Corrigé de la deuxième épreuve de mathématiques MP 2009
ÉCOLE NATIONAL DES PONTS ET CHAUSSÉES.

Question préliminaire

1) Voir cours **2)** Non ! Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'applications définie par :

$$f_n \ : \ [0,1] \to \mathbf{R}\,;\ t \mapsto \sqrt{2n+1}t^n.$$

En effet pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $N_2(f_n) = 1$, tandis que $N_\infty(f_n) = \sqrt{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ tels que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k\phi_{\lambda_k} = 0$.
Raisonnons par récurrence.
On a pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_1 + \sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k x^{\lambda_k-\lambda_1} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_1 = 0$.
Soit $m \in [[1, n-1]]$, supposons que pour tout $k \in [[1, m]]$, $\lambda_k = 0$ alors $\sum\limits_{k=m+1}^{n}\lambda_k\phi_{\lambda_k} = 0$ et donc pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_{m+1} + \sum\limits_{k=m+2}^{n}\lambda_k x^{\lambda_k-\lambda_{m+1}} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_{m+1} = 0$. Ainsi pour tout $k \in [[1, n]]$, $\lambda_k = 0$ puis la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre de $C([0,1])$.
Enfin la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.
Variante.
Soit $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ une famille presque nulle de réels telle que $\sum\limits_{\lambda\in\mathbb{R}_+}\alpha_\lambda\phi_\lambda$ soit nulle. Supposons $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ non nulle et désignons par $\ell = \min\{\lambda \in \mathbb{R}_+ | \alpha_\lambda \neq 0\}$. Alors :

$$0 \sim \alpha_\ell\phi_\ell(x)\ (x \to 0).$$

Ceci est absurde puisque ϕ_ℓ n'est pas nul au voisinage de 0. Donc $(\alpha_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ est nulle.

A. Déterminants de Cauchy.

1) On suppose $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_k}{X+b_k}$.
On multiplie la dernière colonne C_n par A_n et on lui ajoute la combinaison linéaire des autres colonnes $\sum\limits_{i=1}^{n-1}A_kC_k$.
On obtient :

$$A_nD_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots\cdots & R(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots\cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & & R(a_n) \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dérnière colonne, on obtient

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

2)
S'il existe $(k_1, k_2) \in [[1, n]]$ tel que $k_1 \neq k_2$ et $a_{k_1} = a_{k_2}$ ou $b_{k_1} = b_{k_2}$ alors $D_n = 0$, et alors

$$D_n = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$$

Supposons maintenant que les termes de la suite $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux à deux distincts ainsi pour la suite $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$.

Par récurrence montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \dfrac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$.

Pour $n = 1$ on a $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$.

Soit $n \geq 2$, supposons que $D_{n-1} = \dfrac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ 1 \leq j \leq n-1}} (a_i + b_j)}$.

On a d'après la question précédente

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

On a $R(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{X + b_k}$ avec $A_n = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (-b_n - a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (-b_n + b_k)} = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_k + b_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (b_n - b_k)}$

et $R(a_n) = \dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (a_n + b_k)}$ donc puisque $A_n \neq 0$

$$D_n = \frac{R(a_n)}{A_n} D_{n-1} = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}$$

1,2,3)
Cf. cours et exercices de colles.

4) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $A_n \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} A_n$, et donc $d(x, A) \leq d(x, A_n)$.
D'autre part La propriété caractéristique de la borne inférieure fournit $y \in A$ tel que :

$$d(x, A) \leq \|y - x\| < d(x, A) + \varepsilon.$$

Comme y est élément de A, il est en particulier élément d'un A_{n_0} et par croissance, élément de A_n, pour tout $n \in [[n_0, +\infty[[$, si bien que :

$$\forall n \in [[n_0, +\infty[[,\ d(x, A) \leq d(x, A_n) \leq \|y - x\| < d(x, A) + \varepsilon.$$

Donc $d(x, A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} d(x, A)$.

5) Voir cours.

C. Distance d'un point à un sous-espce de dimension finie dans un espace euclidien.

1) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, et π la projection orthogonale sur V (elle existe car V est de dimension finie).
Soient $x \in E$, et $v \in V$, comme $x - \pi(x) \in V^{\perp}$ et $\pi(x) - v \in V$, Pythagore raconte que

$$\| x - v \|^2 = \| x - \pi(x) \|^2 + \| \pi(x) - v \|^2 .$$

Comme $\pi(x) \in V$, on a d'une part que $\| x - \pi(x) \| = d(x, V)$ et d'autre part que $\| x - v \| = d(x, V)$ si et seulement si $\| \pi(x) - v \|^2 = 0$, soit si et seulement si $v = \pi(x)$.
La distance de x à V est atteinte en et seulement en $\pi(x)$.

2) Cas simple. *Signalons le cas simple où E est de dimension infinie, ou bien de dimension supérieure n.* Soient $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ et V un sous espce vectoriel de E de dimension n contenant $Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Soit $= (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de V; notée $\mathcal{B}_0$ et $M = \mathcal{M}at_{\mathcal{B}_0}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
la matrice du système de vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.
On a $M(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tM\, M$.
Donc $\det(M(x_1, x_2, ..., x_n)) = \det(M)^2$
Ainsi $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée.

Cas général. *l'implication* $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre alors $G(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$, *demeure, puisque l'hypothèse impose que la dimension de E soit supérieure ou égale n ; sa réciproque non. Ceci nous oblige à modifier la méthode. Le passage par une matrice M non carrée est possible mais assez complexe. Donnons la méthode traditionnelle.*
Notons dans l'ordre $C_1, C_2, ...C_n$ les colonnes de $(M(x_1, x_2, ..., x_n)$.
• Supposons $(x_1, x_2, ..., x_n)$ liée. Ceci nous fournit $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, non nul tel que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$. Mais alors par linarité droite du produit scalaire :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j C_j = 0_{n,1}.$$

Donc $(C_1..., C_n)$ est liée et donc $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.
• Supposons $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Alors $(C_1, ..., C_n)$ est liée. Soit $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j C_j = 0_{n,1}$ une combinaison linéaire de cette famille, non triviale, nulle. On a en explicitant la i^{e} ligne de cette égalité, pour $i = 1, ..., n$,

$$\left\langle x_i \middle| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\rangle = 0.$$

Donc $\sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$ est à la fois orthogonal à $Vect(x_1, ...x_n)$ et élément de cet espace, donc nul.
Comme $(\beta_1, ..., \beta_n)$ est non nul, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est lié.

3) On suppose que la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre.
Soit $x \in E$.
On a

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid x) \\ M(x_1, x_2, ..., x_n) & & & \vdots \\ & & & (x_n \mid x) \\ (x \mid x_1) & \cdots & (x \mid x_n & \|x\|^2 \end{vmatrix}$$

Soit π le projecteur orthogonal sur V.
$\forall i \in [[1, n]]$, $(x_i \mid x) = (x_i \mid \pi(x)) + (x_i \mid x - \pi(x)) = (x_i \mid \pi(x))$ car $x - \pi(x) \in V^\perp$.
$\|x\|^2 = \|x - \pi(x)\|^2 + \|\pi(x)\|^2$.
donc

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, ..., x_n, x) &= \begin{vmatrix} & & & 0 \\ M(x_1, x_2, ..., x_n) & & & \vdots \\ & & & 0 \\ (\pi(x) \mid x_1) & \cdots & (\pi(x) \mid x_n & \|x - \pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ & \quad + \begin{vmatrix} & & & (x_1 \mid \pi(x)) \\ M(x_1, x_2, ..., x_n) & & & \vdots \\ & & & (x_n \mid \pi(x)) \\ (\pi(x) \mid x_1) & \cdots & (\pi(x) \mid x_n & \|\pi(x)\|^2 \end{vmatrix} \\ &= \|x - \pi(x)\|^2 G(x_1, x_2, ..., x_n) + G(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x)) \end{aligned}$$

On a d'après 9) $rg(M(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x))) = rg(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x))$
Donc $G(x_1, x_2, ..., x_n, \pi(x)) = 0$ car $\pi(x) \in V = Vect(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ainsi

$$G(x_1, x_2, ..., x_n, x) = \|x - \pi(x)\|^2 G(x_1, x_2, ..., x_n).$$

D'autre part $d(x, V) = \|x - \pi(x)\|$ et $G(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$ car la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre, donc

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, ..., x_n, x)}{G(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

E

1) Soit $f \in C([0,1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de $C([0,1])$ et $f \in \overline{A}^{\infty}$ alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$.

Comme $0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = 0$ et donc $f \in \overline{A}^{2}$.

Ainsi $\overline{A}^{\infty} \subset \overline{A}^{2}$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]);\ f(0) = 0\}$

2) ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

On considère la suite de fonctions[1] $(f_n)_{n\geq 1}$ de $C([0,1])$ définie par :

$$\forall n \geq 1\ ,\ \ f_n(x) = \begin{cases} n\,x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ f_n \in V_0$.

$$(N_2(f_n - \phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1|^2\,dx = \frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$.

3) Soit $g \in C([0,1])$.

En gardant les notations de 12), $(g - g(0)\phi_0 + g(0)f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g pour la norme N_2, et est à valeurs dans V_0, puisque pour tout entier $n \geq 0$, le terme d'indice n de cette suite est combinaison des éléments de V_0 que sont $g - g(0)$ et f_n.

Donc $g \in \overline{V_0}^{2}$ et donc V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

Variante. L'application g se décompose en la somme de $g - g(0)\phi_0$ et $g(0)\phi_0$, donc est combinaison linéaire de deux éléments de $\overline{V_0}^{2}$, (par 2, pour le second). Donc g est élément de $\overline{V_0}^{2}$, par E.4. (mal placé) Donc V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

On a $\phi_0 \notin \overline{V_0}^{\infty}$, en effet , sinon il existerait une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de V_0 qui convergerait uniformément vers ϕ_0.

En particulier $(f_n)_{n\geq 0}$ convergerait simplement vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et donc on aurait $\phi_0(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$, ce qui est absurde.

Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

Variante. La forme linaire $C([0,1]) \to \mathbb{R}\,;\ f \mapsto f(0)$ est continue sur $C([0,1]), N_\infty)$, puisque pour tout $f \in C([0,1])$, on a $|f(0)| \leq N_\infty(f)$. Son noyau V_0 est donc fermé pour N_∞ et ne peut donc être dense puisque distinct de $C([0,1)$.

[1]Un dessin et la mention que les fonctions sont continues et affines par morceaux peut suffire.

4) Supposons que V soit un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.

• On a $V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \varnothing$.

• Soient x et y deux éléments de $\overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on dispose de deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y.
La suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V converge vers $x + \lambda y$.

Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$.

De ces deux points vient : $\overline{V}$ est un espace vectoriel.

5) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
• On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors en particulier pour tout $m \geq 0$, ϕ_m, application continue, est élément de $\overline{V}^{\infty} = C([0,1])$.
• Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$. Le théorème de Weierstrass, que nous avons admis, veut que $\overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathrm{N})}^{\infty} = C([0,1])$. Donc par 14,

$$C([0,1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathrm{N})}^{\infty} \subset \overline{\overline{V}^{\infty}}^{\infty} = \overline{V}^{\infty} \subset C([0,1]).$$

Ainsi V est-il dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

6) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
• On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 alors comme en 15), pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{2} = C([0,1])$.
• Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{2}$. Par 14) et 11,

$$C([0,1]) = \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathrm{N})}^{\infty} \subset \overline{\text{vect}(\phi_m, m \in \mathrm{N})}^{2} \subset \overline{\overline{V}^{2}}^{2} = \overline{V}^{2} \subset C([0,1]).$$

Ainsi V est-il dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

E. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_2}$.

1) On a la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de $C([0,1])$ et $W = \bigcup_{n\geq 0} W_n$ donc d'après la question 5) pour tout entier $\mu \geq 0$ $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = d(\phi_\mu, W)$.
Supposons que l'espace W soit dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et soit ϕ_μ avec μ entier positif, on a d'après la question 4) $d(\phi_\mu, W) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\lim_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ alors $d(\phi_\mu, W) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ et donc d'après la question 4) pour tout entier entier $\mu \geq 0$, $\phi_\mu \in \overline{W}^{2}$, l'adhérence de W pour la norme N_2 et alors d'après la question 6) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

2) On a d'après les questions D.3)

$$d(\phi_\mu, W_n)^2 = \frac{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)}{G(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, ..., \phi_{\lambda_n})}$$

Pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}$, on a $(\phi_\alpha \mid \phi_\beta)=\int_0^1 x^\alpha x^\beta dx=\dfrac{1}{\alpha+\beta+1}$
Posons pour tout $k\in[[0,n]]$, $\beta_k=\lambda_k+1$ et $\beta=\mu+1$, (on remarquera que $\lambda_k+\beta_k\neq 0$ et $\mu+\beta\neq 0$).
On a

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n},\phi_\mu)=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_1} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_0+\beta} \\ \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_1+\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_0} & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_1} & & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta_n} & \dfrac{1}{\lambda_n+\beta} \\ \dfrac{1}{\mu+\beta_0} & \dfrac{1}{\mu+\beta_1} & & \dfrac{1}{\mu+\beta_n} & \dfrac{1}{\mu+\beta} \end{vmatrix}$$

D'après la partie **A)** on a

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n},\phi_\mu)=\frac{\prod\limits_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}}(\lambda_i+\beta_j)}\times\frac{\prod\limits_{0\le i\le n}(\mu-\lambda_i)(\beta-\beta_i)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\le i\le n}(\mu+\beta_i)\prod\limits_{0\le i\le n}(\lambda_i+\beta)}$$

De même on a

$$G(\phi_{\lambda_0},\phi_{\lambda_1},...,\phi_{\lambda_n})=\frac{\prod\limits_{0\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)(\beta_j-\beta_i)}{\prod\limits_{\substack{0\le i\le n\\0\le j\le n}}(\lambda_i+\beta_j)}$$

donc

$$\begin{aligned} d(\phi_\mu,W_n)^2 &= \frac{\prod\limits_{0\le k\le n}(\mu-\lambda_k)(\beta-\beta_k)}{(\mu+\beta)\prod\limits_{0\le k\le n}(\mu+\beta_k)\prod\limits_{0\le i\le n}(\lambda_k+\beta)} \\ &= \frac{\prod\limits_{0\le k\le n}(\mu-\lambda_k)^2}{(2\mu+1)\prod\limits_{0\le k\le n}(\lambda_k+\mu+1)\prod\limits_{0\le i\le n}(\lambda_k+\mu+1)} \end{aligned}$$

et par suite

$$d(\phi_\mu,W_n)=\frac{1}{\sqrt{2\mu+1}}\prod_{k=0}^{n}\frac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}$$

3) Soit $\mu\ge 0$.
• Supposons que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$.
alors il est clair que la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

• Réciproquement, supposons que pour tout rel $\mu\ge 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tende vers 1. Nous noterons θ_k le terme général de cette suite

Considérons la fonction h, définie de $[0,\mu]$ dans $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{\mu - x}{x+\mu+1}$, pour tout $x \in [0,\mu]$.
On a h est dérivable sur $[0,\mu]$ et pour tout $x \in [0,\mu]$, $h'(x) = -\dfrac{1+2u}{(x+\mu+1)^2} \leq 0$.
Donc : $\forall x \in [0,\mu],\ 0 \leq h(x) \leq \dfrac{\mu}{\mu+1} = h(0)$.
Soit $\alpha = \dfrac{2\mu+1}{2(\mu+1)}$, on a $\alpha \in \left]\dfrac{\mu}{\mu+1}, 1\right[$.
La suite $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 1 donc on dispose de $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $k \geq k_0$ on ait :

$$\theta_k > \frac{2\mu+1}{2(\mu+1)} \quad .$$

Donc pour tout entier $k \geq k_0$, on a $\lambda_k > \mu$ et donc

$$\theta_k = \frac{\lambda_k - \mu}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

Donc pour tout entier $k \geq k_0$,

$$\lambda_k = \frac{\mu(\theta_k - 1) + \theta_k}{\theta_k - 1} \sim \frac{1}{\theta_k - 1},$$

et donc la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

4) D'après la question F. 1) l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.
Donc il suffit de montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.
On a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels > 0 deux à deux distincts.
Supposons pour tout entier $\mu \geq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n) = 0$ alors en particulier pour $\mu = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda_k}{\lambda_k+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_k}\right) = +\infty$.
D'autre part on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \ln(1+x) \leq x$.
Donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{\lambda_k}\right) \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\lambda_k}$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{\lambda_k} = +\infty$.
Ainsi la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est-elle divergente.
Réciproquement supposons la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente et soit μ un entier positif .
La suite $(d(\phi_\mu, W_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0, donc converge , soit $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} d(\phi_\mu, W_n)$.
On a $\alpha = 0$.
Car sinon $\alpha > 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\lambda_n - \mu|}{\lambda_n + \mu + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{d(\phi_\mu, W_n)}{d(\phi_\mu, W_{n-1})} = 1.$$

D'après la question 3) on a la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0\ \lambda_k > \mu$.

Posons $\forall k \geq 0$, $u_k = \ln\left(1 - \dfrac{\mu}{\lambda_k}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{\mu+1}{\lambda_k}\right)$.

On a $u_k = -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k} + \underset{k\longmapsto+\infty}{\circ}\left(\dfrac{1}{\lambda_k}\right)$ donc $u_k \underset{k\longmapsto+\infty}{\sim} -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$.

Comme la série $\sum\limits_k -\dfrac{2\mu+1}{\lambda_k}$ diverge et à termes de signe constant, alors la série $\sum\limits_k u_k$ diverge et vaut $-\infty$.

D'autre part, en posant $A = \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \ln\left(\dfrac{|\lambda_k-\mu|}{\lambda_k+\mu+1}\right)$ on a

$$\ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\frac{1}{2}\ln(2\mu+1) + A + \sum_{k=k_0}^{n} u_k.$$

et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(d(\phi_\mu, W_n)) = -\infty$, donc $\alpha = 0$ ce qui est absurde.

F. Un critère de densité de W pour la norme $\mathbf{N_\infty}$.

1) Supposons que W soit dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, alors d'après la question ?) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 et donc d'après la question 20) on a la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

2) Soit $\psi = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.\phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. On suppose que $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0,1,...,n\}$, et soit $\mu \geq 1$,on a :

$$\begin{aligned} N_\infty(\phi_\mu - \psi) &= \sup_{x\in[0,1]}\left|x^\mu - \sum_{k=0}^{n} a_k.x^{\lambda_k}\right| = \sup_{x\in[0,1]}\left|\mu\int_0^x t^{\mu-1}dt - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k\int_0^x t^{\lambda_k-1}dt\right| \\ &\leq \int_0^1 \left|\mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right| dt \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz on a

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq \left(\int_0^1 \left|\mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k t^{\lambda_k-1}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k.\lambda_k\phi_{\lambda_k-1}\right)$$

3) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i): & \lambda_0 = 0 \\ (ii): & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

et que la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

On pose pour tout $k \geq 1$, $\lambda'_k = \lambda_k - 1$, on a $(\lambda'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts.

On a pour tout $k \geq 1 \quad \dfrac{1}{\lambda_k} \leq \dfrac{1}{\lambda'_k}$ donc la série $\sum_k \dfrac{1}{\lambda'_k}$ est divergente.
Posons W' le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré par la famille $(\phi_{\lambda'_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$, on a d'après la question 20) W' est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.
Soit μ un entier ≥ 1 , on a $\mu.\phi_{\mu-1} \in C([0,1])$ et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $g \in W'$ tel que $N_2(\mu.\phi_{\mu-1} - g) \leq \varepsilon$.
Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n}$ de réels tels que $g = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_{\lambda'_k}$.
On a daprès la question 22) $N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\phi_{\lambda'_k}\right) \leq \varepsilon$ où $\psi = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_k}{\lambda_k}\phi_{\lambda_k}$.
Il est clair que $\psi \in W_n \subset W$.
Ainsi pour tout entier $\mu \geq 1$ a-t-on $\phi_\mu \in \overline{W}^{\infty}$.
On a $\lambda_0 = 0$, donc $\phi_0 \in W \subset \overline{W}^{\infty}$.
D'après la question 16) W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

4) Si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii\ ') : \quad \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0$$

Posons $\alpha = \inf\limits_{k\geq 1} \lambda_k > 0$ alors pour tout $k \geq 1$, on a $\lambda_k \geq \alpha$ et alors $\dfrac{\lambda_k}{\alpha} \geq 1$, $\dfrac{\lambda_0}{\alpha} = 0$ et la série $\sum_k \dfrac{\alpha}{\lambda_k}$ diverge
Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k = \dfrac{\lambda_k}{\alpha}$ et $V = Vect(\phi_{\beta_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on a d'après la question ?), V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.
Soit $f \in C([0,1])$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on a la fonction $g : x \longmapsto f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ est un élément de $C([0,1])$, donc il existe $h \in V$ tel que

$$N_\infty(h - g) \leq \varepsilon$$

$h \in V$, donc il exsite $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(a'_k)_{0\leq k\leq n}$ de réels tels que $h = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \phi_{\beta_k}$.
On a en faisant le changement de variable $y = x^{\frac{1}{\alpha}}$

$$N_\infty(h-g) = \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^{\beta_k} - f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| = \sup_{y\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k y^{\lambda_k} - f(y)\right| = N_\infty(P - f\ ).$$

Où $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k} \in W$,;
donc

$$N_\infty(P - f\ ) \leq \varepsilon.$$

Ainsi W est-il dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.