DS n° TYPE ÉNS

Les parties I, II et III sont indépendantes.

NOTATIONS. Pour une suite réelle $(u_k)_{k\geqslant 1}$ la notation $\sup\limits_{k\geqslant 1} u_k$ désigne $+\infty$ si la suite (u_k) n'est pas majorée et la borne supérieure de $\{u_k; k \geqslant 1\}$ si cette suite est majorée.
Pour deux entiers naturels $p \leqslant q$, on note $[\![p, q]\!]$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à p et inférieurs ou égaux à q.
On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

PRÉAMBULE : Espaces complets.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ est dite de Cauchy si, par définition, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, si $p \geqslant q \geq n_0$, alors :

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

1) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ convergente est de Cauchy.

2) Montrer que toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ est bornée.

3) Montrer que toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ qui admet une valeur d'adhérence converge.

4) Montrer que si E est de dimension fini, toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ converge.

5) Soit $(, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

5.a) On supppose dans cette sous-question que $(, \|\cdot\|)$ est complet. Montrer que toute série à valeurs dans qui converge absolument converge.

5.b) On suppose que tout série à valeurs dans absolument convergente converge. Montrer que $(, \|\cdot\|)$ est complet.

Un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge est dit complet. On a, en particulier, montré que $\mathbb{R}$ et C sont complets.

PARTIE I : Théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ normé complet (voir préambule). On notera $B(x, r)$ [resp. $\overline{B}(x, r)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre x et de rayon $r > 0$.
On considère une suite $(O_n)_{n\geqslant 1}$ d'ouverts de E telle que, pour tout $n \geqslant 1$, l'adhérence $\overline{O}_n$ de O_n est égale à E (ainsi O_n est dense dans E).

1.a) Soit G un ouvert non vide de E. Montrer que l'on peut trouver une suite décroissante de boules $(B(x_n, \varepsilon_n))_{n\geqslant 1}$, c'est à dire

$$B(x_1, \varepsilon_1) \supset B(x_2, \varepsilon_2) \supset \cdots \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \ldots$$

avec, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset G \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

1.b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy.

1.c) Montrer que

$$G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \neq \emptyset.$$

1.d) Conclure que

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i} = E.$$

2) On considère une suite $(L_k)_{k\geqslant 1}$ de formes linéaires continues sur E.
On note $|||L|||$ la norme d'une forme linéaire continue L, c'est-à-dire

$$|||L||| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |L(x)|.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$V_n = \left\{ x \in E ; \sup_{k\geqslant 1} |L_k(x)| > n \right\}$$

et

$$\Omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

2.a) Pour tout $n \geqslant 1$, montrer que V_n est un ouvert de E.

2.b) Montrer que Ω est dense dans E si et seulement si pour tout $n \geqslant 1$, V_n est dense dans E.

2.c) Prouver que si Φ est une forme linéaire sur E qui reste bornée sur une boule de rayon $\rho > 0$ et de centre z quelconque alors Φ est continue et donner une majoration de sa norme.

2.d) On suppose que Ω n'est pas dense dans E. Montrer alors qu'il existe un réel M tel que pour tout $k \geqslant 1$, $|||L_k||| \leqslant M$. Que vaut Ω dans ce cas ?

3) **Application.** Montrer en utilisant le théorème de Baire, qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}[X]$ tel que $(\mathbb{R}[X]; \|\cdot\|)$ soit complet.

PARTIE II : Permutation des termes d'une série.

1) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et $\sum v_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que la série $\sum v_{\sigma(n)}$ converge.

2) Soit $\sum w_n$ une série réelle convergente telle que $\sum |w_n|$ diverge.

2.a) Pour x réel on note $x^+ = \sup\{x, 0\}$ et $x^- = \sup\{-x, 0\}$. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

2.b) Quelles sont les natures des séries $\sum w_n^+$ et $\sum w_n^-$?

2.c) Montrer que l'on peut construire une bijection σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et deux applications strictement croissantes φ et ψ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} w_{\sigma(i)} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{\psi(n)} w_{\sigma(i)} \leqslant -1.$$

On se limitera à proposer un algorithme permettant de proche en proche la détermination des valeurs de σ et la construction de φ et de ψ.

2.d) Que peut-on en déduire sur la nature de la série $\sum w_{\sigma(n)}$?

3) Dans cette question $(F, \|\cdot\|_F)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de F. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ si et seulement si la série $\sum \|u_n\|_F$ converge.

4) On suppose dans cette question que F désigne l'espace l^2 des suites réelles $v = (v(k))_{k\geqslant 1}$ telles que $\sum v(k)^2$ converge, muni de la norme

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v(k)^2\right)^{1/2}.$$

On pose, pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \dfrac{1}{n} & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

4.a) Montrer que, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$, la série $\sum \omega_{\sigma(n)}$ converge dans F.

4.b) Quelle est la nature de la série $\sum \|\omega_n\|_2$? Ceci est-il en contradiction avec le résultat de la question 3) ?

PARTIE III : Espaces et opérateurs.

On suppose dorénavant que E désigne l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_k)_{k\geqslant 1}$ telles que $\sum u_k$ converge.

1) Montrer que la formule

$$\|u\| = \sup_{k\geqslant 1} \left| \sum_{i=1}^{k} u_i \right|$$

définit une norme sur E.

2) On désigne par C l'espace vectoriel des suites réelles $v = (v_k)_{k\geqslant 1}$ convergentes, muni de la norme $\|v\|_\infty = \sup\limits_{k\geqslant 1} |v_k|$.

Dans la suite pour pouvoir considérer des suites d'éléments de C, donc des suites de suites, on notera un élément u de C, $(u(k))_{k\geq 1}$, plutôt que $(u_k)_{k\geq 1}$.

2.a) Montrer que C est complet. (voir préambule)
Indication : on montrera dans un premier temps qu'une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de C, converge simplement, c'est-à -dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(u_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

2.b) Construire une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|)$ sur $(C, \|\cdot\|_\infty)$ bijective et de réciproque continue.

2.c) L'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est-il complet ? (voir préambule)

3) Soit σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On définit une forme linéaire sur E en posant

$$L(u) = \sum_{i=1}^{N} u_{\sigma(i)}.$$

3.a) On suppose que $1 \in \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$. On pose alors

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\} = [\![1, k'_1]\!] \cup [\![k_2, k'_2]\!] \cup \cdots \cup [\![k_p, k'_p]\!]$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k'_1 < k_2 - 1 < k_2 \leqslant k'_2 < \cdots < k_p - 1 < k_p \leqslant k'_p$.
Montrer que L est continue et calculer sa norme

$$|||L||| = \sup_{\|u\|\leqslant 1} |L(u)|$$

en fonction de p.

3.b) Comment le résultat précédent est-il modifié lorsque $1 \notin \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N)\}$?

Dans la partie suivante on notera $p = p_N^\sigma$ pour rappeler que p dépend de σ et de N.

PARTIE IV : Synthèse.

Cette partie utilise les résultats et les notations des parties I et III. En particulier la notation E désigne l'espace défini dans la partie III.
On cherche une caractérisation des bijections σ de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété

$$(\mathcal{P}) \ : \ \forall (u_n)_{n\geqslant 1} \in E, \quad (u_{\sigma(n)})_{n\geqslant 1} \in E$$

1) En utilisant les formes linéaires

$$L_N \ : \ \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ u = (u_k)_{k\geqslant 1} \mapsto \sum\limits_{i=1}^{N} u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

donner une condition nécessaire portant sur la suite $(p_N^\sigma)_{N\geqslant 1}$ (définie dans la partie III) pour que la bijection σ vérifie $(\mathcal{P})$.

2) Cette condition est-elle suffisante ?