n+1} = \frac{3}{4}r_n + \frac{1}{4}l_n + \times\frac{1}{4}m_n.$$

Donc $\boxed{U_{n+1} = BU_n}$.

2. par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{U_n B^n U_0}$.

La somme des coefficients de chaque colonne de B vaut 1 !,

Étudier rg$B - I_3$

1. On a $Bu^* = U_*$. Donc par 1.(b), et une récurrence insignifiante, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante....

2. Les variables aléatoires S_1 et S_2 ne sont pas indépendantes, regardez $\mathbf{P}(S_0 = 1, S_1 = 1)$.

1. Le rang de B n'est pas 3, car........

   $\boxed{\mathrm{sp}(B) = \left\{1, 0, \frac{1}{2}\right\}}$.

   Comme B admet trois valeurs propres réelles distinctes, e B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Soit V un vecteur propre associé à une valeur propre autre que 1, notée ν. En sommant les trois composantes de l'égalité $\mu V = MV$ on a :

$$\nu \sum_{i=1}^{3} v_i = ... \sum_{j=1}^{3} v_j$$

comme $\nu \neq 1$, on a $\sum_{j=1}^{3} v_j = 0$.

Donc l'espace propre de B associé à ν est inclus dans H.

1. La famille (U_*, V, W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, car ses trois éléments sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

   Décomposons U_0 dans cette base :

$$U_0 = \alpha U_* + \beta V + \gamma W$$

Sommer les trois composantes de cette égalité, on a grâce à 5. (b),

$$1 = \alpha \times 1 + \beta \times 0 + \gamma \times 0$$

Donc α, première coordonnée de U_0 dans cette base, vaut 1.
On a que P est la matrice de passage de la base canonique à la base (U_*, V, W).
Donc $B = PDP^{-1}$. Donc par 1. (b),

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = PD^nP^{-1}U_0}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, grâce à 2, et en utilisant les notations de cette question,

$$PD^nP^{-1}U_0 = P\mathrm{diag}\left(1^n, 0, \frac{1}{2^n}\right)\begin{pmatrix}1\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \frac{\gamma}{2^n}\end{pmatrix}$$

etc.

2 Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - I_E)$. On a $u(x) = x$ on en déduit $r_k(x) = x$ et donc
$$\boxed{r_k(x) \to x}$$
2. Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. soit y un antécédent de x par$(u - I_E)$. On montre facilementy
$$r_k(x) = \frac{1}{k}(u^k(x) - x).$$
On en déduit que $\|r_k(x)\| \leq \frac{1}{k}(\|u^k(x)\| + \|x\|)$. Or, u contractant les normes, $\|u^k(x)\| \leq \|x\|$..... par encadrement,
$$\boxed{r_k(x) \to 0_E}$$
3. Si $x \in \mathrm{Im}(u-I_E) \cap \mathrm{Ker}(u-I_E)$, alors $x = 0$ par a question précédente. La somme de $\mathrm{Im}(u-I_E)$ et $\mathrm{Ker}(u - I_E)$ est directe. Donc, en utilisant la formule du rang, on arrive au résultat.
4. Soit $x \in E$...... $\boxed{r_k(x) \to p(x) \text{ avec } p \text{ projection sur } \mathrm{Ker}(u - I_E) \text{ de direction } \mathrm{Im}(u - I_E)}$

Les calculs menés ci-dessus, en identifiant matrices et endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés, montrent que
$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ R_k X \to PX,$$
où P est la matrice (dans la base canonique) de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$ (espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$). Remarquer alors que $R_k[i, j] = E_i^{\mathrm{T}} R_k E_j$
$$R_k \to P \text{ et } P^2 = P$$

3 Matrices stochastiques

1. Posons $V = AU$. On a pour $i = 1, 2, ..., n$,
$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} U_j = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$
On en déduit que
$$\text{(4) équivaut à } AU = U$$
2. Soient A, B stochastiques. Par les formules de produit, $C = AB$ est à coefficients positifs (chaque $c_{i,j}$ est somme et produit de termes ≥ 0). En outre $CU = ABU = AU = U$ avec la question précédente. Cette même question indique que C vérifie (4) et est donc stochastique.
$$\mathcal{E} \text{ est stable par multiplication}$$
3. Soit (A_k) une suite convergente de matrices stochastiques et A sa limite. On montre que A est-elle stochastique.
$$\mathcal{E} \text{ est fermé}$$
Soient A, B stochastiques et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $M = \lambda A + (1-\lambda)B$. La positivité des coefficients de A et B entraîne celle des coefficients de M. De plus $MU = \lambda AU + (1-\lambda)BU = \lambda U + (1-\lambda)U = U$ ce qui donne (4) pour M qui est donc stochastique.
$$\mathcal{E} \text{ est convexe}$$
4. Très facile.

5. Notons $B = A^p = (b_{i,j})$. B est une matrice stochastique (question 12) à coefficients > 0. Soit $X \in \mathrm{Ker}(B - I_n)$ et s un indice tel que x_s soit le maximum des x_i. On a $BX = X$ regarder le coefficient d'indice s de cet élément de $\mathbb{R}^n$,
6. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}(A - I_n)$ car A est stochastique. Si $AX = X$ alors par récurrence $A^k X = X$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et en particulier $A^p X = X$. la question précédente montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et ainsi
$$\boxed{\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)}$$
7. Par un calcul simple utilisnat U on montre :
$$R_k \text{ est stochastique pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$
On peut aussi pu utiliser la convexité de $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est isobarycentre de matrices stochastiques.
8. Les questions 10 et 14 montrent que (R_k) est convergente de limite P telle que $P^2 = P$. De plus, les questions 17 et 13 (caractère fermé) montrent que P est stochastique. La partie **2** a montré que P est la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_n)$ de direction $\mathrm{Im}(A - I_n)$. On a donc $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$ et P est de rang 1.
$$R_k \to P,\ P \in \mathcal{E},\ \mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(U)$$
9. Toutes les colonnes de P sont ainsi multiples de U et la colonne i s'écrit $\lambda_i U$, où λ_i est un réel....
10. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$R_k A = ... = \frac{k+1}{k} R_{k+1} - \frac{1}{k} I_n.$$
En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient
$$PA = P$$
On aurait aussi pu dire que $\mathrm{Im}(A - I_n) = \mathrm{Ker}(P)$ *et que donc* $P(A - I_n) = 0$.
P est une matrice dont toutes les lignes sont égale à L. PA est ainsi une matrice dont toutes les lignes sont LA. L'égalité $PA = P$ donne ainsi $LA = L$.

Reste l'unicité.
11. On montre par récurrence simple que $LA^k = L$ pour tout k. En particulier, $LA^p = L$. Si, par l'absurde, on avait $\lambda_i = 0$, alors en regardant le i^{e} coefficient de $LA^p = L$, on aurait
$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (A^p)_{j,i}....$$
12. On sait que $\mathrm{Ker}(A - I_n) \oplus \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n$. Les espaces $F = \mathrm{Ker}(A - I_n)$ et $G = \mathrm{Im}(A - I_n)$ sont stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A. En notant $u_F \in \mathcal{L}(F)$ et $u_G \in \mathcal{L}(G)$ les endomorphismes induits, comme $F \oplus G = \mathbb{R}^n$,
$$\chi_u = \chi_{u_F} \chi_{u_G}\ ;$$
On en déduit assez vite :
$$1 \text{ est valeur propre simple de } A$$